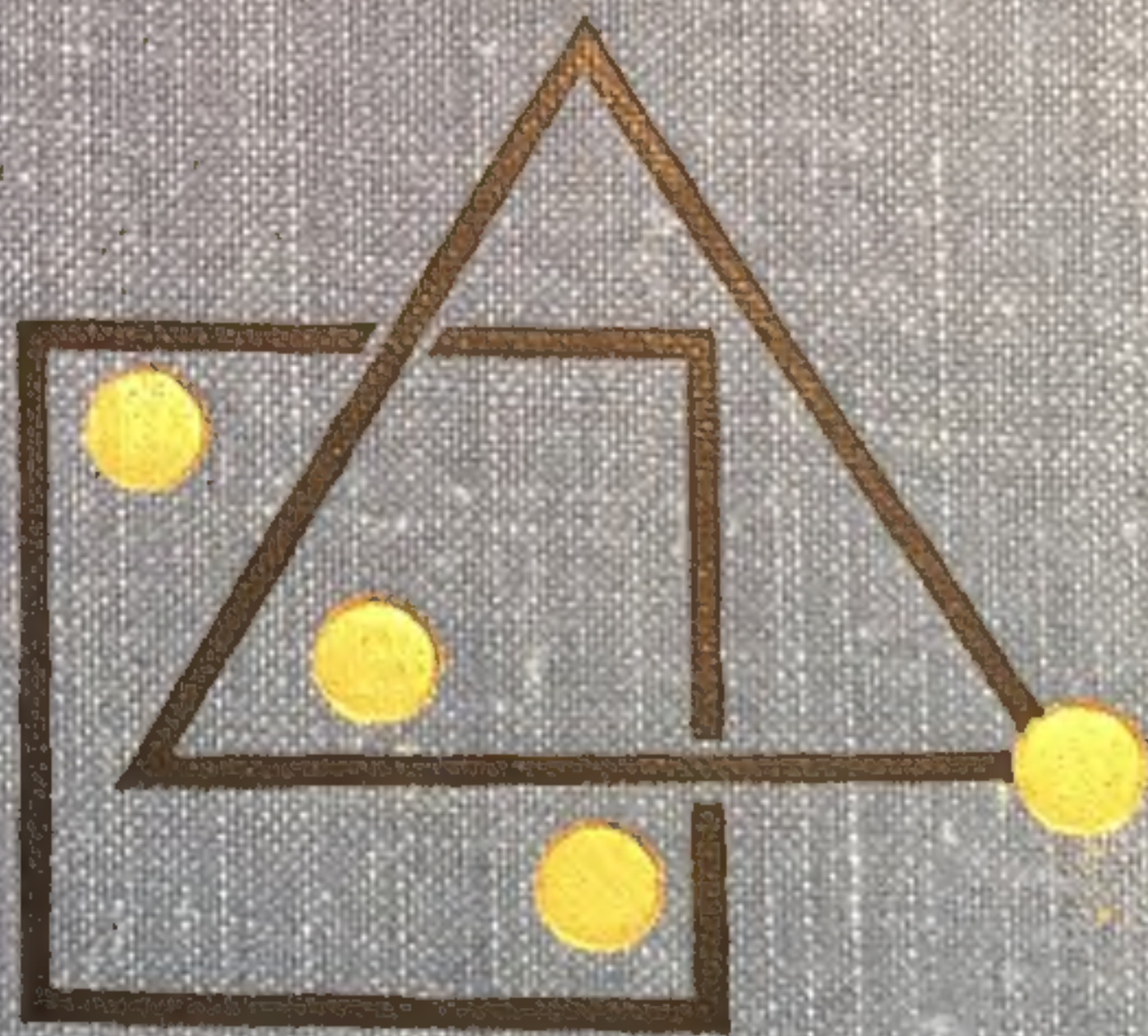


В. А. КРУТЕЦКИЙ

ПСИХОЛОГИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
СПОСОБНОСТЕЙ
ШКОЛЬНИКОВ



В. А. КРУТЕЦКИЙ

**ПСИХОЛОГИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
СПОСОБНОСТЕЙ
ШКОЛЬНИКОВ**

Безы

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА • 1968

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института психологии АПН СССР

Рецензенты:

действительный член АПН СССР,
доктор физико-математических наук А. И. Маркушевич;
доктор физико-математических наук В. И. Левин;
доктор педагогических наук Е. Н. Кабанова-Меллер

Крутецкий В. А.

К 84 Психология математических способностей
школьников. М., «Просвещение», 1968.

432 с.

В книге обобщаются многолетние теоретические и экспериментальные исследования автора по проблеме математических способностей школьников.

В советской психологической литературе эта книга — первый опыт монографического изложения вопросов математических способностей школьников. В ней излагаются вопросы сущности и структуры математических способностей школьников, возрастной динамики их развития, а также некоторые вопросы типологии. Помимо богатого экспериментального материала, автор широко использовал материал о развитии одаренных в области математики детей, результаты анкетных опросов ряда советских ученых-математиков и учителей математики, анализ биографий выдающихся математиков.

371.015

6—3

97—67

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
РАЗДЕЛ I. Состояние проблемы и задачи исследования	5
Глава I. Теоретическое и практическое значение проблемы математических способностей на современном этапе развития советской науки и школы	5
Глава II. Проблема математических способностей в зарубежной психологии	10
§ 1. Развитие исследований по психологии способностей за рубежом	10
§ 2. Исследование математических способностей в зарубежной психологии	25
Глава III. Проблема математических способностей в русской до-революционной и советской психологической литературе	57
Глава IV. Постановка проблемы и задачи исследования	72
§ 1. Некоторые вопросы общей теории способностей	72
§ 2. Основные понятия	82
§ 3. Проблема и задачи исследования	94
РАЗДЕЛ II. Методика исследования и его организация	96
Глава I. Общая методика и организация исследования	96
Глава II. Гипотеза компонентов математических способностей как основа экспериментального исследования	99
Глава III. Методика экспериментального исследования	104
Глава IV. Система экспериментальных задач по исследованию математических способностей школьников	115
Глава V. Организация экспериментального исследования	195
РАЗДЕЛ III. Анализ структуры математических способностей школьников	201
Глава I. Анализ неэкспериментальных материалов о компонентах структуры математических способностей школьников	203
Глава II. Анализ индивидуальных случаев математической одаренности детей	211

Глава III. Особенности получения информации о задаче (первичной ориентировки в ней) способными к математике школьниками	246
Глава IV. Особенности переработки полученной информации в процессе решения задач способными к математике школьниками	260
§ 1. Способность к обобщению математических объектов, отношений и действий	260
§ 2. Способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий	291
§ 3. Гибкость мыслительных процессов	304
§ 4. Стремление к ясности, простоте и экономности («изяществу») решения	313
§ 5. Обратимость мыслительного процесса в математическом рассуждении (способность к быстрому и свободному переключению с прямого на обратный ход мысли)	316
§ 6. Гипотеза об акцепторе математического действия	321
Глава V. Особенности хранения математической информации (математического материала) способными к математике школьниками	325
Глава VI. Некоторые специальные вопросы структуры математических способностей школьников	332
§ 1. Математическая направленность ума	332
§ 2. Проблема внезапного решения («озарения», инсайта) в свете анализа компонентов математических способностей	335
§ 3. Малая утомляемость способных школьников в процессе длительной и напряженной математической деятельности	341
Глава VII. Типовые, возрастные и половые различия в характеристиках компонентов математических способностей	343
§ 1. Типы структур (математических складов ума)	343
§ 2. Возрастная динамика развития структуры математических способностей	362
§ 3. О половых различиях в характеристике математических способностей	375
Глава VIII. Математические способности и личность	378
Глава IX. Общие вопросы структуры математических способностей	385
§ 1. Общая схема структуры. Взаимоотношение компонентов	385
§ 2. Специфичность математических способностей	388
§ 3. Некоторые соображения о природе математических способностей	398
Литература	401

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге, предлагаемой вниманию читателей, отражена основная часть материалов, полученных в результате теоретического и экспериментального исследования проблемы математических способностей школьников, проводимого нами с 1955 г.

Считаем нужным подчеркнуть, что наша работа носит чисто психологический характер, поэтому ни сейчас, ни в дальнейшем мы ни в какой мере не претендуем на анализ педагогических методов обучения математике, на создание новой методики обучения математике и т. д. По нашему глубокому убеждению, это дело не психологов, а ученых-математиков, педагогов и методистов — квалифицированных и эрудированных в соответствующей области людей. Психолог же может и должен сотрудничать с ними, предоставляя нужный материал, проводя психологическое исследование тех или иных вопросов.

В дальнейшем мы предполагаем продолжать работу в следующих направлениях:

1. В тесном содружестве с математиками исследовать структуру творческих математических способностей в их вполне сложившемся виде (способностей ученого-математика).

2. В совместной работе с физиологами попытаться вскрыть физиологическую природу математических способностей.

3. Совместно с педагогами и методистами изучать наиболее оптимальные пути формирования и развития математических способностей в школьном возрасте, выяснив предварительно, в какой мере существующая система обучения математике действительно формирует у учащихся математическое мышление, математические способности.

При подготовке книги мы встретились со значительными затруднениями, основным из которых был недостаток конкретных научных исследований по вопросам психологии и педагогики

способностей в советской психологической и педагогической литературе. Лишь за последние годы (примерно с 1959 г.) заметно повысился интерес к этой проблеме и был опубликован целый ряд ценных теоретических и экспериментальных работ. Но и сейчас таких работ все-таки еще очень мало, принимая во внимание то значение, которое придается в настоящее время вопросам всестороннего развития способностей молодого поколения в процессе обучения и воспитания.

Выражаем надежду, что книга принесет некоторую пользу психологам, преподавателям математики и методистам этого предмета, аспирантам и студентам соответствующих факультетов институтов.

Мы далеки от мысли, что предлагаемый читателю труд свободен от недостатков. Все замечания, указания и советы, сделанные читателями, будут приняты с признательностью и рассмотрены самым тщательным образом. Замечания просьба посылать по адресу: Москва, К-9, Проспект Маркса, д. 20, Институт психологии.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность психологам проф. А. А. Смирнову, проф. Б. М. Теплову, проф. П. А. Шевареву, доктору педагогических наук (по психологии) Е. Н. Кабановой-Меллер и математикам—проф. А. И. Маркушевичу, проф. В. И. Левину, а также проф. И. К. Андронову и проф. Е. Б. Дынкину за внимание, проявленное ими к его работе, и за помощь ценными указаниями.

Раздел I

СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Глава I

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ РАЗВИТИЯ СОВЕТСКОЙ НАУКИ И ШКОЛЫ

Задача всестороннего и гармонического развития личности человека коммунистического общества делает совершенно необходимой глубокую научную разработку проблемы способностей людей к тем или иным видам деятельности. Разработка этой проблемы представляет как теоретический, так и практический интерес. Теория способностей в советской психологии имеет серьезные пробелы, касающиеся анализа структуры, условий формирования и развития способностей к конкретным видам деятельности. Хотя за последнее десятилетие в советской психологии интерес к этому вопросу заметно повысился, положение существенным образом не изменилось. В буржуазной же психологии эта проблема решается неверно, так как разрабатывающие ее ученые в большинстве случаев стоят на ложных позициях в понимании самой природы способностей. Между тем практическое значение разработки проблемы способностей для нашей страны очень велико.

Правильная расстановка кадров предполагает максимальную реализацию возможностей каждого человека, а для этого нужно уметь выявлять эти возможности, уметь развивать их.

Проблема способностей — это проблема индивидуальных различий. Если бы все люди обладали одинаковыми потенциальными возможностями для развития во всех направлениях и для занятий всеми видами деятельности, то не было бы смысла говорить о способностях. Когда говорят о способностях, то предполагают наличие тех или иных индивидуальных различий между людьми в этом отношении. Ни к чему не способных людей нет. Каждый человек к чему-нибудь оптимально способен — это одно из основных положений советской психологии, но способны люди к одному и тому же не в одинаковой степени. Каждый человек более способен к одним и менее способен к другим видам деятельности. Признание человека неспособным в какой-нибудь области (не только в музыке, хореографии, изобразительном искусстве, но и в математике) не означает его неполноценности

или бездарности вообще. Это только значит, что его способности лежат не в данной области, а в других областях. Способности не врожденные, а развиваются в жизни и деятельности, но это не снимает необходимости выявлять и учитывать их.

Все сказанное касается и практики школьного обучения. Советские психологи единодушно стоят на той точке зрения, что все дети способны к обучению, что каждый нормальный и здоровый в психическом отношении школьник способен получить среднее образование, способен овладеть учебным материалом в пределах школьных программ, и учитель должен добиваться этого в отношении всех учащихся. Как отмечал московский методист А. А. Бударный, «не удалось установить ни одного раздела по различным предметам школьного курса, который оказался бы недоступным для учащихся (с низким уровнем развития способностей. — В. К.). Мы не встретили ни одного школьника, уровень способностей которого был бы настолько низок, чтобы он не мог успевать в обычной школе» (имеются в виду нормальные дети, подлежащие обучению в массовой школе) [63, стр. 6—7¹]. Авторитетное свидетельство известного математика академика А. Н. Колмогорова гласит: «Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивают... Обычные средние человеческие способности вполне достаточны, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам... усвоить математику, преподаваемую в средней школе» [180, стр. 8—9].

Но из этого совсем не следует, что всех учеников можно обучить одинаково легко. Здесь совершенно неодинакова мера «вложения труда». При самой лучшей организации методики обучения ученик будет продвигаться успешнее и быстрее в какой-нибудь одной области, чем в другой, а в одной и той же области одни ученики будут продвигаться успешнее и достигнут больших высот, чем другие. И это несомненно в большой мере зависит не только от интересов и склонностей учащихся, но и от их способностей. Один добивается высоких достижений, больших успехов без особой затраты сил и труда в сравнительно короткий срок, другой при всем желании и старании не может подняться до того же уровня или это сопряжено у него с большим трудом. В этом смысле мы и говорим о более способных и менее способных школьниках, и эти термины вполне возможно применять в плане характеристики индивидуальных различий в учебной деятельности школьников. И те и другие имеют возможность и должны усвоить программу средней школы, но «возможности» эти разные.

¹ Здесь и всюду в дальнейшем в скобках указывается порядковый номер литературного источника в библиографическом списке литературы, который приведен в конце книги.

Разумеется, указанные «возможности» не постоянны и не неизменны. Учитель не должен удовлетворяться соображением, что различные успехи детей, например в математике, есть отражение уровня их способностей. Способности не есть нечто раз навсегда predetermined, они формируются и развиваются в процессе обучения, в процессе упражнения, овладения соответствующей деятельностью, поэтому мы говорим о необходимости формировать, развивать, воспитывать, совершенствовать способности детей и нельзя заранее точно предвидеть, как далеко может пойти это развитие. Но указанное обстоятельство не снимает необходимости учитывать, а следовательно, и изучать упомянутые «возможности», пытаясь понять их природу и разработать методику их развития. Методист А. А. Бударный недавно писал о сохранившейся до наших дней «странной тенденции полного и безоговорочного обвинения учителя в неуспеваемости учащихся» [63, стр. 3]. «Нет плохих учеников, есть плохие учителя», — утверждают еще и сегодня некоторые психологи и педагоги, стоящие на позиции отрицания индивидуально-психологических особенностей детей, влияющих на успешность обучения. Для таких педагогов и психологов, по сути дела, не существует проблемы способностей. Они считают, что, признавая роль способностей в обучении, мы тем самым якобы признаем обреченность определенной части детей на неуспеваемость. По их мнению, успешность обучения и весьма высокий уровень знаний, умений и навыков обеспечиваются исключительно совершенством методики обучения, мастерством учителя. Разумеется, упомянутые факторы играют огромную роль, но нельзя думать, что все зависит только от них. Совершенно правы Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская, когда они, говоря о разных особенностях усвоения знаний учениками, находящимися в одних и тех же условиях обучения, указывают, что объяснение этому надо искать в особенностях самого ученика [44, стр. 250]. Подавляющее большинство практиков-учителей (в частности, опрошенных преподавателей математики) приводят веские соображения в пользу наличия у школьников индивидуально-психологических различий, влияющих на успешность обучения.

Разумеется, успех в учении, в овладении знаниями, навыками, умениями определяется далеко не только одними способностями школьника. В работах многих советских психологов и педагогов показано ведущее значение содержания и методов обучения, а также отношения ученика к предмету. Поэтому сама по себе успешность или неуспешность в обучении, рассматриваемая абстрактно, не дает оснований для суждений о характере имеющихся у школьника способностей. В частности, низкая успеваемость далеко не всегда может служить показателем малых способностей. Как писал С. Л. Рубинштейн, «одни и те же успехи разных учеников могут быть показателями различных

способностей, и при одних и тех же способностях их успехи могут быть различны» [354, стр. 544]. Но всякий раз, когда при прочих равных условиях одинаковые упражнения, одинаковая методика обучения дают существенно разные результаты, этот факт с полным правом можно объяснить разными способностями учащихся.

Итак, несомненно, что наличие слабых способностей у школьников в той или иной области никак не освобождает учителя от необходимости, насколько возможно, развивать способности этих учащихся в данной области. Но вместе с тем по отношению к каждому школьнику стоит и другая задача — найти ту область, в которой он наиболее способен, и всемерно развивать его способности именно в данной области. Это позволяет широко открыть путь развития наиболее способным (в той или иной области), талантливым учащимся, одаренной молодежи.

Одним из самых больших недоразумений является мнение о том, что особое внимание к развитию одаренных детей якобы противоречит задаче всестороннего развития способностей всех детей. Считается, что при идеальном обучении (к которому мы стремимся) всем учащимся может быть дан одинаковый (и при том очень высокий) уровень знаний, у всех могут быть в высокой степени развиты способности, а следовательно, будут фактически уравниены возможности разных людей.

Но и при самых совершенных методах обучения индивидуальные различия в смысле разного уровня способностей не будут стираться. Все будут способными, но равенства в этом отношении все-таки не будет; по отношению к одной и той же области знаний одни будут относительно более способны, а другие относительно менее способны.

Задача всестороннего развития способностей учеников не только не противоречит задаче выявления и развития основной (ведущей), т. е. наиболее ярко выраженной способности каждого ученика, но и предполагает ее. У каждого ученика нужно стремиться в максимально возможной для него степени развить все его способности, уделяя при этом главное внимание развитию ведущей (характерной для данного ученика) способности как основы его будущей профессиональной направленности. Следовательно, нет и не может быть дилеммы — воспитывать способности или отбирать способных. Нужно и то и другое.

В последнее время во многих странах наблюдается значительный рост интереса к проблемам математического образования. Это связано с тем, что значение математики в жизни человеческого общества возрастает с каждым днем. В Программе КПСС в числе ведущих отраслей естествознания, развитию которых партия будет уделять особое внимание, первой названа математика [13, стр. 126]. Высокий уровень развития математи-

ки является необходимым условием подъема и эффективности целого ряда важнейших областей знания. Как подчеркивают ученые [385], [68], [93], развитие наук в последнее время характеризуется тенденцией к их математизации, и это касается не только физики, астрономии или химии, но и таких наук, как современная биология, археология, медицина, метеорология, экономика, планирование, лингвистика и другие. Математические методы и математический стиль мышления проникают всюду. Трудно найти такую область знаний, к которой математика не имела бы никакого отношения. С каждым годом математика будет находить все более широкое применение в разнообразных областях человеческой деятельности. Принципиально область применения математики неограниченна, указывает академик А. Н. Колмогоров [178].

В связи с этим в нашей стране ежегодно возрастает потребность в математиках. В последнее время потребность эта явно не удовлетворяется, «математики стали дефицитны» (А. Н. Колмогоров [179]; [180, стр. 4—5]; Б. В. Гнеденко [93, стр. 3]).

Хорошо известно, что основной вклад в развитие той или иной науки делают люди, проявляющие способности в соответствующей области. Все это выдвигает перед советской школой задачу всемерного развития у учащихся математических способностей, склонностей и интересов, задачу повышения уровня математической культуры, уровня математического развития школьников. Наряду с этим наша школа должна уделять особое внимание школьникам, проявляющим высокий уровень способностей к математике, содействовать математическому развитию учащихся, проявляющих особую склонность к изучению математики. И искать математические таланты надо уже в школе, среди школьной молодежи, так как «золотой возраст для математика-исследователя», как утверждает, в частности, академик С. Л. Соболев [385], наступает в 22—24 года.

Некоторые считают, что вместо отбора способных к математике школьников необходимо заниматься изысканием возможностей максимального математического развития всех учащихся. Но одно будет всегда дополнять другое, так как и при самых совершенных методах обучения индивидуальные различия в математических способностях всегда будут иметь место — одни и тогда будут более способными, другие — менее способными. Уравнивание в этом отношении никогда не будет достигнуто.

Следовательно, учителя математики должны вести систематическую работу по развитию математических способностей у всех школьников, по воспитанию у них интересов и склонностей к математике и наряду с этим должны уделять особое внимание школьникам, проявляющим повышенные способности к математике, организовать специальную работу с ними, направленную на дальнейшее развитие этих способностей.

Глава II

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ В ЗАРУБЕЖНОЙ ПСИХОЛОГИИ

§ 1. Развитие исследований по психологии способностей за рубежом

Проблеме способностей и одаренности посвящено множество работ за рубежом. Однако большинство этих работ противоречит духу подлинной науки. Они пронизаны тенденциями, глубоко чуждыми идеям диалектико-материалистической психологии. Многие из этих работ направлены на оправдание классового, национального и расового неравенства, существующего в буржуазном обществе.

Основной вопрос, в котором наиболее ярко сказывается реакционная сущность многих зарубежных теорий способностей, — это вопрос о соотношении врожденного и приобретенного в формировании и развитии способностей.

Большинство буржуазных психологов стоит на позиции признания биологической — врожденной и наследственной — природы способностей.

Процесс развития способностей — это, по их мнению, процесс развития унаследованных биологических особенностей организма, осуществляющийся в данных социальных условиях. Уровень развития способностей каждого человека фатально предопределен этими врожденными особенностями, своего рода «уровнем генного снаряжения». В свое время один из крупнейших представителей зарубежной психологии, специалист в области психологии обучения арифметике и алгебре американский психолог Э. Торндайк прямо указывал на «природные силы» учащихся, их «прирожденные наклонности» (к которым Торндайк относил и способности к активному мышлению, к рассуждению, любознательность). Э. Торндайк говорил и о влиянии среды, о воспитании, но отводил этим факторам второстепенную, подчиненную роль: «Природа одаряет каждого известным капиталом, воспитание должно выявить, в чем этот капитал заключается, и наилучшим способом использовать его» [502, стр. 52]. «Природный капитал», разумеется, ставит границы развитию: «Некоторые учащиеся не смогут подняться выше определенного уровня, хотя бы они старались добиться этого сотни часов... Они просто не могут решать задач определенной степени сложности и отвлеченности совершенно так же, как они не могут перепрыгнуть через барьер высотой 5 м или поднять груз в 500 кг» [501, стр. 131]. «Часть учащихся не окажут никаких успехов, как бы хорошо ни было преподавание, а другие будут оказывать успехи, как бы плохо преподавание ни было» [502, стр. 52]. Взгляды Торндайка

были еще в 1936 г. подвергнуты серьезной критике А. А. Смирновым [383]. Можно было бы думать, что такого рода концепции представляют ныне только исторический интерес. Но это не так. В одной из психологических энциклопедий, напечатанной в США уже после второй мировой войны, в статье «Индивидуальная психология» прямо говорится: «Люди от рождения не равны, и никакая специальная подготовка и никакое окружение не может сделать их равными». Из дальнейшего следует, что здесь подразумевается неравенство не только в психике, но и социальное [563-а, стр. 251]. В одной из работ 1964 г. говорится: «Талант определяется врожденными и спонтанными факторами и представляет собой потенциально-творческое предрасположение к психологическим и психомоторным проявлениям в разнообразных областях» (Ф. Баумгартен [524]).

Правда, в последнее время лишь небольшая часть буржуазных психологов открыто исповедует взгляды, научная несостоятельность и реакционная сущность которых слишком очевидны. Большинство начинает вводить различного рода оговорки, признавая, в частности, большую роль воспитания и обучения, роль среды. Однако в лучшем случае речь идет об одновременном и параллельном воздействии двух независимых и отдельно влияющих факторов — врожденных биологических особенностей и социального окружения, социальных воздействий среды, при явном превалировании первого фактора, — наследственность очерчивает границы развития, преодолеть которые невозможно ни при каких условиях.

Конечно, упрек, который адресуется буржуазной психологии в целом, нельзя относить к каждому исследователю. Например, Р. Карпентер в работе о природе и сущности творчества [547] утверждает, что все учащиеся обладают творческими способностями в какой-либо области и только невнимание учителей задерживает их развитие. Эти способности могут быть развиты у каждого ребенка (хотя и не беспредельно). Обязанность учителя — найти для каждого ученика ту область творчества, где он наиболее эффективно может проявить свои способности. Но, повторяем, такого рода взгляды и высказывания не характерны для буржуазной психологии.

Как правильно пишет в одной из своих статей психолог-марксист из ГДР Г. Розенфельд [682], «господство одних и подчинение других объясняются в буржуазной психологии не общественно-историческими причинами, а врожденным и неизменным потенциалом одаренности. При этом не учитывается, что более высокий уровень знаний — результат привилегированного положения в обществе». Розенфельд указывает на исследование буржуазного психолога Губерта Вольфа, который, обследовав 10 000 человек, получил такие данные: 94,6% детей из высших слоев населения относятся к числу одаренных [682].

И в крупнейших зарубежных работах последнего времени звучат все те же знакомые мотивы. Автор капитального труда «Дифференциальная психология» американский психолог А. Анастаси подчеркивает: «Дети более высоких социальных слоев общества более интеллектуально развиты», «Интеллектуально выдающиеся родители имеют тенденции иметь интеллектуально выдающихся потомков» [514, стр. 521]. А. Анастаси указывает и на биологическое неравенство рас: человеческие расы имеют различное «генное снаряжение» [514, стр. 569].

Особое распространение в буржуазных странах (особенно в США, Англии) получила тестология как методика исследования умственной одаренности в целях «максимальной утилизации человеческих ресурсов» (Д. Гослин [585, стр. 166]).

По утверждению автора большого обобщающего труда «Исследование способностей» Д. Гослина, «за последние 50 лет тестирование стало частью американской культуры» [585, стр. 20]). Им высказываются соображения, что «в соревновании между СССР и США за лидерство в мире... американская система тестирования и основанного на ней отбора... может явиться своего рода «секретным оружием», которое может помочь превзойти СССР» [585, стр. 190].

В. Штерн более 40 лет тому назад указывал на то, что к тому времени было испробовано «с трудом обозримое количество разнообразных тестов» [506, стр. 67]. С тех пор их количество необычайно увеличилось. За последние годы появилось бесчисленное количество статей и совершенно не поддающееся учету множество самых разнообразных тестов. Несмотря на острую критику метода тестов со стороны некоторых буржуазных ученых, стоящих на более прогрессивных позициях, психологические и педагогические журналы зарубежных стран, особенно США и Англии, буквально пестрят статьями, посвященными тестированию интеллекта, специальных способностей, достижений, сопоставлению результатов тестов, анализу попыток найти способы предсказания будущих достижений, способы диагностирования и прогнозирования способностей. Как указывает Д. Гослин, «даже по неполным данным от 150 до 250 миллионов стандартизованных тестов интеллектуальных способностей различного вида используется ежегодно в США в школах, колледжах, индустрии, правительственных учреждениях, в военном ведомстве» — для оценки и отбора наиболее пригодных кандидатов [585, стр. 13 и 176].

Начало тестологии (термин «тест» в переводе с английского означает «задача», «проба», «испытание») было положено примерно в 1905 г. идеей А. Бинэ [479] о возможности измерения и градуировки умственного развития людей, распределения (ранжирования) их по степени умственной одаренности. Тесты стали рассматриваться как средство диагноза с целью прогноза,

как «простое средство быстро определить индивидуальную ценность человека» (В. Штерн [506, стр. 66]).

Надо сказать, что даже явные сторонники тестологии поначалу видели в тестах серьезные недостатки. «Нельзя думать, что они (тесты — В. К.) достаточны сами по себе в качестве испытания умственной одаренности. Они представляют... психологический минимум, который позволяет первоначально ориентироваться в психике индивида... Тесты могут служить дополнением к наблюдениям... психологическим, педагогическим, врачебным» (В. Штерн [507, стр. 16]). Говорилось и о факторах, которые ограничивали значение тестов как испытания умственной одаренности, — боязнь и нервозность испытуемых, влияние предшествующей тренировки и упражнений, возможное отсутствие интереса к испытаниям тестами, утомление и т. д. (В. Меде и Г. Пиорковский [491, стр. 8—19]).

Однако очень быстро эти опасения отступили на задний план и началась безудержная реклама тестов как средства, позволяющего «быстро, просто и недорого» определить уровень одаренности, своего рода «индекс талантливости» (Д. Холланд и А. Астин [610]).

В. Штерн стал уверять, что тестами можно установить ранговый ряд точнее, чем это сделает учитель после нескольких месяцев наблюдений. С. Берт считал, что это можно сделать даже «точнее, чем добросовестный, тщательный учитель на основании многолетнего наблюдения» [506, стр. 232].

Тестирование чрезвычайно широко проводится в школах США. По данным Д. Гослина, от 75 до 90% всех школ США используют стандартизованные тесты для всех возрастов учащихся [585, стр. 57]. «Стандартизованные тесты, — пишет Д. Гослин, — предназначены для сбора информации о школьниках, для сравнения их по шкале, которая остается относительно постоянной». С какой целью? Следует ответ: «Для размещения учащихся по степеням — внутри класса или по специальным группам, для выделения одаренных детей» [585, стр. 176]. Это, по-видимому, главное, хотя указываются и другие цели — для решения вопроса о подготовленности учащихся к усвоению нового материала, для объективного измерения относительной эффективности различных методов обучения, различных программ и т. д. Тестовые показатели способностей являются в американских школах основой отбора и селекции учащихся. На основе тестового показателя интеллекта дети получают различное образование.

Самое интересное заключается в косвенном признании Д. Гослином того факта, что, несмотря на массовое использование тестов в США, собственно говоря, неизвестно, что же именно измеряется тестами интеллектуальных способностей. Ведь тест, строго говоря, измеряет только способность выполнить задачу,

требуемую данной тестовой ситуацией, и ничего больше. А проявления человека в узкой тестовой ситуации используются для предсказания его проявлений в широких пределах жизненных ситуаций. Д. Гослин пытается спасти положение указанием на то, что вообще никто не представляет ясно, что такое способности, что способности не что иное, как «гипотетические конструкции», что имеет место разное понимание интеллектуальных способностей различными авторами.

Неверно считать, что все буржуазные ученые в исследовании способностей ограничивались тестами. Можно наметить два подхода к анализу способностей. Наряду с использованием тестов и различных статистических и математических методов обработки их результатов имел место и более или менее углубленный анализ индивидуальных случаев общей одаренности, сочетаемый со сбором биографических данных, анализом продуктов деятельности. В этой связи следует отметить работы Л. Термена [709], [710], Л. Холлингворт [611], [612], П. Витти [733], [735], [736], [737], [738], [739], [741], [742].

Американский психолог Т. Ньюленд [661] в 1963 г. дал критический обзор исследований по одаренности детей. Он совершенно правильно отмечает имеющий место разноречивость, отсутствие единого мнения в этих исследованиях, отсутствие единообразия и строгости терминологии, сомнительность принятых способов и методов исследования и недостоверность данных, отсутствие в ряде случаев серьезной психологической базы, отсутствие точности описания. Тем не менее исследования одаренных детей, проведенные в США, дают интересный материал, который нуждается, однако, в правильной интерпретации.

Но вернемся к тестам и тестовым исследованиям.

Советские психологи не отвергают ценности отдельных тестов как экспериментальных психологических задач, направленных на выявление психологических особенностей мышления, способностей. Не отвергается и ценность отдельных тестовых исследований. Если тест — это определенное более или менее краткое, строго стандартизованное испытание каких-либо психологических явлений, допускающее количественное выражение и, следовательно, открывающее возможность математической обработки, то нет оснований принципиально возражать ни против краткости испытаний, ни против стандартизации, стремления выразить результаты испытания в количественной форме, ни против статистической обработки материалов (Б. М. Теплов [405, стр. 4]).

Отдельные математические тесты представляют научный интерес и вполне могли бы послужить основой подлинно научного экспериментального исследования. Например, среди тестов, употребленных в одном из серьезнейших исследований математических способностей, в исследовании шведского ученого И. Верде-

лина [727] заслуживает внимания тест на пространственные представления динамического характера: дан куб «в разной позиции». Стороны его обозначены буквами. Какие буквы на невидимых сторонах? (См. рис. 1.)

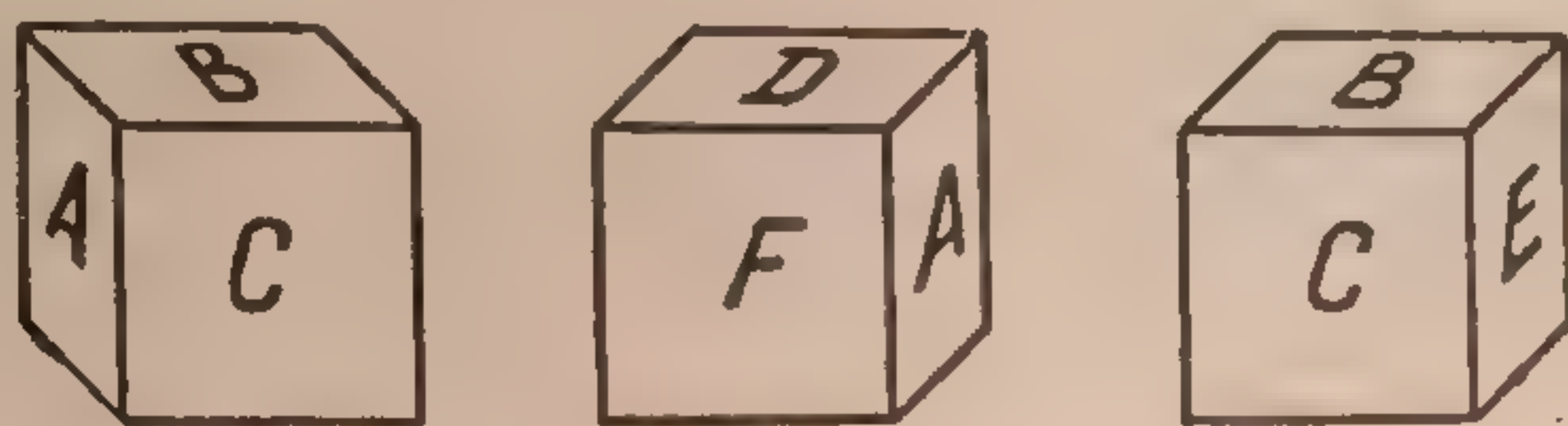


Рис. 1.

Заслуживает внимания и такой тест: человек начал двигаться на аэростате. Сначала он поднялся на 200 м, потом 1000 м пролетел на северо-запад, спустился на 100 м и пролетел 500 м на северо-восток. Потом повернул и пролетел 1000 м на юго-восток, потом опустился на 100 м. Как далеко аэростат оказался от места старта?

Но, относясь положительно к отдельным тестам и даже отдельным тестовым исследованиям, советские психологи безусловно отрицательно относятся к тестологии как науке. И это отрицательное отношение определяется не только тем, что тесты служат классовым целям буржуазии. Как правильно заметил Б. М. Теплов, в классовых целях можно использовать любой метод. Наша критика тестов идет и по другой линии.

Основной упрек в адрес тестологии четко сформулировал Б. М. Теплов [408, стр. 513]. Он сводится к следующему. В большинстве случаев совершенно неясна психологическая сущность того, что устанавливается с помощью тестов. Тест в буржуазной психологии не выступает в качестве психологического индикатора, т. е. показателя определенного психологического свойства. В. Штерн, например, прямо указывал, что диагноз умственной одаренности может быть успешным без знания ее сущности [507, стр. 5—6]. Абсолютно то же самое высказывали В. Меде и Г. Пиорковский [491, стр. 39]. Один из ведущих английских тестологов Ф. Вернон признает, что реальностью являются лишь внешние проявления и не следует уверять себя, что изучается что-то более глубокое [723]. Тест интересует буржуазного исследователя лишь с точки зрения того, насколько он коррелирует с другими тестами.

Как неоднократно отмечалось советскими психологами, подавляющее большинство тестов не имеет под собой прочно обоснованной научной базы, что делает неясным психологический смысл тестовых исследований (Б. М. Теплов [405, стр. 4—5]). Квазинаучность тестовых испытаний признают и многие буржуазные

психологи. Это касается как исследовательских, так и диагностических тестов.

Этот основной порок тестовых исследований является совершенно естественным, так как он определяется характерными особенностями тестовых исследований, о которых будет говориться ниже.

Подлинно же научное психологическое исследование должно использовать методики, психологический смысл которых ясен, как ясен и психологический смысл полученных этими методиками показателей. Показатель «неизвестно чего», не являющийся индикатором психологического явления или свойства, не может сам по себе интересовать исследователя, а если последний и имеет дело с такими показателями, то все его внимание должно быть направлено на то, чтобы вскрыть то, что стоит за ними, те свойства, индикатором которых являются полученные показатели. Тестология же означает принципиальный отказ от познания чего-либо другого, кроме конкретных проявлений, относящихся к самим тестам.

Именно под этим углом зрения резко критикует буржуазную тестологию прогрессивный французский психолог Ж. Лени [637].

Обычно для тестологии характерна подмена объекта изучения. Изучение уровня способностей подменяется изучением достигнутого уровня знаний, умений, навыков.

Большинство тестов носят такой характер, что решение их не только зависит, но часто и определяется наличными знаниями, умениями и навыками, опытом, «тренированностью».

Основной порок тестовых исследований — голый статистический подход к изучению и оценке способностей, фетишизация математической обработки результатов тестовых испытаний при полном отсутствии интереса к изучению самого процесса решения.

Тесты фиксируют только конечный результат выполнения испытуемым того или другого задания, игнорируя характер самого процесса достижения того или иного результата. В связи с этим тесты ориентированы лишь на количественное выражение изучаемого явления и никак не вскрывают его качественных особенностей. Не вскрывая психических процессов, ведущих к данному результату, эти тесты, следовательно, не дают полной картины изучаемого явления.

Не анализируя процесс, нельзя рассчитывать вскрыть психологическую сущность получаемых результатов, дать характеристику способностей во всем их качественном своеобразии. Тестовые исследования дают лишь формально-количественную оценку результатов исследования в числовых и баллированных характеристиках.

Прогрессивный американский психолог Е. Хейссерман [597] пишет, что тесты показывают, какие задания могут и не могут

быть выполнены ребенком, но они не раскрывают того, как ребенок пришел к практическому решению той или иной задачи, ничего не говорят о причинах неудачи. Д. Басуэлл и Л. Джон также отмечают, что тесты не дают понимания процесса [543, стр. 86—87].

Особенно выразительные формы этот статистический подход приобрел в последнее время в связи с использованием счетно-вычислительных устройств для обработки массовых результатов групповых тестов. От испытуемых часто требуются лишь альтернативные ответы (типа «да», «нет»), выбор и подчеркивание правильного ответа из нескольких данных вариантов и т. д., да и сам испытуемый часто выступает под определенным номером и как личность совершенно не интересует исследователя.

В качестве иллюстрации указанного выше недостатка тестовых исследований можно привести исследование Д. Мэррея, посвященное анализу геометрических способностей, опубликованное в 1949 г. [659]. Автор с помощью тестовой методики, совершенно игнорируя процесс решения тестовых задач, выявляет корреляции между успешностью овладения геометрией и частными способностями — способностью к рассуждению, способностью к «схватыванию» пространственных отношений и т. д. К этому же типу исследований можно отнести более новые исследования математически одаренных подростков В. Кеннеди и других [623], исследование Э. Лока [640], посвященное вычислению корреляций между показателями интеллектуальных способностей и личностными чертами в учебных и внеучебных достижениях одаренных к наукам учащихся, и многие другие. Трудно понять, что может дать теории и практике, например, упомянутое исследование В. Кеннеди, который вычислил для 130 математически одаренных подростков показатели решения различных типов тестов и изучил корреляцию между ними, выяснив, что в одних случаях она является значительной а в других — незначимой. Процесс решения исследователя не интересовал. А между тем, какой богатый материал могло бы дать изучение процесса математического мышления 130 способных к математике подростков!

Рассмотрим несколько иллюстраций, которые должны предельно ясно показать сущность высказанных выше критических замечаний.

В большинстве случаев при одинаковом результате тестового испытания психические процессы, ведущие к этому результату, могут быть принципиально различными, и вот это-то различие может являться самым ценным материалом для суждения о психологических особенностях испытуемого, о его способностях.

С этой целью разберем несколько примеров из нашей практики — примеров разных психологических путей достижения одного и того же результата.

1. Задача. Три товарища посещают библиотеку в разные дни. Первый — один раз в 3 дня, второй — один раз в 4 дня, третий — один раз в 5 дней. В последний раз они вместе были в библиотеке во вторник. Через сколько дней они снова будут вместе в библиотеке и какой это будет день недели?

Решение. Ученик Г. С. (VII кл.). Быстро выписал ряд последовательных чисел, начиная с 1, и стал также быстро зачеркивать числа — каждое третье (черточкой), каждое четвертое (кружочком) и каждое пятое (крестиком). Автоматически получился правильный ответ — на 60-й день. Быстро пересчитал дни недели — получилась суббота. Ответ правильный, время решения — 2 мин. 02 сек.

Ученица Ю. А. (VII кл.). Немного подумала, затем сказала: «Так это же будет наименьшее общее кратное!» Не торопясь, вычислила ($3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$). 60 разделила на 7, получила 8 недель и 4 дня в остатке. Произнесла: «Среда, четверг, пятница, суббота. Через 2 месяца в субботу». Ответ правильный. Время решения — 1 мин. 22 сек.

В обоих случаях результат один и тот же. Тестолог равно оценит обоих учеников (в лучшем случае сделав «поправку» на время решения). Процесс же решения — совершенно различного уровня.

2. Тест. Напишите 100, 101, 102, ... Что означают три точки? Какое первое число ты написал? Какую первую цифру? Третью цифру? Вопрос: «Какая будет 13-я цифра? а 21-я цифра?»

Ответы. Ученик А. К. (V кл.) просто продолжает ряд и примитивно отсчитывает заданную цифру. Ответ правильный, время — 29 сек.

Ученик С. Б. (VI кл.) считает вслух (и показывает на пальцах) цифры по одной, пока не дойдет до нужного результата. Ответ правильный, время — 21 сек.

Ученица Р. В. (VI кл.). Заметив, после некоторого раздумья, что каждое число имеет 3 цифры, считает вслух группами по три, не воспроизводя всего ряда. Ответ правильный. Время — 24 сек.

Во всех трех случаях результат один и тот же — задача решена; более того — время решения также примерно совпадает. Любой тестолог обязан совершенно равно оценить всех трех учеников. Но даже не искушенному в психологии человеку ясно, сколь различны психологические пути, приведшие к одному и тому же результату.

Чтобы показать, насколько выразительными могут быть собственные ученику пути решения задач и как много может дать исследованию анализ процесса, приведем пример решения двух задач тремя учащимися (даем краткую запись решения). Задачи-тесты взяты из исследования И. Верделина [727]. Решали учащиеся московских школ.

Задача № 1. Если прибавить 360 к определенному числу, то получится такой же результат, как от умножения этого же неизвестного числа на 4. Какое это число?

Задача № 2. Мать втрое старше дочери. Спустя 10 лет она будет только вдвое старше дочери. Каков возраст матери?

Решение Саша Р. (VII кл.). Быстро, не останавливаясь, составляет уравнения и решает.

$$1) 360 + x = x \cdot 4 \quad 360 = 3x \quad x = 120$$

$$2) x; x + 10 \quad 3x + 10 = 2(x + 10) \quad x = 10$$

$$3x; 3x + 10 \quad 3x + 10 = 2x + 20$$

Решение Рая Ц. (VII кл.). Быстро, не останавливаясь, рисует схемы:

$$1) \begin{array}{r} 360 \\ + \\ \square \end{array} = \square \square \square \square \quad \square = 120$$

$$2) \begin{array}{r} \square + \bigcirc \\ \square \square \square + \bigcirc \\ \square \square \square \bigcirc = \square \bigcirc \square \bigcirc \end{array} \quad \square = 10 \text{ лет (дочери)}$$

Решение Роберта Н. (VII кл.). Ничего не пишет и не рисует. Быстро говорит: 1) «Прибавить 360 и взять 4 раза — это все равно. Значит, 360 — это три равных сомножителя. Число это — 120».

2) «Разница между матерью и дочерью всегда будет составлять два первоначальных возраста дочери. А через 10 лет эти два первоначальных возраста будут равны последующему возрасту дочери, т. е. через 10 лет дочь станет вдвое старше. Дочери было 10, а матери 30 лет».

Все три ученика решили обе задачи, все трое относились к числу способных учеников, время решения у всех трех было примерно одинаково. Тестолог обязан совершенно равно оценить всех трех учеников. Но даже поверхностный анализ процесса предположительно указывает на существенные различия в мыслительном процессе этих учеников.

Мы подробно остановились на этом вопросе, так как важно конкретно показать различные неиспользуемые тестологией возможности и ошибочность ее заключений. Ведь тестолог во всех

приведенных выше примерах обязан заключить о равенстве проявлений математической одаренности учащихся, тогда как анализ процесса предположительно показал, что мы имеем дело с различными уровнями математических способностей в первых двух примерах и с различными типами математических способностей в двух других.

Большой недостаток тестовых исследований заключается и в том, что фактически игнорируется влияние очень многих факторов, так или иначе сказывающихся на успешности решения тестовых заданий, особенно разнообразных личностных факторов (мотивации, отношений, интереса и т. д.). Отсутствует и учет того, какой смысл имеет для испытуемого предлагаемое ему задание. Сказывается влияние и таких факторов, как естественное волнение, тревога, нервозность ребенка, чувствующего, что это необычное испытание, которое может отразиться на его судьбе (как это может быть, например, при тестовых испытаниях для английских школьников в 11-летнем возрасте, определяющих их дальнейший образовательный ценз (Б. Саймон [499])). В этих условиях ребенок может дать совершенно иные результаты, чем в обычных, нормальных условиях.

Следует указать и еще на один порок тестовых исследований. Тестовые исследования обычно носят разовый характер и поэтому не отражают динамики развития изучаемого явления и, в частности, характера развития способностей. Но это вполне в духе представлений (теперь уже поколебленных) тестологов о том, что они изучают некий устойчиво-действующий фактор, что интеллектуальный уровень человека остается неизменным (или мало изменяемым) в течение всей жизни, и поэтому уже в раннем возрасте можно предсказать окончательный уровень умственных способностей ребенка (Б. Саймон [499, стр. 34]).

Не приходится уж говорить о совершенно неприемлемой интерпретации результатов тестовых испытаний, неприемлемости выводов, которые делает из них буржуазная педагогика и психология. Если дети трудящихся и дают худшие показатели по тестам, то это ни в коем случае не может свидетельствовать об их меньшей одаренности. Тесты измеряют подготовленность человека, а условия жизни не дают простора развитию способностей детей трудящихся. Особенные возражения должен вызвать прогноз на будущее. Имеет ли тестология право делать выводы прогностического характера? Ведь даже если бы тестовым исследованиям не были присущи все те недостатки, о которых говорилось выше, такие выводы делать было бы нельзя. Состояние человека в данный момент не предопределяет фаталистически его дальнейшего развития. Даже в этом случае выводы прогностического характера можно было бы делать только предположительно и ориентировочно.

Тестология
интересам психологии
умственных способностей
ность детей в
В итоге в
лозом, который
к изучению
ном отношении
ского применения
В связи с т
себя даже в гл
время получ
умственного р
Одним из и
исследование
серман [597],
логического ра
перевод. Хейс
«структурного
анализа особе
О необходи
развития, изу
также Д. Хол
Большое з
высказываний
ностных качес
лежат в основ
В последн
гии получил
ный анализ. З
следованиях
Опубликован
Сущность фак
дающих факт
личными тест
тами корреля
показателями
шествуют в с
Это дает
делать, как
в выполнении
капитального
предупрежда
открытия леж
горий.
Самая ва
лиза — это

Тестология в капиталистических странах служит классовым интересам господствующих классов, доказывая низкий уровень умственных способностей детей трудящихся и особую одаренность детей господствующих классов.

В итоге всего сказанного приходится согласиться с Б. М. Тепловым, который писал, что тестология в целом не открыла пути к изучению индивидуально-психологических различий, «в научном отношении она оказалась бесплодной, а в сфере практического применения иногда и прямо вредной» [405, стр. 5].

В связи с тем что тестология изрядно скомпрометировала себя даже в глазах многих буржуазных психологов, в последнее время получают распространение и другие методы изучения умственного развития, интеллекта, способностей и одаренности.

Одним из интересных исследований подобного рода является исследование прогрессивного американского психолога Э. Хейссерман [597], книга которой, посвященная возможностям психологического развития ребенка, вышла совсем недавно в русском переводе. Хейссерман выдвигает принцип «педагогического» или «структурного анализа» психики ребенка, т. е. качественного анализа особенностей умственного развития детей.

О необходимости тщательного изучения личности, истории ее развития, изучения конкретных проявлений способностей пишут также Д. Холланд и А. Астин [610].

Большое значение начинает придаваться сбору и анализу высказываний ученых относительно тех интеллектуальных и личностных качеств, которые, по их мнению и собственному опыту, лежат в основе творческих способностей.

В последние несколько десятилетий в зарубежной психологии получил широкое распространение так называемый факторный анализ. За рубежом он применяется особенно часто при исследовании структуры интеллекта и структуры способностей. Опубликовано много работ, основанных на факторном анализе. Сущность факторного анализа заключается в выделении совпадающих факторов при корреляции результатов испытания различными тестами. Факторный анализ, оперируя с коэффициентами корреляций, выявляет те взаимосвязи и отношения между показателями тестов, которые непосредственно не видны и существуют в скрытом, замаскированном виде.

Это дает возможность, по мнению многих психологов, определить, какие психологические свойства и качества участвуют в выполнении соответствующей деятельности. Однако автор капитального труда по факторному анализу Н. Харман [604] предупреждает, что от факторного анализа нельзя ожидать открытия лежащих в основе факторов психологических категорий.

Самая важная и ответственная задача после факторного анализа — это психологически интерпретировать выделенные фак-

торы. Но далеко не все психологи считают, что такая интерпретация в психологических понятиях возможна и нужна. Л. Терстен считал, что она необходима, иначе выделение факторов теряет всякий смысл: «Задача интерпретации факторов, очевидно, есть самая важная часть факторного исследования» [717, стр. 337], [727, стр. 41—42].

Английские авторы (С. Берт, Ф. Вернон, Г. Томсон и другие) не считали возможным психологически интерпретировать факторы, сознательно оставаясь в рамках строго математического их значения. Они подчеркивали, что факторы — это математические и статистические абстракции, отражающие только факт корреляции между результатами группы тестов, и их нельзя идентифицировать с психологическими понятиями (см. Ф. Вернон [723, стр. 9], Г. Томсон [712, стр. 257]). Именно поэтому английские исследователи предпочитали символическое обозначение факторов, тогда как Л. Терстен обозначал их в терминах хорошо известных понятий. Думается, что частично правы и те и другие. Первые, несомненно, правы в своем требовании психологической интерпретации. Какой же иначе смысл для психолога имеет выделение факторов? Вторые же правы в том, что правильная, обоснованная интерпретация невозможна, поскольку мы остаемся в рамках только факторного исследования.

Английский психолог Ч. Спирмен еще в начале текущего столетия сформулировал закон «универсального единства интеллектуальной функции», который позволил ему утверждать, что в основе выполнения любого интеллектуального теста всегда лежат два фактора: один общий для всех тестов генеральный фактор (как фундаментальное свойство ума) и один специфический для каждого теста фактор. Хотя Спирмен и его последователи не отрицали наличия и некоторых групповых факторов (общих для определенной группы тестов), но считали роль их незначительной. Факторная модель Спирмена исходила из наличия только общего (g) и специфического (s) факторов и поэтому называлась бифакторной [690], [691], [692], [693].

В тридцатых годах выступил со своей теорией мультифакторного анализа американский психолог Л. Терстен. Свою теорию он последовательно развивал в ряде публикаций [716], [717], [718], [719], [720]. Автор исходит из отрицания наличия общего фактора (вернее, не из отрицания его, а из отрицания какого-либо интереса его для психолога) и признания многих групповых факторов.

Существует и так называемая иерархическая теория факторов (С. Берт, Ф. Вернон), признающая существование и спирменовского общего фактора g , и ряда групповых факторов (сначала выделяются два главных групповых фактора, соответствующих «вербальным» и «практическим» способностям, которые, в свою очередь, делятся на второстепенные групповые факторы).

и специфических факторов (см. А. Анастаси [514, стр. 327—328]).

Первоначально Л. Терстеном было выделено 12 групповых факторов — своего рода «первичных умственных способностей». Эти факторы таковы:

1. *S* — пространственный (оперирование геометрическими отношениями, манипулирование образами).

2. *P* — перцептивный (быстрота и точность зрительного восприятия).

3. *N* — вычислительный или цифровой (простые арифметические операции).

4. *V* — вербальный (словесные аналогии, словесные рассуждения).

5. *W* — словесная «беглость» (богатство словаря, богатство словесных ассоциаций).

6. *M* — ассоциативная память.

Были выделены также еще индуктивный и дедуктивный факторы. Часть факторов не была идентифицирована и не получила наименований. В дальнейшем был идентифицирован фактор *R* (способность к рассуждению).

С течением времени эта схема весьма усложнилась — многие факторы оказались сложной природы и были разделены («расщеплены») на несколько других, открывались новые факторы. К 1951 г. в сфере интеллекта насчитывалось уже около 20 факторов. И когда их сейчас выделено уже более пятидесяти (а предполагается, в соответствии с известной схемой, составленной Д. Гильфорд, что всего их будет минимум 120, а может быть много больше), то такая тенденция к дроблению интеллекта на бесконечное количество факторов должна насторожить. Американский психолог Л. Хамфрюс писал в 1962 г. о том все укрепляющемся мнении, что тесты могут почти бесконечно делаться все более специфичными, а, следовательно, факторы будут почти бесконечно дробиться или расщепляться [615]. Поэтому имеются все основания говорить об явном увлечении статистически формальной стороной дела в ущерб психологическому содержанию, о проявлении своего рода математического фетишизма.

Предпринятая зарубежными психологами попытка, сделать факторный анализ единственным методом анализа психологического материала при игнорировании психологического анализа процесса не оправдала себя. Четкого представления о психологической структуре умственных способностей мы не имеем, гипотетические структуры, перегруженные многими десятками факторов, представляют собой формальные конструкции, далекие от подлинно психологической теории и ничего не дающие практике.

Оценивая исследования зарубежных психологов, основанные на факторном анализе, мы должны разделить два вопроса —

оценить сам факторный анализ как метод математической обработки количественно выраженных результатов исследования и правомерность исследований, построенных только на факторном анализе и полностью игнорирующих качественное своеобразие процесса, приведшего к данному результату.

Конечно, нет никаких сомнений в большой ценности, которую представляет для психологии факторный анализ — этот очень остроумный математический аппарат, позволяющий вскрывать отношения, существующие в экспериментальном материале в скрытом от непосредственного наблюдения виде.

Иным должно быть, как нам кажется, отношение к большинству зарубежных работ, основанных на факторном анализе. Самым большим пороком этих работ, по нашему мнению, является попытка ограничить исследование факторным анализом, попытка психологически интерпретировать выделенные факторы без какого бы то ни было анализа процесса мышления, процесса решения экспериментальных задач (тестов), т. е. попытка решать психологические вопросы, оставаясь в рамках только факторного анализа и игнорируя психологическое содержание процесса. Ведь, по сути дела, единственным основанием для содержательной интерпретации факторов является рассмотрение вопроса о том, какие тесты имеют наибольшие веса по данному фактору. Правильно подчеркивал Б. М. Теплов, что из факторного анализа, как математического метода, не вытекает прямо содержательная интерпретация факторов [410]. Факторный анализ сам по себе не дает и не может дать понимания психологической природы найденных факторов. Но психолога должно интересовать именно это. Мы должны стремиться сделать нашу науку объективной, бороться с произвольностью интерпретаций, а в факторных исследованиях зарубежных психологов «остается все же немалый простор для субъективизма интерпретаций и выводов» (В. Д. Небылицын [309, стр. 45]).

Сочетание факторного анализа с качественным психологическим анализом необходимо еще и по следующим соображениям. Факторный анализ может с успехом применяться там, где обеспечена качественная однородность материала, как это было, например, при исследовании типологических свойств нервной системы (Б. М. Теплов, В. Д. Небылицын). При анализе же структуры высших и сложных способностей человека далеко не всегда такая качественная однородность может быть обеспечена. Разве все испытуемые качественно единообразно решают стандартные упражнения? В тестовом исследовании (это основа для факторного анализа за рубежом), как мы уже старались показать выше, качественная сторона подвергаемого обработке материала не принимается во внимание, хотя один и тот же результат может быть достигнут совершенно разными психологическими путями, т. е. может иметь абсолютно различную психо-

логическую
анализ проце
Таким обр
анализ може
сложных пси
таний его с
мером такого
ние В. И.
А. А. Смирн
чий в запоми

§ 2. в за

Как уже
за рубежом
работ проб
священа ли
щем состав

В иссле
вклад и та
в психолог
дающиеся

Известн
один из кр
также та
Н. Майер
математич

Большо
разнообра
ностей, в
Порой пол
противоре
(а иной р
ных резул

О пр
разумеет
начинать
мета иссл
но устано
матическ
в чем сх
что след
воению
стоятель
ности, с
и имею

логическую природу. Вот здесь-то и необходим качественный анализ процесса.

Таким образом, можно сформулировать вывод: факторный анализ может и должен применяться при анализе структуры сложных психологических явлений, но при обязательном сочетании его с психологическим анализом процесса. Удачным примером такого сочетания является, по нашему мнению, исследование В. И. Самохваловой, выполненное под руководством А. А. Смирнова и посвященное анализу индивидуальных различий в запоминании разных видов материала [368-а].

§ 2. Исследование математических способностей в зарубежной психологии

Как уже отмечалось, проблемам психологии способностей за рубежом посвящено большое количество работ. В этой массе работ проблемам собственно математических способностей посвящена лишь небольшая часть. Но и эта небольшая часть в общем составляет довольно значительное количество исследований.

В исследование математических способностей внесли свой вклад и такие яркие представители определенных направлений в психологии, как А. Бинэ, Э. Торндайк и Г. Ревеш, и такие выдающиеся математики, как А. Пуанкаре и Ж. Адамар.

Известный вклад в теорию математических способностей внес один из крупнейших психологов нашего времени Ж. Пиаже, а также такие психологи-эксперименталисты, как К. Дункер, Н. Майер и Л. Секей, хотя непосредственно в плане изучения математических способностей они исследований не вели.

Большое разнообразие направлений определило и большое разнообразие в подходе к исследованию математических способностей, в методических средствах и теоретических обобщениях. Порой полученные результаты как будто (или действительно) противоречили друг другу, иногда имела место различная (а иной раз и прямо противоположная) интерпретация полученных результатов.

Определение математических способностей. Разумеется, исследование математических способностей следует начинать с определения (пусть рабочего, схематического) предмета исследования. Попытки такого рода делались неоднократно, но установившегося, удовлетворяющего всех определения математических способностей не имеется до сих пор. Единственное, в чем сходятся все исследователи, это, пожалуй, мнение о том, что следует различать обычные, «школьные» способности к усвоению математических знаний, к их репродуцированию и самостоятельному применению и творческие математические способности, связанные с самостоятельным созданием оригинального и имеющего общественную ценность продукта. Детальнее на этом

сейчас останавливаться не будем, так как этот вопрос будет специально рассматриваться в последующих главах.

Большинство зарубежных психологов, имея в виду «школьные» (учебные) способности, склонны понимать их как способность к решению математических тестов или задач. Разумеется, такое определение не является сколько-нибудь содержательным и нуждается в конкретизации. Некоторые психологи указывали на некоторые фундаментальные психические свойства, лежащие, по их мнению, в основе учебных способностей к математике.

Еще в 1918 г. в работе А. Роджерс [680] отмечались две стороны математических способностей, репродуктивная (связанная с функцией памяти) и продуктивная (связанная с функцией мышления). В соответствии с этим автор построил известную систему математических тестов. В. Бетц [478, стр. 74] определял математические способности как способность ясного осознания внутренней связи математических отношений и способность точно мыслить математическими понятиями, А. Венцл [726] — как способность к установлению смысловых связей в математическом материале. А. Блэкуелл, публикуя в 1940 г. свое факторное исследование математических способностей [529], указывает, что эти способности можно интерпретировать как способности к избирательному мышлению в сфере количественных отношений (quantitative thinking) и дедуктивному рассуждению, как способность к применению общих принципов к частным случаям в сфере чисел, символов и геометрических форм. Литцман [638, стр. 4—9] указывает на способность рассуждать в определенной ситуации с использованием символов, характеризующих математический язык. Финский психолог Мейнандер говорит о математических способностях как о комплексном качестве, включающем интеллект, память, интересы, эмоционально-волевые факторы [727, стр. 11]. Это уже новая постановка вопроса, связанная с широким личностным пониманием способностей.

Известный психолог Г. Ревеш в книге «Талант и гений», изданной в 1952 г. [676], рассматривает две основные формы математических способностей — аппликативную (как способность быстро обнаруживать математические отношения без предварительных проб и применять соответствующие знания в аналогичных случаях) и продуктивную (как способность открывать отношения, непосредственно не вытекающие из имеющихся знаний).

Д. Ли опубликовал в 1955 г. статью о факторном исследовании специфики способностей к математике [634], где «способность преуспевать в математике» определяется как способность понимать (схватывать) основные понятия математики и манипулировать ими.

Наиболее содержательное и пространное определение «школьных» математических способностей принадлежит, как

нам кажется, шведскому ученому И. Верделину [727]. Мы еще будем иметь возможность подробно анализировать его исследование, тогда и приведем это определение. Сейчас укажем только, что оно касается и понимания, и запоминания, и применения школьниками математических символов и методов.

Большое единство взглядов проявляют зарубежные исследователи по вопросу о врожденности или приобретенности математических способностей. Если и здесь различать два разных аспекта этих способностей — «школьные» и творческие способности, то в отношении вторых существует полное единство — творческие способности ученого-математика являются врожденным образованием, благоприятная среда необходима только для их проявления и развития. Такова, например, точка зрения математиков, интересовавшихся вопросами математического творчества, — А. Пуанкаре [498] и Ж. Адамара [595]. О врожденности математического таланта писал и В. Бетц [478], подчеркивавший, что речь идет о способности самостоятельно открывать математические истины, «ибо понять чужую мысль могут, вероятно, все». В последние годы тезис о врожденной и наследственной природе математического таланта (который только развивается в упражнениях) усиленно пропагандировал Г. Ревеш [676], [677]. В одной из своих работ [677] Ревеш, ссылаясь на биографический метод, указывает, что «математические способности отца в большой степени определяют математические таланты его детей».

В отношении «школьных» (учебных) способностей зарубежные психологи не высказываются столь единодушно. Здесь, пожалуй, доминирует теория параллельного действия двух факторов — биологического потенциала и среды. До недавних пор и в отношении школьных математических способностей господствовали идеи врожденности. В двадцатых годах, например, доминировала точка зрения Э. Торндайка, который прямо и определенно высказывался на этот счет: «Заниматься алгеброй (элементарной! — В. К.) учащиеся могут успешно только при наличии определенного показателя теста умственного развития» [500, стр. 30], [715]. «Различие, обнаруженное в способностях детей... в весьма значительной степени обусловливается различием их прирожденных способностей. Если бы каким-нибудь чудом дети... получили все совершенно одинаковое воспитание с момента рождения... то все равно у них были бы обнаружены весьма большие колебания в способностях к арифметике, — вероятно, не меньшие, чем наблюдаемые в настоящее время» [503, стр. 296]. Более того, Торндайк говорил даже о прирожденных склонностях (интеллектуальном влечении и любознательности) к арифметике.

В начале тридцатых годов психологи А. Адлер, Е. Беке и В. Фогт опубликовали однотипные статьи [510], [525], [724],

где утверждалось, что способности детей к математике врожденные, что «готовность детей к математической абстракции сравнительно редка» (Фогт), что «доля людей, которые способны понять школьный курс математики, такова же, как доля людей, которые могут овладеть музыкой» (Беке). Правда, в этих статьях, особенно в статье Адлера, говорится и о влиянии среды, о роли учителя и методики обучения, работоспособности учеников, семейных «математических» традиций, но всему этому отводится второстепенная роль.

О врожденных способностях, которые являются в то же время и «относительным результатом тренировки», писали А. Роджерс [680], Л. Мензенкамп [655], К. Браун и Ф. Джонсон [535]. Они отмечали, что не от всех детей можно требовать высокой степени овладения математикой в школе, — ученики без врожденных способностей могут испытывать трудности в обучении математике.

В последние годы зарубежные психологи постепенно отходят от крайних позиций в этом вопросе. Иногда встречаются и весьма прогрессивные взгляды. Например, известный французский математик, педагог и методист А. Фуше [568] в своей книге «Педагогика математики» решительно выступает против представления о врожденном характере способностей к обучению математике. Он считает, что никакой математической природственной одаренности не существует; эта загадочная и мифическая способность — лишь предрассудок, приводящий к унынию детей, лишающий их веры в свои силы.

Основным вопросом в исследовании математических способностей (как учебных, так и творческих) за рубежом был и остается вопрос о сущности этого сложного психологического образования. В этом плане можно выделить три важные проблемы.

1. Проблема специфичности математических способностей. Существуют ли собственно математические способности как специфическое образование, отличное от категории общего интеллекта? Или математические способности есть качественная специализация общих психических процессов и свойств личности, т. е. общие интеллектуальные способности, развитые применительно к математической деятельности? Иначе говоря, можно ли утверждать, что математическая одаренность — это не что иное, как общий интеллект плюс интерес к математике и склонность заниматься ею?

2. Проблема структурности математических способностей. Является ли математическая одаренность унитарным (единым неразложимым) или интегральным (сложным) свойством? В последнем случае можно ставить вопрос о структуре математических способностей, о компонентах этого сложного психического образования.

3. Проблема типологических различий в математических способностях. Существуют ли различные типы математической одаренности или при одной и той же основе имеют место различия только в интересах и склонностях к тем или иным разделам математики?

Указанные проблемы решались разными путями.

Первый путь — это путь психологического наблюдения и эксперимента, интроспективного анализа процесса мышления при решении математических задач. Этот путь более характерен для французских и немецких исследователей. С развитием в психологии корреляционного и факторного анализа значение этого пути исследования заметно упало.

Второй путь — это путь корреляционного, а затем и факторного анализа. Это направление стало развиваться с начала XX в. и к настоящему времени заняло доминирующие позиции в психологическом исследовании способностей. Этот путь исследования способностей отличает американских и английских психологов. Назовем эти два пути условно «интроспективным» и «факторным» направлениями. Представители обоих направлений сдержанно-критически относятся друг к другу. Представители факторного направления упрекают своих оппонентов в увлечении интроспекцией, в недооценке или даже явном пренебрежении количественными методами исследования математических способностей, что, по их мнению, делает исследования неполными, а следовательно, и сравнительно малоценными (И. Верделин [727, стр. 52]). Оппоненты их не остаются в долгу, указывая на характерное для факторного направления увлечение статистическим анализом при исследовании такого сложного психологического явления, как математические способности, на отсутствие в их исследованиях подлинного психологического анализа (К. Струнц [702, стр. 181—183]).

По вопросу о специфике математических способностей, хотя и нельзя констатировать наличие единого мнения, но большинство ученых, среди которых такие крупные авторитеты в области психологии, как А. Бинэ, Г. Резен, и в области математики, как Ж. Адамар и А. Пуанкаре, явно склоняются в пользу признания специфичности математического таланта. Особенно противоречивы по этому поводу были мнения психологов факторного направления. Собственно говоря, различные мнения определялись различными взглядами на факторную структуру интеллекта.

Если, как считали Ч. Спирмен и его последователи, существует только общий генеральный фактор и специфические способности, необходимые для решения каждого типа тестов, а групповые факторы отсутствуют (либо их значением можно пренебречь), то ни о какой специфичности математических способностей в целом не может быть и речи. Другими словами, группо-

вой специфически-математический фактор отсутствует, и можно говорить лишь о проявлениях в математике общего фактора (общего интеллекта), и о проявлениях отдельных узкоспециальных арифметического, алгебраического и геометрического факторов (т. е., условно говоря, об отдельно взятых и независимых друг от друга арифметических, алгебраических и геометрических способностях, хотя психологи этого направления, как уже говорилось выше, избегали трактовать выделенные факторы со стороны содержания). При такой постановке вопроса и проблема структуры математических способностей трактуется как выявление тех сторон общего интеллекта, которые необходимы для математической деятельности.

Сторонники мультифакторной теории Л. Терстена, отрицая значение общего фактора, старались вскрыть те групповые факторы или «первичные умственные способности», которые лежат в основе того, что называется математическими способностями (так как, по их мнению, в основе любой деятельности лежат указанные выше первичные умственные способности в различных комбинациях).

Вопрос о специфичности математических способностей решается, конечно, в зависимости от того, о каких способностях идет речь — о творческих способностях или способностях к усвоению математики. Все, что будет говориться ниже, относится, в первую очередь, к творческим способностям.

А. Бинэ прямо и недвусмысленно указывал на то, что «математический ум предполагает совершенно специальную способность» [479, стр. 156]. А. Пуанкаре [498] и впоследствии Ж. Адамар [595] говорили о специфике мышления математика, о своеобразной, свойственной математикам «математической интуиции», о подсознательной творческой работе. Хотя Адамар и отмечал, что математическая одаренность и математическое творчество как-то связаны с общим интеллектом, творчеством вообще (упоминая в этом отношении о фактах связи математической одаренности с одаренностью в других областях), но он же указывал на частые случаи «ограниченности» математического ума. Это характерно, по мнению Адамара, и для «учебных» математических способностей; например, учащийся, первый в математике, нередко оказывается последним в других предметах [595, стр. 5]. Математику, конечно, нужно логическое мышление, писал Адамар, но своеобразное логическое мышление, логическое мышление в сфере математических объектов. Каждый ученый обладает логическим мышлением, но многие из них чувствуют в то же время непобедимое отвращение к цифрам и символам. Может ли каждый человек с хорошо развитым логическим мышлением, «сильным» интеллектом стать математиком? — спрашивает Адамар. И отвечает на этот вопрос отрицательно.

Защищал положение о специфичности математических способностей и В. Бетц, который так и делил людей на «математиков» и «нематематиков» [478, стр. 73].

Специфичности математического таланта, специфическим особенностям мышления математиков уделяет много места в своей работе 1940 г. Г. Ревеш [677]. Автор ставит вопрос следующим образом: является ли творческая форма математического таланта специфической, находящей себе применение лишь в определенной, а именно математической сфере деятельности, или мы можем рассматривать ее как особую форму всеобщего научного таланта? Ответ следует столь же определенный: Ревеш высказывает убеждение в том, что математический талант есть специфическая форма таланта, которую необходимо отличать от других форм научного таланта. Математический талант может проявляться вместе с другими талантами, но он органически не связан с ними; таланты к другим наукам возможны без математической способности и даже при абсолютном отсутствии последней. Далее, Ревеш особо подчеркивает, что специфический характер математического таланта признается всеми без исключения математиками, что они никогда не сомневаются в этом.

По-видимому, нельзя найти ни одной психологической работы последнего времени, в которой отрицалась бы специфичность математических способностей. Пожалуй, только одна работа является исключением. Немецкий психолог К. Струнц в опубликованном в 1962 г. труде «Педагогическая психология математического мышления» [702] выражает мнение, что математическая одаренность не специфическое понятие и что факторный анализ также не дает оснований говорить об особой математической одаренности — один и тот же фактор может проявляться во многих областях. Он подчеркивает, что «об особой одаренности можно говорить в связи с развитием общих способностей, проявляющихся в разных областях по-разному» [702, стр. 181]. К. Струнц пишет о том, что если признать специфическую математическую одаренность, то почему не признать, что существуют специфические арифметические, алгебраические способности или даже способности только к теории чисел. И тогда неясно, как далеко может пойти такая дифференциация. Далее, Струнц пишет, что об особой математической одаренности можно было бы говорить тогда, когда хорошие успехи в математике были бы связаны со значительно меньшими успехами в других науках (или наоборот), однако такие случаи, по его мнению, исключительно редки. Последнее замечание Струнца вызывает недоумение. Случаи несовпадения успехов в математике и в других науках далеко не так редки, и это обстоятельство говорит не в пользу концепции Струнца.

Вопрос о структурности математических учебных способностей принимал у психологов фактор-

ного направления прежде всего форму вопроса о том, существует ли один групповой математический фактор или же можно говорить о более дробном понимании — о групповых арифметическом, алгебраическом и геометрическом факторах, относительно независимых друг от друга. Иными словами, нужно ли говорить о математических способностях как об едином свойстве или правильнее говорить об арифметических, алгебраических и геометрических способностях.

Более ранние исследования указывали на отсутствие группового математического фактора. Отмечалось наличие общего генерального фактора и специфических факторов для арифметических, алгебраических и геометрических тестов.

Еще в 1909—1910 гг. К. Стоун [700] и независимо от него С. Куртис [553], изучая достижения в арифметике и способности к этому предмету, пришли к выводу о том, что едва ли можно говорить о математических способностях как об едином целом, даже в отношении арифметики. Стоун указал на то, что дети, искусные в вычислениях, часто отстают в области арифметических рассуждений. Куртис также показал, что возможно совмещение успешности ребенка в одной отрасли арифметики и его неуспешности — в другой. Отсюда они оба делали вывод, что каждая операция требует своей особой и относительно независимой способности.

Некоторое время спустя аналогичное исследование провел Г. Дейвис [554], поставивший своей задачей выяснить, имеется ли общая способность к арифметике или можно говорить о частных способностях по отношению к отдельным разделам арифметики. Результаты показали высокую корреляцию (около 0,70) успешности в разных разделах и операциях арифметики, что свидетельствовало, по мнению автора, в пользу первого предположения.

В. Винч [732] и С. Берт [541] в исследованиях, проведенных в это же время или чуть позже (1910—1917 гг.), сделали вывод, что имеется не только специальная форма способностей к арифметике, но и существует высокая корреляция между успешностью в отдельных областях математики. Однако авторы оставляли в стороне вопрос о наличии или отсутствии группового математического фактора.

Д. Коллар [551] поставил своей целью выяснить, существуют ли специальные арифметические способности как нечто специфичное и относительно независимое от алгебраических или геометрических способностей. Он сконструировал систему тестов, направленных на исследование трех основных сторон арифметики — знания правил, умения вычислять и умения решать арифметические задачи. Автор получил таблицу интеркорреляций с довольно высокими значениями, которая позволила ему предположить наличие умственного фактора, играющего роль во

всех видах арифметической деятельности, т. е. арифметических способностей.

Еще одно исследование подобного рода было проведено на 70 учащихся начальной школы Б. Мак-Аллистер в 1951 г. [651]. Автор выяснял вопрос, является ли способность к арифметике общей способностью, объединяющей все умственные операции, включаемые в арифметику, или можно говорить об относительно независимых специфических способностях по отношению к различным разделам арифметики. У автора не получилось определенных результатов, помимо того, что всюду «просматривался» общий фактор, который, по мнению автора, и лежит в основе арифметических способностей.

В 1910 г. была опубликована большая статья В. Брауна «Объективное исследование математических способностей» [533], где была исчислена корреляция между успешностью в различных отраслях математики. Она оказалась довольно высокой (0,79 — между арифметикой и алгеброй; 0,66 — между геометрией и алгеброй и 0,58 — между арифметикой и геометрией), но тем не менее автор говорит об отсутствии группового математического фактора и делает вывод о том, что арифметические, алгебраические и геометрические способности представляют собой относительно самостоятельные образования. По мнению В. Брауна, его данные показали, что алгебраические и геометрические способности связаны друг с другом лишь в той мере, в какой в основе и тех и других лежит способность к арифметике как способность к элементарным арифметическим операциям. Исследование В. Брауна было отправным для целого ряда подобных исследований, хотя и послужило объектом критики (например, Д. Ригли отмечал дефекты в технике его исследования).

Аналогично этому, групповой математический фактор не был, по существу, найден и в исследовании А. Роджерс [680], которая предложила специально составленную батарею тестов 114 детям (61 мальчику и 53 девочкам) в возрасте 12—16 лет. Получив коэффициенты корреляции, как правило, невысокие (от 0,01 до 0,59), А. Роджерс констатировала, что добытые ею результаты подтверждают мнение В. Брауна о том, что успешность в алгебре и геометрии определяется качественно различными свойствами и что нет свойства, которое лежало бы в основе математических способностей вообще [680, стр. 84].

Результаты А. Роджерс были почти через 10 лет вновь проанализированы Спирменом [691] с использованием факторного анализа. Он сделал попытку показать, что даже в тех отдельных случаях, когда у А. Роджерс получались довольно высокие корреляции в показателях по арифметическим и геометрическим тестам, нельзя говорить о наличии какого-то группового математического фактора. Эту же точку зрения Спирмен защищал в более поздних исследованиях [693].

Через несколько лет после исследования Роджерса было опубликовано исследование Л. Мензенкампа [655]. В этой работе показывалось, что алгебра и геометрия связаны с деятельностью различного вида и корреляция между показателями тестов на алгебраические и геометрические способности не превышает корреляции между каждым из них и вербальной способностью (коэффициент корреляции между алгебраическими и геометрическими способностями — 0,54, тогда как между алгебраическими и вербальной способностью — 0,57 и между геометрическими и вербальной способностью — 0,59.)

Автор ссылается и на другие исследования, которые показали, что алгебраические и геометрические способности не более коррелируют друг с другом, чем каждая из них со способностью к немецкому языку [655, стр. 159—160]. Автор делает отсюда вывод о том, что так называемый математический интеллект имеет сложную структуру, в которую, в частности, входит умение вербально выражать математические отношения.

В 1925 г. было опубликовано исследование А. Кеймерон [545], в котором заключались такие же выводы. Правда, и по поводу этого исследования Д. Ригли высказал сомнения в отношении валидности положенных в основу его тестов.

Слабым местом всех перечисленных исследований, по мнению критиков, было то обстоятельство, что в них не удавалось убедительно дифференцировать влияние общего фактора. Специальная попытка элиминировать общий фактор была сделана в работе Л. Фуракра [569], относящейся к 1926 г. Специально подобрав батарею из 11 тестов (в том числе несколько терстеновских тестов на пространственные отношения), автор вычислил коэффициенты корреляций и сделал вывод: «Если элиминировать фактор, определяемый общим интеллектом, то можно видеть, что связь между различными арифметическими тестами несомненно наводит на мысль о существовании специфических арифметических способностей, а связь между геометрическими тестами также наводит на мысль о существовании специфических геометрических способностей» [569, стр. 205]. Однако надо оговориться, что этот последний вывод автор сделал, сознательно приравняв понятия «геометрия» и «пространственные отношения» (все его геометрические тесты были исключительно тестами на «схватывание» пространственных отношений).

Выводы об отсутствии группового математического фактора получили дальнейшее подтверждение в цикле работ 1937—1940 гг., осуществленных с применением факторного анализа. В 1937—1938 гг. Х. Олдхем была опубликована работа «Психологическое исследование математических способностей» в двух частях [663], [664]. Исследовав 410 школьников (149 мальчиков и 261 девочку) в возрасте 9—15 лет тестами на интеллект, арифметику, алгебру и геометрию, автор получил корреляции: между

алгеброй и арифметикой — 0,60, между арифметикой и геометрией — 0,47, между алгеброй и геометрией — 0,59. Корреляции тестов на арифметику, алгебру и геометрию с тестами на интеллект оказались значительно ниже (соответственно — 0,40; 0,27 и 0,31). Х. Олдхем делает вывод об отсутствии сколько-нибудь значимого группового фактора, объединяющего тесты на арифметику, алгебру и геометрию, и о наличии специфических факторов отдельно для каждой группы (арифметической, алгебраической и геометрической) тестов. Указанная работа в отношении интерпретации результатов подверглась серьезной критике со стороны Ф. Вернона, М. Бараката и некоторыми шведскими психологами, в частности И. Верделином. Ф. Вернон указывал на недооценку автором общего (генерального) фактора, наличие которого якобы показало исследование. На неправильную интерпретацию результатов указывал и М. Баракат.

В это же время (1938 г.) была опубликована большая работа Ф. Митчелла «Природа математического мышления» [658], представляющая собой также факторно-аналитическое исследование (с использованием терстеновского центроидного метода) около 170 учащихся 13—16 лет. Ф. Митчелл сделал вывод с позиции иерархической теории о том, что математические способности — комплексное свойство, включающее общий (генеральный) фактор, групповые и специфические факторы. Вокруг этой работы развернулась острая дискуссия, которая касалась, главным образом, вопросов о том, правильно ли он интерпретировал выделенные им факторы. Особенно суровая критика последовала со стороны Д. Ригли [747], который указывал и на неудачный подбор тестов, и на погрешности в технике факторного анализа (в частности, на неудачно проведенную ротацию), и на ошибочную идентификацию общего фактора со спирменовским фактором g .

В 1940 г. опубликовал своё факторное исследование математических способностей (также с использованием терстеновского центроидного метода) А. Блэкуелл [529]. Это исследование автор провел на 200 учащихся (100 мальчиков и 100 девочек). Самое интересное — что он обнаружил различное число факторов при исследовании мальчиков (3 фактора) и девочек (4 фактора). К этому мы еще вернемся в дальнейшем. У тех и других был обнаружен общий фактор (подобный спирменовскому g) и ряд специфических.

Исследование А. Блэкуелла также подверглось критике и, по сути дела, с тех же позиций, что и исследование Ф. Митчелла. Подобная критика факторно-аналитических исследований является весьма характерной и очень ясно показывает их слабость. Критики обычно обрушиваются на два особенно слабых места такого рода исследований. Первое — это подбор тестов. Удачно ли они подобраны? Ведь от подбора тестов прямым обра-

зом зависят результаты исследований. И всегда, конечно, можно отыскать слабые места в любой системе (батарее) тестов, никогда нет и не может быть гарантии, что данная система является лучшей. Второе — интерпретация выделенных факторов. Почти всегда она спорна. Порой удивляет, что одни и те же результаты разными исследователями интерпретируются совершенно различным, а часто противоположным образом.

Несколько позже возникла другая точка зрения на наличие группового математического фактора. Первый намек на это содержится, пожалуй, в исследовании Б. Бакингема, относящемся к 1921 г. Бакингом изучал математические способности в их отношении к общему фактору — общему интеллекту [537]. Его вывод, основанный на изучении корреляций между показателями соответствующих тестов, гласит: способности к математике не связаны отчетливо с общим интеллектом. В среднем это отношение может быть оценено коэффициентом корреляции около 0,40 (с вариациями в различных случаях — 0,21—0,25—0,38—0,40—0,41 и т. д.). Автор отмечает, что обычные стандартные тесты, использующиеся для корреляционных исследований, рассчитаны отдельно на измерение успешности в различных математических предметах, в то время как существует общая математическая способность (по-видимому, групповой математический фактор). Показатели алгебраических и геометрических тестов относительно независимы друг от друга, но на каждый из них влияет и то, что можно назвать общей математической способностью.

В 1926 г. опубликовал исследование математических способностей В. Флэк [565]. Он создал тщательно продуманную батарею тестов и использовал ее для изучения 29 учащихся одного класса. Его результаты свидетельствовали как будто бы в пользу наличия группового математического фактора, так как «способности индивида в одной области математики были в общем хорошим показателем его способностей и в других областях математики» [565, стр. 49]. Но это исследование не сыграло особой роли, так как оно было построено на сравнительно небольшой группе учащихся, находящихся в одних и тех же условиях обучения.

В 1933 г. опубликовал свое факторное исследование Д. Вильсон [731]. Автор изучал корреляцию между успешностью в ряде школьных предметов — английском языке, французском языке, истории, географии, арифметике, алгебре, геометрии, охватив 371 ученика. Была обнаружена корреляция между английским и французским языками, а также явная корреляция между тремя математическими предметами — арифметикой, алгеброй и геометрией.

Во второй части исследования Вильсон взял других учащихся (110 чел.) и другой «набор» предметов, в частности англий-

ский язык, французский язык, алгебру, геометрию, ботанику и другие. Снова был обнаружен групповой фактор для математических предметов. Все это позволило автору сделать вывод, что имеется групповой математический фактор, «нагрузка» на который значительно больше, чем на фактор g . И это, отмечает автор, совершенно естественно, так как в материале алгебры и геометрии есть много общего с арифметикой, а в геометрии, например, используется алгебраическая символика.

В 1934—1935 гг. были опубликованы две работы Г. Хэмли, касающиеся функционального мышления в математике [599], [600], которые сыграли большую роль в отношении пересмотра некоторых методических положений в области преподавания математики в школе (идея о том, что функциональность должна быть центральным фактом обучения математике). Автор предложил своеобразную схему математического мышления. Он выделил три процесса или вида операций как главные компоненты (элементы) математического мышления: классы (классификация, деление материала на группы с одинаковыми характеристиками), порядок (вычленение преобладающего порядка внутри этих групп, т. е. содержательная характеристика этих групп), соответствие (выявление соответствия отношений между членами различных групп). Эти процессы, по мнению Г. Хэмли, характерны для действия на любом математическом материале, в то время как предложенные другие схемы математического мышления, например триада: эквивалентность (подобие) — функциональность — вывод — не имеют равного отношения ко всему математическому материалу (процесс усмотрения подобия связан с геометрией, функциональность больше связана с алгеброй и т. д.). Указанные процессы необходимо рассматривать на основных видах математического материала — арифметических числах, алгебраических символах и пространственных фигурах. Способность преуспевать в математике, по Г. Хэмли, соответствует способностям выполнять указанные выше операции на этих трех видах математического материала.

Д. Дженкинс [619] усовершенствовал эту схему, предложив включить в нее также понятие вариативности, процесс выявления которой должен предшествовать выделению групп. Схема Хэмли долгое время служила основой для построения батарей тестов, рассчитанных на исследование математических способностей.

В начале пятидесятых годов выступил в печати со своим факторным исследованием математических способностей М. Баракат [519], [520]. Автор изучил своим вариантом тестов 300 учащихся четырех грамматических школ. Ему удалось извлечь и идентифицировать 6 факторов: g (общий), V (вербальный), S (пространственный), N (вычислительный), M (память) и так называемый математический фактор, каждый из которых, по мнению

автора, играет определенную роль в математическом мышлении. Автор попытался показать, что математический фактор есть способность манипулирования математическими схемами и отношениями.

В это же время появились в печати и факторные исследования М. Хэмза [601], [602]. Он исследовал специально созданной им батареей тестов большие группы нормальных и отсталых в области математического развития детей. В основу его тестов были положены в соответствии с идеями Г. Хэмли [599] различные операции (классификация, упорядочивание и т. д.) над различным материалом (числовым, геометрическим, символическим и словесным).

Наличие группового математического фактора особенно четко, как кажется этому исследователю, может быть показано на группе отсталых в области математики детей; отсталость, как правило, проявлялась одновременно во всех трех математических предметах — арифметике, алгебре, геометрии.

О наличии группового математического фактора свидетельствует и факторное исследование Д. Ли, относящееся к 1955 г. [634]. Автор выбрал типичные, по его мнению, виды деятельности во всех трех математических предметах (вычисление процентов — в арифметике, решение квадратных уравнений — в алгебре и доказательство группы теорем об окружности — в геометрии) и сочетал их с четырьмя процессами по Г. Хэмли. Получилось 12 типов тестов. Исследовалось 100 детей различного возраста — учащиеся грамматических школ. Используя терстеневский центроидный метод, Д. Ли удалось выделить ряд «способностей», которые, по его мнению, в общем соответствуют описанной выше структуре математического мышления, носящей общематематический характер (так как она имеет одинаковое отношение ко всем отраслям школьной математики).

Попытаемся выделить и оценить в свете рассматриваемой проблемы некоторые факторы, имеющие, по мнению зарубежных исследователей, определенное отношение к математическим способностям.

1. Общий (генеральный) фактор g . Математические тесты имели обычно высокие веса по этому фактору. Отмечалась довольно высокая корреляция указанных тестов с тестами на общий интеллект (по Э. Торндайку — 0,55—0,70. Примерно такие же данные получены А. Роджерс, Д. Коллар, некоторыми скандинавскими психологами и другими исследователями). Но для вычислений в математике роль g минимальна (по некоторым данным корреляция между тестами на интеллект и тестами на вычислительные способности равна нулю или близка к тому). Все это дало основания некоторым исследователям считать, что математические способности составляют «центральную часть» общего интеллекта.

2. В ы ч и с л и т е л ь н ы й ф а к т о р N . По этому фактору наибольшие веса имеют арифметические тесты (Д. Эдкинс, К. Хользингер, Т. Келли, Э. Торндайк, Л. Терстен и другие). Считается, что этот фактор имеет значение как для скорости вычислений, так и для решения арифметических задач.

3. П р о с т р а н с т в е н н ы й ф а к т о р S (зрительный Vi). Есть предположения о связи $visual$ -тестов и геометрических тестов (не вполне доказанные). Ф. Митчел и А. Блэкуелл нашли незначимые факторные веса по Vi -фактору для математических тестов.

4. В е р б а л ь н ы е ф а к т о р ы V и W . Некоторые авторы (например, А. Роджерс) нашли, что математические тесты высоко коррелируют с вербальными. В частности, найдена высокая корреляция вербальных тестов с тестами на арифметическое рассуждение, с алгебраическими и геометрическими тестами. Данные других исследователей не показали значимых весов по вербальному фактору для математических тестов. Л. Мензенкамп указывает на такие корреляции: алгебраические и вербальные способности — 0,57, геометрические и вербальные способности — 0,59 [655, стр. 159]. Из этого автор делает вывод о важном значении способности выражать вербально математические отношения.

5. Ф а к т о р R (рассуждение). Этот фактор расчленяется рядом исследователей на несколько факторов (в частности, дедуктивный и индуктивный). Большинство авторов получили по математическим тестам высокие веса по индуктивному и дедуктивному факторам. Что касается собственно фактора R , то он имеет слишком общее и широкое значение (трактруется и как процесс мышления вообще, и как процесс решения задач посредством применения общих принципов, и как процесс решения задач, связанный с манипулированием символами и абстракциями в новых, необычных ситуациях, и т. д. (см. Д. Эдкинс и С. Лайэрли [509])). Но во всех случаях, конечно, ясно, что он должен играть решающую роль в структуре собственно математических способностей.

Примерно с сороковых годов вопросы способностей вообще и математических способностей в частности привлекли внимание скандинавских (в первую очередь — шведских) психологов, которые организовали ряд соответствующих факторно-аналитических исследований.

Самым значительным исследованием математических способностей, проведенным за последние годы, надо, несомненно, признать исследование шведского психолога Ингвара Верделина, опубликованное в 1958 г. на английском языке в его книге «Математические способности» [727]. Исследование это, проведенное с помощью факторного анализа (центридного метода Терстена), во всех отношениях является характерным для современного на-

правления исследований способностей в зарубежной психологии. Поэтому остановимся на нем подробнее.

Основной замысел автора заключался в том, чтобы, основываясь на мультифакторной теории интеллекта, проанализировать структуру математических способностей школьников, выявить относительную роль в этой структуре каждого из факторов, установленных предыдущими исследованиями психологов терстеновского направления, определить отношение математических способностей к общей интеллектуальной сфере. Рассматривая «школьные» математические способности как способности к решению различного рода задач, определяемые, в общем, многими условиями, в том числе отношением, интересами, Верделин принимает как отправное следующее определение математических способностей: «Математическая способность — это способность понимать сущность математических (и подобных им) систем, символов, методов и доказательств, заучивать, удерживать их в памяти и репродуцировать, комбинировать их с другими системами, символами, методами и доказательствами, использовать их при решении математических (и подобных им) задач» [727, стр. 13]. Верделин полагает, что в этом определении сочетаются репродуктивный и продуктивный аспекты, понимание и применение. Считая, что в одном исследовании трудно иметь в виду все аспекты математических способностей, автор решил ограничить свое исследование важнейшим, продуктивным аспектом (т. е. решением задач). Дальше Верделин делает замечание по поводу того, что на характере математических способностей школьников может сказываться метод обучения. «Мы не знаем,— пишет Верделин,— сказывается ли (и как именно) разный характер обучения на структуре математических способностей, но этот факт следует иметь в виду» [727, стр. 15]. Верделин указывает, что он будет исходить из практики обучения в современной шведской школе, которая ему хорошо известна.

Автор разбирает, далее, вопрос о сравнительной ценности и объективности измерения математических способностей учебными отметками учителей и специальными тестами и отмечает, что школьные отметки ненадежны, субъективны и далеки от настоящего измерения способностей, что различные учителя пользуются при этом различными критериями (у некоторых оценка имеет и «дисциплинарное» значение), что отметка есть «комплексный показатель». Верделин отдает предпочтение тестовым показателям. Разумеется, замечает он, «батареи» тестов должны быть сконструированы таким образом, чтобы показатели, полученные по этим тестам, были бы достаточно симптоматичными.

Будучи сторонником терстеновского направления, Верделин пишет о необходимости психологической интерпретации выделенных факторов, хотя тут же указывает на трудность этого, так

как факторы могут оказаться «функцией условий эксперимента», отражать опыт субъекта и т. д. «Факторы — гипотетические феномены, реальная природа которых не может быть выявлена», — пишет он [727, стр. 40]. Этим самым Верделин признает, что факторное исследование в его «чистом» виде не может раскрыть психологическую сущность выявленных факторов, — речь может идти только о более или менее удачной психологической интерпретации, психологическом осмысливании факторов, а от подобной интерпретации «мы не можем получить много информации» [727, стр. 47]. Тем не менее Верделин считает, что факторный анализ может более удовлетворительно ответить на вопрос о структуре математических способностей, чем это сделано во всех более ранних исследованиях без применения этого математического аппарата, в частности в интроспективных исследованиях. Однако тут же Верделин отмечает, что «интроспективный метод» может помочь решить проблемы, которые не может решить факторный анализ, — помочь интерпретировать результаты факторного анализа.

Исследуя математические способности, Верделин сконструировал батарею из 53 тестов, в которую вошли тесты ранее использовавшиеся другими исследователями, а также и созданные самим Верделином.

Часть тестов была отобрана по признаку наличия высокого веса по общему фактору g (например, «уловить закономерности данного числового ряда и продолжить его» или «вычеркнуть число, выпадающее из ряда»).

Другая часть тестов была отобрана Верделином по признаку наличия высокого веса по вычислительному фактору N (простые задачи на четыре арифметических действия, на составление и решение уравнений с одним неизвестным и т. д.).

Третья группа тестов имела высокие веса по вербальному фактору V (тесты на подбор синонимов и омонимов, на понимание словесной инструкции, определение категории, к которой можно отнести данное слово, и т. д.).

Четвертая группа тестов имела высокие веса по зрительно-образному фактору Vi (или соответственно пространственному фактору S) и связана с успешностью оперирования в уме двух- и трехмерными фигурами (например, как разрезать данное тело, чтобы получить тела, изображенные справа; нарисован один и тот же куб в разных позициях, стороны его обозначены буквами. Какими буквами обозначены невидимые грани?).

Пятая группа тестов отобрана по принципу наличия высоких весов по фактору рассуждения R (например, слева даны 4 фигуры, справа — 5 фигур; найти среди фигур справа ту, которая подходит в левый ряд пятой; определить, правильно ли сделан вывод из данного силлогизма; нахождение числовых, пространственных и словесных отношений).

Наряду с этим была выделена группа собственно математических задач. Задачи этой группы были подобраны Верделином в соответствии с его пониманием (и определением) сущности математических способностей к школьному усвоению математики. Несмотря на подчеркивание, что основное внимание автор будет уделять не репродуктивной, а продуктивной (творческой) стороне школьных математических способностей, подавляющее большинство задач этой группы ориентированы на выявление уровня математических знаний, умений и навыков (например, решить уравнение

$$x + \frac{3x-1}{5} = 1 - \frac{3+x}{15} :$$

решить задачу: «Основание треугольника 6 см, высота 8 см. Другой треугольник имеет ту же площадь, но высоту 3 см. Каково его основание?»). Поэтому трудно согласиться с автором, когда он уверяет, что его тесты «реально измеряют способности, имеющие фундаментальное значение в школьной математике» [727, стр. 110]. Автор, по-видимому, понимает продуктивную сторону математического мышления как умение решать стандартные задачи школьного курса математики.

Верделин сделал следующее предположение: если факторный анализ покажет, что значимые веса математических тестов и значимые веса тех или иных тестов первых пяти групп объединены одним определенным фактором, то этот фактор и занимает существенное место в структуре математических способностей. Если же эти две группы тестов сгруппируются по разным факторам, то соответствующего вывода нельзя будет сделать.

Для основного исследования Верделин выбрал 36 тестов и провел его на 217 учащихся 13—16 лет (основной контингент — 14—15 лет). Тесты предъявлялись индивидуально или в небольших группах. Были получены следующие результаты:

1. По фактору N математические тесты показали весьма малые веса.
2. По фактору V математические тесты имели небольшие веса.
3. По фактору V_i (или S) математические тесты не имели значимых весов.

Однако Верделин считает, что необходимо дальнейшее исследование этого вопроса, так как, возможно, имеют место разные типы математических способностей, не все из которых нашли отражение в его системе тестов.

Итак, все три упомянутые фактора (N , V и V_i-S) не имеют значимых весов, принадлежащих математическим тестам, и обнаруживают низкую корреляцию с фактором R , обозначенным как фактор математического рассуждения, о котором будет сказано ниже. (Фактор R был расщеплен Верделином на два фак-

тора: D — дедуктивный и R — фактор математического рассуждения.) Это значит, что собственно математические способности не связаны ни с вычислительной, ни с вербальной, ни со зрительно-пространственной способностью.

Значение веса дедуктивного фактора для математических тестов не очень ясно, хотя имеет место факт относительно высокой корреляции между факторами D и R (коэффициент корреляции — 0,56). Очень вероятно, отмечает Верделин, что дедуктивные способности весьма важны для школьной математики, но этот вопрос, по его мнению, еще требует особого исследования.

Наконец, фактор R (the general mathematical Reasoning) — общий фактор математического рассуждения — оказался тем фактором, который играет решающую роль в структуре математических способностей, — большинство тестов, объединяемых этим фактором, — математические, и все математические тесты имеют значимые веса по этому фактору. Верделин указывает, что он выделил еще один (шестой по счету) фактор, который ему не удалось психологически интерпретировать и который он склонен рассматривать как «остаточный» фактор.

В дальнейшем автор показал, что фактор R в отличие от других факторов хорошо коррелирует с общим g — фактором (коэффициент корреляции — 0,86). Это значит, что математическая способность, как ее понимает и определяет Верделин, имеет интеллектуальную основу общего характера.

Чтобы оценить валидность своего факторного исследования, Верделин решил найти величину корреляции между R и школьными оценками по математике. Корреляция оказалась достаточно высокой (от 0,53 до 0,81, а в среднем — 0,60—0,70), что, по мнению автора, показывает, что избранные им математические тесты действительно являются индикаторами математических способностей. По нашему мнению, факт подобной корреляции говорит совсем о другом: школьные оценки по математике (отметки, баллы), как известно, характеризуют уровень знаний, умений и навыков в области математики (для этого они и предназначены) и, следовательно, больше оснований утверждать, что математические тесты Верделина являются индикаторами не математических способностей, а знаний, умений и навыков в области математики.

А теперь мы можем подвести некоторые итоги и оценить, что может дать факторный анализ математических способностей сам по себе, без сочетания с психологическим анализом процесса.

Автор работы И. Верделин, безусловно, добросовестно провел весьма трудоемкое исследование (как известно, при 30 тестах надо вычислить 82 250 тетрадных различий), написал большую книгу. В результате же наши знания структуры способностей обогатились соображением, что в основе математических способностей лежит способность к математическому рассуждению. Вы-

вод, прямо скажем, не из сенсационных. Сказать это — значит, по сути дела, ничего не сказать. Выделена самая очевидная, самая глобальная (и в силу этого — самая неопределенная) способность, «наиболее сложный и неопределенный фактор» [В. Д. Небылицын — 309, стр. 58]. Эта «способность» еще нуждается в специальном изучении. Словом, там, где Верделин кончил, надо только начинать. В этом, конечно, не повинен факторный анализ. Все, что мог дать, он дал. Но совершенно необходимо было подчинить его психологическому анализу, сочетать его с анализом процесса решения задач. У Верделина эта сторона совершенно отсутствует. Нет даже попытки анализа процесса, нет ни характеристик, ни сколько-нибудь длительных наблюдений за детьми. По-видимому, известное разочарование чувствует и сам автор, когда он пишет: «Факторный анализ является в определенном смысле неглубоким, внешним, поверхностным... он должен сопровождаться экспериментальным интроспективным анализом» [727, стр. 148]. Верделин попробовал осуществить этот анализ в одном частном случае — при проверке своей гипотезы о том, что за вычислительным фактором N стоит способность к автоматизации рассуждений и что этот фактор отражает в высокой степени автоматизированный процесс без какого бы то ни было развернутого рассуждения. Однако при решении такого важного вопроса он основывался только на интроспекции. Школьники сами должны были оценивать, насколько более автоматизированно они решают одну задачу по сравнению с другой [727, стр. 177—185].

Последующие работы этого направления принципиально ничем не отличаются от более солидной по сравнению с ними работы Верделина и мало дают нового — так же происходит выделение различных факторов с попыткой оценить их значение в структуре математических способностей, так же игнорируется при этом сам процесс. Американский психолог Р. Колеман [550] в своем исследовании, опубликованном немного раньше исследования Верделина, также нашел, что вычислительные способности (N) и хорошая память (M) не имеют прямого отношения к математическим способностям, в какой-то степени их определяет дедуктивный фактор. Английский психолог Д. Ригли [747], исследуя с помощью факторного анализа структуру способностей к элементарной математике у учащихся грамматических и технических школ Англии и Северной Ирландии, обнаружил связь между математическими способностями и общим интеллектом, т. е. фактор g очень важен, по мнению Ригли, для успеха в школьной математике. Оказалось также, что различные отрасли математики (школьные предметы) связаны вместе более тесно, чем это ожидалось, если бы их «связывал» только фактор g . Это дало возможность установить наличие ясного группового фактора. В отличие от Верделина Ригли более определенно уста-

новил, что деятельность в области геометрии связана с S -фактором, а в арифметике — с N -фактором. Фактор N имеет малую связь с собственно математическими способностями. Результаты факторного анализа оказались примерно одинаковыми для разных типов школ и для школ разных стран (Англии и Северной Ирландии).

Р. Гагне и Н. Парадиз в своих работах, опубликованных в 1961—1962 гг. [572], [573], выявляют своего рода «факторы обучения математике» (т. е. факторы, влияющие на успех обучения математике) и пытаются на этой основе сформулировать принципы построения новых учебных программ (в частности, и для программированного обучения). Своеобразие этой работы заключается в том, что авторы попытались установить проявление упомянутых факторов даже в отдельных типовых учебных заданиях (сокращение алгебраических дробей, решение уравнений и т. д.).

Исследование М. Кейннизия [546], относящееся к 1962 г., было проведено на 150 учащихся. Использовалась батарея из 36 тестов. Было выделено 12 центроидных факторов. Кратко выводы сводятся к следующему: в основе математических способностей лежит способность к рассуждению с использованием символов. «Математические» мыслительные процессы связаны с умением делать выводы, организацией структур, манипулированием отношениями.

Анализ исследований математических способностей, выполненных с помощью факторного анализа, позволяет сформулировать следующий вывод: попытка выявить сущность и структуру математических способностей, используя метод тестов с последующим факторным анализом без сочетания его с психологическим анализом процесса, не оправдала себя. Сколько-нибудь четкого и содержательного представления о структуре математических способностей в результате такого одностороннего анализа мы не имеем. Гипотетическая «факторная» структура математических способностей оказалась аморфной, схематической и мало содержательной, вследствие чего ее теоретическая ценность и практическая значимость никак не соответствует затраченным на ее исследование усилиям.

Какой же рисуется структура математических способностей в не факторных исследованиях зарубежных психологов?

Надо сказать, что далеко не во всех работах, посвященных этой проблеме, структура (как ее понимает тот или другой автор) раскрывается полностью. В иных работах авторы не ставят такой цели, ограничиваясь указанием на отдельные компоненты. В одних исследованиях психологическая (формальная или содержательная) сторона выделенных компонентов ясна, в других речь идет о факторах, психологическая интерпретация которых порой неясна, порой спорна.

Одним из первых сравнительно содержательных интроспективных исследований структуры математических способностей было исследование П. Руте [683], выполненное около 50 лет назад, в котором автор выделил «функциональные части, образующие в совокупности математический талант».

Эти «функциональные части» представляют собой, по сути дела, особенности мыслительной деятельности, характеризующие человека, способного к математике. Проанализировав процесс решения учащимися ряда задач, автор выделяет следующие компоненты: 1) способность к абстракции; 2) способность к пространственным представлениям; 3) функциональный характер мышления; 4) способность к умозаключениям; 5) «чутье» на пространственные и арифметические отношения и 6) сильная способность к концентрации.

Указанные компоненты отражают, конечно, основные стороны математического мышления. Однако некоторые из них носят слишком общий (например, 1, 3 и 4 компоненты) или неопределенный (5 компонент) характер.

В двадцатых годах было опубликовано несколько работ также интроспективного характера, посвященных структуре математической одаренности. А. Кеймерон [545] выделила следующие факторы (компоненты): 1) способность анализа математической структуры и перекомбинирования ее элементов; 2) способность к сравнению и классификации числовых и пространственных данных; 3) способность применять общие принципы и оперировать абстрактными количествами; 4) сила воображения. В работе В. Коммерелл [628] указано на такие факторы, как: 1) ясное логическое мышление, правильное использование логических методов; 2) сила абстракции; 3) комбинаторная способность; 4) способность к пространственному представлению и оперированию пространственными образами; 5) критичность мышления, способность отказаться от ошибочных ходов мысли; 6) память. Г. Томас в работе «Математическая одаренность» [711] дифференцировал такие компоненты, как: 1) способность к абстракции; 2) способность к логическому рассуждению; 3) специфическое восприятие; 4) сила интуиции; 5) способность использовать формулы; 6) математическое воображение. Томас обращал внимание и на важность своеобразного «автоматизирования» рассуждения и операций с числами.

Недостатки указанных исследований довольно очевидны. Выделенные компоненты не представляют стройной упорядоченной системы, иные из них предельно общи, другие максимально неопределенны, сущность третьих вообще не ясна. И все-таки эти исследования представляют известный интерес как попытка, пусть во многих отношениях еще несовершенная, осознать особенности математического мышления, выделить отдельные компоненты математических способностей.

Большой вклад в исследование математических способностей внес известный американский психолог Э. Торндайк, опубликовавший в двадцатых годах целый ряд работ по психологии обучения алгебре и психологии обучения арифметике, важнейшие из которых были переведены на русский язык [500], [501], [502], [503], [713], [714], [715]. Общая концепция учения Торндайка в силу ее крайней механистичности и пронизанности фаталистическими идеями врожденности способностей являлась и является неприемлемой для советской психологии и педагогики (см. П. П. Блонский [42, стр. 595—599], А. А. Смирнов [383]), но конкретно-исследовательская часть его работ и некоторые его методические рекомендации представляют интерес до сих пор — см. статью Д. М. Маергойза [270]. В одной из работ [714] Э. Торндайк говорит о трудностях усвоения алгебры, связанных с непониманием детьми существа буквенных обозначений, о необходимости бороться с формальным заучиванием. Торндайк специально выделяет те функции, которые совершенствуются и развиваются в процессе усвоения арифметики, относя к ним понимание смысла чисел, понимание десятичной системы, понимание смысла всех четырех основных арифметических операций, понимание значения дроби, умение оперировать с числами (целыми и дробными), понимание диаграмм, общеупотребительных мер, терминов и символов и т. д. Этот длинный перечень является, по сути дела, перечнем знаний, умений и навыков, которые необходимо выработать у учащихся по мере прохождения ими программы по арифметике. Называть их свойствами или функциями, претендовать на то, что этот перечень вскрывает состав (строение) арифметических способностей, как это делает Торндайк, конечно, нет никаких оснований.

Упомянем работу Торндайка «Психология алгебры» [715], где автор дает массу всевозможных алгебраических тестов для определения и измерения способностей. Автор выделяет несколько алгебраических общих способностей, как-то: а) способность обращаться с символами; б) способность выбора и установления соотношений; в) способность к обобщению и систематизации; г) способность к надлежащему выбору существенных элементов и данных и д) способность приводить в систему идеи и навыки. Выделяются и непосредственные алгебраические способности: а) способность понимать и составлять формулы; б) способность выражать в виде формулы количественные соотношения; в) способность преобразовывать формулы; г) способность составлять уравнения, выражающие данные количественные отношения; д) способность решать такого рода уравнения; е) способность выполнять алгебраические вычисления; ж) способность графически выражать зависимость одной величины от другой и т. д. [500, стр. 113]. Ясно видно, что все «способности» второй группы и часть «способностей» первой группы являются не способностями

ми, а типичными умениями и навыками. По-видимому, автор и ставил своей задачей изучение знаний, навыков и умений, а не способностей, хотя и употребляет этот последний термин. Он так и пишет, что к концу каждого года обучения учащиеся должны овладеть рядом определенных «способностей», приобретенных в процессе школьного обучения алгебре. И в этой работе автор не ставит вопроса об индивидуально-психологических особенностях, которые способствуют успешному овладению алгеброй, хотя и упоминает о врожденных различиях в этом отношении.

Одно из наиболее интересных исследований структуры математического мышления провели В. Хаскер и Т. Циген, опубликовавшие свою работу в 1931 г. [596]. Они построили свою работу в основном на интроспективном методе. Многие последующие исследователи (особенно факторального направления) указывали в этой связи на малую доказательность целого ряда их положений (И. Верделин [727, стр. 50—51]).

Авторы прежде всего выделили четыре основных сложных компонента, составляющие «ядро» математического мышления: пространственный, логический, числовой и символический. Дальше они попытались каждый из этих компонентов разложить на более простые составляющие. Получилась такая схема:

А. Пространственный компонент.

1. Понимание пространственных фигур, образов и их комплексов (синтезов, гештальтов).
2. Память на пространственные образы (пространственные представления).
3. Пространственные абстракции (умение видеть у пространственных объектов общие признаки).
4. Пространственное комбинирование (понимание и самостоятельное нахождение связей и отношений пространственных объектов).

В. Логический компонент.

1. Образование понятий (типа «синус», «логарифм», «тензор» и т. д.) и понятийных абстракций.
2. Понимание, запоминание и самостоятельное нахождение общих понятийных связей.
3. Понимание, запоминание и самостоятельное выведение заключений и доказательств по правилам формальной логики.

С. Числовой компонент.

1. Образование числовых представлений.
2. Память на числа, числовые решения.

Д. Символический компонент.

1. Понимание символов.
2. Запоминание символов.
3. Операции с символами.

Схема эта является интересной, но, по-видимому, недостаточно продуманной. В частности, неясно отношение между составляющими разных компонентов. Например, в каком отношении находятся способность понимания символов и способность образования понятий типа «логарифм» или «тензор»? Вытекает ли первая из второй или наоборот?

Следующий цикл работ относится ко второй половине тридцатых годов. А. Блэкуелл [529] говорит о комплексной природе так называемой математической функции, которая включает в себя определенные компоненты — общий, наиболее важный компонент (способность к избирательному мышлению, в частности, к дедуктивному рассуждению в числовой и символической сферах, способность к абстракции и обобщению) и другие компоненты, которые описаны как способность к манипулированию пространственными объектами, вербальная способность, а также своеобразный компонент, который условно можно назвать «фактором точности и аккуратности», проявляющийся в способности сохранять в памяти данные в их точном и строгом значении.

Г. Хэмли также пишет о математических способностях как о составной (комплексной) функции, в которой основную роль, наряду с общим интеллектом, играет зрительное воображение, «способность понимать числовые и пространственные конфигурации и понимать каждую конфигурацию в виде своеобразной умственной модели» [600, стр. 28]. Ф. Митчелл в своей книге о природе математического мышления [658] перечисляет несколько процессов, которые, как можно предполагать, пишет он, характеризуют математическое мышление, в частности: 1) классификация; 2) способность понимать и использовать символы; 3) дедукция; 4) манипулирование с идеями и понятиями в абстрактной форме, без опоры на конкретное.

Упомянем и о нескольких работах, относящихся к пятидесятым годам.

К. Браун и Ф. Джонсон в статье, представляющей собой отчет о состоявшейся в США в 1952 г. конференции на тему «Пути выявления и воспитания учащихся с потенциями в науках» [535], пишут, что стандартизованные тесты, являющиеся главным инструментом для выявления потенций в математике, рассчитаны на измерение таких элементов этих потенций, как общий интеллект, способность к абстрактному рассуждению, пространственным представлениям, способность читать и понимать научный текст, способность к интерпретации отношений и другие. Авторы указывают, что учителя-практики вычленили те особенности, которые характеризуют учащихся с потенциями в математике, а именно: 1) экстраординарная память; 2) интеллектуальная любознательность; 3) способность к абстрактному мышлению; 4) способность применять знания в новой ситуации; 5) способность быстро «видеть» ответ при решении задач.

Г. Кепперс [624], ссылаясь на работу С. Лангер [632], упоминает о тех психических функциях, которые развиваются в результате изучения алгебры и без которых не может быть настоящего понимания математики. К ним он относит абстрактное мышление (узнавание, выделение общих свойств и отношений), способность рассуждать в проблемной ситуации.

Е. Дункан [560] отмечает, что на основании изучения результатов многих тестовых исследований можно сделать следующий вывод: помимо общего интеллекта, способные к математике учащиеся должны обладать развитым мышлением в сфере количественных отношений, сильным зрительным воображением, очень хорошей памятью, творческим подходом к науке, находчивостью.

Закljučая обзор работ зарубежных психологов, в которых содержатся данные о компонентах структуры математических способностей, следует заметить, что они не дают более или менее ясного и четкого представления о структуре математических способностей. К тому же надо еще иметь в виду, что в одних работах данные получены мало объективным интроспективным методом, а другие характеризуются чисто количественным подходом при игнорировании качественных особенностей мышления.

Обобщая результаты всех упомянутых выше исследований, мы получим самые общие характеристики математического мышления, такие, как способность к абстракции, способность к логическому рассуждению, хорошая память, способность к пространственным представлениям и т. д.

О зарубежных работах по диагностике и развитию математических способностей мы в этой книге говорить не будем. Этот вопрос будет освещен в нашей другой работе, подготовляемой к печати. Здесь мы рассмотрим еще только один вопрос — вопрос о типологии математических способностей.

Наиболее распространенной в зарубежной психологии является типология математических талантов, основанная на противопоставлении дискурсивного, развернутого во всех своих звеньях мыслительного процесса, интуитивному мыслительному процессу, связанному с непосредственным «схватыванием» необходимых отношений.

Еще Р. Декарт в своих «Правилах для руководства ума» [486] противопоставлял цепи последовательных логических умозаключений интуицию как непосредственное усмотрение связей и отношений между различными явлениями.

А. Пуанкаре впервые начал различать с этой точки зрения два типа математиков в зависимости от того, какой процесс в их математическом мышлении преобладает. Но едва ли правильно, как это делает Пуанкаре, соединять, хотя и с оговорками, понятия «интуитивный» и «геометрический» тип. У Пуанкаре интуиция выступает в разных планах — как малоосознанный и очень быстро протекающий процесс непосредственного усмотрения

необходимых связей и отношений и как процесс, тесно связанный с образными компонентами, пространственными представлениями. По-видимому, следовало бы «развести» эти два плана.

Ж. Адамар правильно отмечает, что деление Пуанкаре разумнее было бы относить не к различным областям математики (аналитический метод к алгебре, а интуитивный метод к геометрии), а к способу мышления. И аналитический (логический) и интуитивный типы (способы) мышления, вероятно, могут характеризовать мышление и «аналитико-алгебраиста» и «геометра». Адамар, по-видимому, склонен придавать терминам «аналитик» и «геометр» значения, близкие к павловскому сигнальному значению, — второй тип склонен к образному представлению, первый обходится без этого. С другой стороны, Адамар говорит о логическом и интуитивном математическом мышлении (и соответственно о двух типах математиков). «Логика» отличается значительно меньшим «удельным весом» бессознательного в мышлении, более узко направленная мысль, последовательность и ясная расчлененность мыслительного процесса. Мышление «интуитивиста» характеризуется значительно большим удельным весом бессознательного, более «рассеянной» мыслью, быстротой и сокращенностью («свернутостью») мыслительного процесса. Примерно под этим же углом зрения различает логический (рассуждающий) и интуитивный математические таланты и Г. Ревеш [677].

Определенный интерес с точки зрения психологии математических способностей представляют некоторые работы психологов-гештальтистов. Согласно гештальтистской теории процесс решения задачи заключается в преобразованиях, трансформациях, которые претерпевает исходная проблемная ситуация (человек по-разному воспринимает эту ситуацию) и которые, в конце концов, приводят к решению. Динамика ситуации и есть процесс мышления. Например, сложный процесс математического доказательства сводится к ряду переосмысливаний ситуации, причем психологи-гештальтисты игнорируют вопрос о том, какие мыслительные процессы ведут к тому. Гештальтпсихология подверглась у нас в СССР справедливой критике за то, что она сводила мышление к саморазвитию проблемной ситуации вне всякой деятельности субъекта мышления и игнорировала, по сути дела, влияние прошлого опыта человека (см. С. Л. Рубинштейн [353], А. М. Матюшкин [281]). Однако отдельные исследования психологов-гештальтистов представляют определенную ценность.

В частности, экспериментальные исследования К. Дункера, а также Л. Секея и Н. Майера, продолжающие в общем эту линию, ценны своей попыткой проанализировать отдельные звенья процесса рассуждения при решении мыслительных, в частности, математических задач, объяснить механизм продуктивного мы-

шления и высказать некоторые соображения по вопросу об индивидуальных различиях процесса решения задач и лежащих за этим индивидуальных особенностях мышления.

Несомненный интерес в этой связи представляет большая работа К. Дункера «Психология продуктивного (творческого) мышления» [487], особенно глава о процессах решения математических задач. Автор ставит вопрос: каким образом из проблемной ситуации возникает решение? Решение, отмечает Дункер, возникает из рассмотрения исходных данных задач под углом зрения требуемого, из ряда переструктурирований ситуации, вследствие чего и возникают моменты внезапного понимания. Дункер попытался раскрыть процесс решения математических задач на доказательство, анализируя решения испытуемыми задачи: «Делятся ли все числа типа 276 276, 591 591, 112 112 на 13?» Наиболее удачный путь к решению: испытуемый находит общую формулу таких чисел: $abcabc = abc \cdot 1001$ и рассматривает, делится ли 1001 на 13. Трактует этот процесс как последовательное переструктурирование данной проблемной ситуации, Дункер пытается найти условия, облегчающие такое переструктурирование. В процессе решения этой задачи он вводит 6 различных типов указаний — «намёков» и наблюдает, какие из этих указаний окажутся наиболее эффективными.

Дункер пытается сформулировать некоторые положения, касающиеся индивидуальных различий в области способностей к математике. «Очень вероятно, что глубочайшие различия между людьми в том, что называют... «умственной одаренностью», имеют свою основу в большей или меньшей легкости таких переструктурирований» [487, стр. 131].

Говоря о причинах того, что для многих людей («плохих» математиков) преобразования, необходимые для доказательств, связаны с большими трудностями, Дункер указывает на такое возможное объяснение: «Плохой математик не может легко осуществлять преобразование, потому что мыслимое им содержание является относительно неподвижным, жестким и поэтому с трудом поддающимся перестройке» [487, стр. 231].

Человек тем способнее, отмечает Дункер, чем большее число аспектов ситуации он может обозреть одним взглядом без длительной нащупывающей работы «распутывания» и чем различнее эти аспекты. У «нематематика» математический образ беден аспектами [487, стр. 146]. Дункер указывает также на индивидуальные различия в способности абстрагирования от отдельных перцептивных свойств, что необходимо для того, чтобы обнаружить общее в конкретном факте. Эту способность он рассматривает как один из факторов математического мышления [487, стр. 223—224].

Таким образом, свойствами мышления, которые являются условием успешности решения математических задач, Дункер

считает широту и гибкость мышления и способность абстрагироваться от конкретного содержания.

Н. Майер [489], [643], [644], пытаясь выяснить роль прошлого опыта в процессе решения задач, имея в виду задачи в широком смысле слова, вводит понятие «направленность мыслительного процесса» или «направленность решения», под которым он понимает особый конкретный подход к решению, возникающий у субъекта, в соответствии с которым происходит перекомбинирование данных задачи [489, стр. 262]. Майер подчеркивает, что, когда испытуемые не скованы привычным способом действия, они гораздо активнее ищут правильное решение, рассматривая различные подходы к нему. Привычный способ действия, указывает Майер, тормозит выработку правильного решения [643]. Таким образом, и Майер говорит о своеобразной гибкости мышления как предпосылке успешного решения задач.

В работе «Продуктивные процессы в обучении и мышлении» Л. Секей, отмечая, что решение какой-либо новой проблемы (задачи) зависит от структуры данной проблемной ситуации, указывает: «Существенная особенность продуктивных процессов... та, что субъект схватывает структурные соотношения в обобщенном виде... те, кто оказался способнее к такому генерализованному пониманию... оказались на высоте» [706, стр. 380]. Здесь, таким образом, речь идет о своеобразной способности к обобщению, имеющей большое значение в процессе решения различного рода задач. Хотя, подчеркиваем еще раз, психологи указанного направления и решали вопрос о механизмах продуктивного мышления с неправильных позиций, их экспериментальные данные и высказанные в этой связи соображения представляют определенную ценность для психологии математических способностей, так как указывают на некоторые особенности мышления, имеющие значение и для решения математических задач.

Определенное значение для психологии математических способностей имеют работы выдающегося психолога Ж. Пиаже.

Новейшая концепция мышления Пиаже не будет рассматриваться в этой книге, это не входит в нашу задачу. Мы здесь коснемся лишь некоторых ее сторон в связи с проблемой математического мышления, которой Пиаже также уделял внимание [493-а], [494].

Рассматривая мышление как познавательную деятельность, Пиаже придавал большое значение операциям как деятельности мыслящего субъекта. Знания конструируются в ходе мыслительной (познавательной) деятельности человека.

Л. Жоанно в своей работе 1947 г. «Математические рассуждения подростка» [620] в полном соответствии с концепцией Пиаже указывает, что при изучении математики нельзя отделить математические понятия от операций, посредством которых они образуются [620, стр. 54—56]. Например, из элементов 2 и 5 можно

составить, исходя из их размещения или наличия сопровождающего их графического элемента, следующие выражения: 25; 52, 2, 5; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{5}$; 2^5 и т. д. Каждое из них — это символическое вос-

произведение действий, и чтобы понять смысл каждого символического изображения, надо понять не только отдельные элементы, которые там фигурируют, но и, равным образом, смысл операций, произведенных с этими элементами и выраженных в различном их расположении или путем введения условных знаков. Поэтому ребенок, не знающий соответствующих операций, хотя и знакомый с цифрами, не поймет, что такое $\sqrt{5}$; 3^7 и т. д., если он не встречался с соответствующими операциями. Но он поймет, что это такое, если мы объясним ему, что под соответствующим графическим изображением скрывается ряд сложных операций, которые нужно осуществить. Таким образом, любое математическое выражение — это условное обозначение соответствующих операций, и ученики должны понять это.

Рассматривая стадии развития интеллекта в онтогенезе, Пиаже выделял стадию конкретных операций (операции, недостаточно формализованные, связанные с конкретными данными) и стадию обобщенных, формализованных операций, связанную с их организацией в структурное целое. Пиаже отмечал обратимость операций мышления, понимая под этим своеобразную подвижность ума в прямом и обратном направлениях, связанную с внутренним взаимоотношением операций между собой. Он указывал, что для каждой мыслительной операции существует такая, ей обратная, которая, исходя из результата первичной операции, может восстановить исходные данные. В частности, формирование алгебраических понятий связано с усвоением идеи обратимости операций. Пиаже соотносит свое учение об операторных структурах мышления со взглядами Н. Бурбаки¹ о трех фундаментальных структурах, на которых покоится здание математики, изложенными в статье «Архитектура математики» [481]. К этим структурам Бурбаки относит алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры [481, стр. 105—106]. В работе «Структуры математические и операторные структуры мышления» [491] Пиаже пишет о связи и соответствии математических структур и структур мышления. «Если проследить развитие арифметических и геометрических операций в сознании ребенка и особенности операций логических, то здесь мы находим все типы, которые в точности соответствуют математическим структурам», — пишет Пиаже [494, стр. 13]. Следовательно, в преподавании математики, по мнению Пиаже, должен иметь место своеобразный синтез между

¹ Н. Бурбаки — коллективный псевдоним группы французских математиков.

открытыми математиками математическими структурами и открытыми психологами операторными структурами мышления. К. Гаттеньо в своей «Педагогике математики» [484] показал, как можно конкретно реализовать установки Пиаже в преподавании математики, но анализ этого вопроса не входит в наши задачи.

В заключение этой главы уделим внимание своеобразному взгляду на процесс математического мышления, развитому в основном на материале самонаблюдения известными математиками — А. Пуанкаре и Ж. Адамаром и поддержанному некоторыми психологами (Г. Ревеш и другие).

Пуанкаре высказал свои взгляды на сущность математического творчества в 1908 г. [498], [670]. Работа Адамара была опубликована значительно позже — в 1945 г. [595]. Оба ученых-математика высказывают интересные мысли о «бессознательной» стороне математического творчества, которая, по их мнению, и является частым источником так называемого «озарения» — предпосылки к творческому решению математических проблем. Пуанкаре, ссылаясь на свой опыт, указывал на то, что математическое творчество связано с внезапным появлением в сознании готовых идей, причем справедливость этих идей усматривается непосредственно [498, стр. 11—13]. Он отмечал, что у него это всегда являлось результатом предшествующей напряженной осознанной умственной работы и непосредственным следствием последующей долгой бессознательной работы, когда сознание отвлекалось от задачи и было занято совершенно другим. «Участие этой бессознательной работы в математическом творчестве кажется мне неоспоримым» [498, стр. 14]. Пуанкаре склонен был придавать этой подсознательной работе не вспомогательное, а скорее основное значение. «Подсознательное «Я» играет главную роль в математическом творчестве... Оно успевает там, где сознательное «Я» потерпело неудачу» [498, стр. 16—17].

Помочь правильно понять природу «озарения» может многозначительное высказывание Пуанкаре о том, что «плодотворной бессознательной работе» всегда предшествует более или менее длительный «период предварительной сознательной работы» [498, стр. 20—21]. Подсознательное «Я», по Пуанкаре, «много говорит», но только часть (главным образом, полезная) «выходит в сознание». Почему? Пуанкаре дает такой ответ: математикам свойственно своеобразное эстетическое чувство (даже, скорее, своеобразный «эстетический инстинкт») — чувство математической красоты, изящества, гармонии чисел и форм. Выработанные подсознательным «Я» и не ведущие к цели комбинации бесполезны и в силу этого не действуют на это эстетическое чувство; полезные и нужные комбинации, наоборот, воздействуют на это чувство и поэтому привлекают внимание и переходят в область

сознания. Упомянутое эстетическое чувство, следовательно, играет роль своеобразного «решета» [498, стр. 20].

Проникнуть в сущность математического творчества попытался и Ж. Адамар. Считая, что некоторые факты, относящиеся к «эволюции подсознательных идей», описанные Пуанкаре, не носят всеобщего характера и относятся скорее к индивидуальным особенностям мышления некоторых математиков, Адамар тем не менее тоже указывает на многообразие проявлений бессознательного в творческом процессе. В подсознательной сфере происходит комбинирование многих идей. Только полезные комбинации осознаются; большинство из них (все, которые бесполезны) остаются неизвестными субъекту. В этой связи Адамар сочувственно относится к изложенным выше идеям Пуанкаре о роли чувства «математической красоты и гармонии». Однако Адамар стоит на более реалистических позициях, чем Пуанкаре. Во-первых, он отмечает, что границы сознания являются столь неопределенными, переходы от сознательного к бессознательному и обратно происходят так быстро и непрерывно, что невозможно сказать, что именно следует отнести за счет сознательной, а что за счет подсознательной работы. Во-вторых, Адамар считает, что то, что выглядит как «инкубация идей» и «озарение», после напряженной сознательной работы можно объяснить и «свежестью» мозга, отдыхом его после этой работы (в этой связи он вспоминает слова Гельмгольца, который говорил, что счастливые идеи никогда не приходят усталому мозгу). Нам думается, что это объяснение является правильным. Научная психология не может стоять на позициях мистического толкования процесса мышления, предложенного Пуанкаре. Верное истолкование подобных фактов дали, как нам кажется, А. Г. Ковалев и В. Н. Мясичев [174]. Они отмечают, что ход мыслительного процесса ученого может осознаваться не во всех своих звеньях. Ученому свойственно не только «развернутое» дискурсивное мышление, но и так называемое интуитивное мышление, протекающее в сокращенном, «свернутом» виде. Оно «усматривает или открывает существенные связи раньше, чем дискурсивное мышление успеет доказать их соответствие действительности» [174, стр. 132—133]. Это часто и воспринимается как бессознательная творческая работа.

Идеи «бессознательного» мыслительного процесса в творческом акте нашли своих сторонников среди психологов. К ним сочувственно отнесся А. Бинэ, «оформивший» взгляды А. Пуанкаре в некое подобие системы, установив определенные стадии творческого процесса; 1) период бесплодного сознательного обдумывания; 2) период отвлечения от работы, период отдыха или переключения на другую деятельность. В это время активно работает подсознательное мышление, происходит «инкубация» идеи; 3) внезапное «озарение», открытие истины в тот момент,

когда человек меньше всего думает о предмете; 4) снова сознательная работа над анализом и отшлифовкой идеи. О «подсознательной интуиции идей» упоминал и Г. Ревеш. В книге «Талант и гений» [676] он перечисляет 4 фазы творческого процесса: 1) подготовительная фаза (овладение материалом и концентрация мысли на творческой задаче); 2) инкубационная фаза — неосознанная работа еще неоформленной мысли; 3) творческая интуиция — нахождение принципа решения в еще неясной форме; 4) оформление творческого замысла.

М. Картрайт в работе «Математический ум», говоря об условиях продуктивной работы математика, упоминает о «бессознательной интуиции идей» [549, стр. 16—18] и об индивидуальных различиях в этом отношении. Американские психологи К. Тейлор и Ф. Баррон в своем сборнике «Научное творчество», опубликованном в 1963 г. [707], с помощью данных физиологии пытаются объяснить природу подсознательного мышления. Процесс мышления будет оптимальным, указывается в этой работе, если те части коры, где происходит «поиск», будут в это время защищены от интерференции поступающей извне новой информации, это будет означать, что мыслительный процесс одновременно протекает в двух планах — сознательном и бессознательном. Думается, это толкование не является убедительным, тем более что и вся упомянутая выше физиологическая концепция является лишь гипотезой.

Глава III

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ В РУССКОЙ ДОРЕВОЛЮЦИОННОЙ И СОВЕТСКОЙ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

В русской дореволюционной психологической и педагогической литературе можно найти лишь отдельные работы, посвященные психологии способностей вообще и психологии математических способностей в частности. Из работ русских авторов необходимо упомянуть оригинальную статью Д. Мордухай-Болтовского «Психология математического мышления» [300], опубликованную в 1908 г. Автор, специалист-математик, писал статью с идеалистических позиций, придавая, например, особо важное значение «бессознательному мыслительному процессу», утверждая, что «мышление математика... глубоко внедряется в бессознательную сферу, то всплывая на ее поверхность, то погружаясь в глубину... Математик не осознает каждого шага своей мысли, как виртуоз движения смычка» [300, стр. 507]. «Внезапное появление в сознании готового решения какой-либо задачи, которую мы не могли долго решить, — пишет автор, — мы объясняем бессознательным мышлением, которое... продол-

жало заниматься задачей... а результат всплывает за порог сознания» [300, стр. 505]. По мнению Мордухай-Болтовского, наш ум способен производить кропотливую и сложную работу в подсознании, где и совершается вся «черновая» работа, причем бессознательная работа мысли даже отличается меньшим погрешностью, чем сознательная [300, стр. 503–504]. Эти идеи созвучны идеям французского математика А. Пуанкаре, работа которого была опубликована в том же, 1908 г. [670].

Автор отмечает совершенно специфический характер математического таланта и математического мышления. Он утверждает, что способность к математике не всегда присуща даже гениальным людям, что между математическим и нематематическим умом есть существенная разница [300, стр. 492].

Большой интерес представляет попытка Мордухай-Болтовского выделить компоненты математических способностей. К таким компонентам он относит, в частности: а) «сильную память», оговариваясь, что имеется в виду «математическая память», память на «предмет того типа, с которым имеет дело математика», особенностью которой является память скорее не на факты, а на идеи и мысли (при этом «бытовая» память, музыкальная память могут быть посредственными); б) «остроумие», под которым понимается способность «обнимать в одном суждении» понятия из двух малосвязанных областей мысли, находить в уже известном сходное с данным, отыскивать сходное в самых отдаленных сферах, в, казалось бы, совершенно разнородных предметах; в) быстроту мысли (быстрота мысли объясняется той работой, которую совершает бессознательное мышление в помощь сознательному, бессознательное мышление, по мнению автора, протекает гораздо быстрее, чем сознательное). К сожалению, эти теоретические построения носят умозрительный характер и недостаточно подкреплены фактическим материалом (в основном используется самонаблюдение), что отмечает и сам автор [300, стр. 493].

Д. Мордухай-Болтовский высказывает также свои соображения по поводу типов математического воображения, которые лежат в основе разных типов математиков — «геометров» и «алгебраистов». «Арифметики, алгебраисты и вообще аналитики, у которых открытие производится в самой абстрактной форме прерывных количественных символов и их взаимоотношений, не могут воображать так, как геометр» [300, стр. 514]. Тут же высказываются ценные мысли об особенностях памяти «геометров» и «алгебраистов». К отдельным положениям статьи Д. Мордухай-Болтовского мы еще будем иметь повод вернуться, сейчас же только отметим ценность многих высказанных им положений.

Общим проблемам психологии способностей посвящен труд А. Ф. Лазурского «Классификация личностей» [236].

Более интересна для нас другая работа А. Ф. Лазурского, где он непосредственно касается вопросов математического мышле-

ния и математических способностей, — сборник «Естественный эксперимент и его школьное применение». В ней А. Ф. Лазурский предпринял интересную попытку выделить своего рода способности к изучению арифметики [235, стр. 168—169]. Анализируя процесс овладения арифметикой, он и его сотрудники выделили «некоторые психические функции, мало упражняемые на других предметах обучения», а именно: 1) систематичность и последовательность мышления; 2) отчетливость его; 3) способность к обобщениям; 4) сообразительность; 5) способность к установлению связи между приобретенными математическими знаниями и явлениями жизни и 6) память на числа. К сожалению, автор не вскрывает с достаточной полнотой психологическую сущность перечисленных «психических функций». Об этом говорится довольно бегло и лаконично, а о некоторых из этих «функций» (например, «сообразительности») только упоминается. Не говорится и о том, на основании чего автор выделил именно эти функции. Кратко, но содержательно даются указания об арифметических упражнениях, которые способствуют развитию некоторых из указанных психических функций. Говоря об упражнениях по развитию выделенных психических функций, А. Ф. Лазурский несколько раскрывает содержание соответствующих понятий. Так, например, систематичность и последовательность мышления сказывается в отчетливом и последовательном изложении хода решения, планировании решения, в решении примеров не по готовому правилу, рецепту (тогда как типические задачи решаются с помощью ранее усвоенных приемов, скорее механически, чем сознательным продумыванием хода их решения). Способность к обобщению дает возможность на ряде частных конкретных примеров прийти к осознанию общего правила и его формулировке. Способность к установлению связи между абстрактной мыслью и конкретными образами проявляются в возможности иллюстрировать правила конкретными примерами, придумывать задачи на эти правила. Наконец, под памятью на числа понимается не только память собственно на числа, но и память на числовые соотношения, память на арифметическую терминологию.

В двадцатых и начале тридцатых годов — в первоначальный период становления советской психологии — в исследованиях по проблеме способностей еще доминировали взгляды и тенденции, некритически заимствованные из распространенных в то время учений и концепций буржуазной психологии.

В эти годы в советскую науку и школу проникла так называемая педология, трактовавшая способности детей как наследственная педология, трактовавшая способности детей как наследственно закрепленные, неизменные особенности, фатально обуславливающие не только успеваемость детей, но и их трудовую и жизненную перспективу. Это было ни чем иным, как культивированием на нашей советской почве глубоко враждебных под-

линно советской психологии и педагогике принципов буржуазной науки. Антинаучная буржуазная педология, исходя из классовых интересов, «доказывала» особую одаренность представителей эксплуататорских классов и «высших» рас и духовную бедность и обреченность представителей трудящихся классов и «низших» рас. Разумеется, некритическое заимствование и перенесение в нашу психологию и педагогику даже некоторых идей буржуазной педологии при всех оговорках и «поправках» нанесло советской науке и школе большой вред.

После известного постановления Центрального Комитета нашей партии от 4 июля 1936 г. «О педологических извращениях в системе наркомпросов», которое ликвидировало педологию и полностью восстановило в правах педагогическую науку, перед советскими психологами возникла задача коренного пересмотра основных положений науки и очищения ее от всякого рода антинаучных теорий. Это несколько задержало развитие экспериментальных методов исследования способностей. К тому же часть психологов пришла к противоположной крайности и стала отрицать вообще всякую необходимость поисков экспериментальных методов изучения способностей детей, не говоря уж об объективных психологических методах их диагностики, самая мысль о возможности которых объявлялась враждебной духу научной психологии.

Советская теория способностей создавалась совместным трудом виднейших советских психологов, из которых в первую очередь надо назвать Б. М. Теплова [408], [409], [412], [413], а также Л. С. Выготского [76], [77], А. Н. Леонтьева [257], [258], [259], С. Л. Рубинштейна [351], [352], [354], [355], [356], [357], [358] и Б. Г. Ананьева [19], [20], [21], выдвинувшего в последние годы важную идею исследования развития способностей в единстве с многообразием свойств личности. В последние годы успешно разрабатывают проблему способностей А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев [170], [171], [172], [173], [301], [302], [303], [304], [305].

Помимо общетеоретических исследований проблемы способностей, Б. М. Теплов своей монографией «Психология музыкальных способностей» [411] положил начало экспериментальному анализу структуры способностей к конкретным видам деятельности. Значение этой работы выходит за рамки узкого вопроса о сущности и структуре музыкальных способностей, в ней нашли решение основные принципиальные вопросы исследования проблемы способностей к конкретным видам деятельности. Вопреки традиционному подходу проблема способностей стала трактоваться как проблема прежде всего качественная, а не количественная. Это определило новый принципиальный подход к методике исследования способностей: основное внимание должно быть направлено на то, чтобы выявить качественное своеобразие спо-

способностей к различным видам деятельности и качественные индивидуально-психологические различия людей, проявляющих способности к одному и тому же виду деятельности.

За этой работой последовали аналогичные по идее исследования способностей к изобразительной деятельности, осуществленные В. И. Киреенко [168] и Е. И. Игнатьевым [142], исследования литературных способностей (А. Г. Ковалев [172]; В. П. Ягункова [468]), педагогических способностей (Н. В. Кузьмина [228], Ф. Н. Гоноболин), конструктивно-технических способностей (П. М. Якобсон [472]; Н. Д. Левитов, В. Н. Колбановский [176-а]) и, наконец, математических (В. А. Крутецкий).

Другое направление исследований в области способностей (тщательное описание и изучение индивидуальных случаев детской одаренности) открывает работа Н. С. Лейтеса «Склонность к труду как фактор одаренности» [254]. Исследование этих случаев позволило Н. С. Лейтесу выделить основополагающий фактор одаренности — склонность к интенсивному труду, к умственному напряжению, все исследованные им одаренные школьники отличались повышенной потребностью в умственной деятельности.

Известное отношение к проблеме умственных способностей (в том числе математических) имеют исследования закономерностей мышления, вскрывающие механизм процесса рассуждения, начатые под руководством С. Л. Рубинштейна [352], [353].

До теоретических исследований и обобщений С. Л. Рубинштейна мышление в советской психологии рассматривалось в основном как оперирование уже сложившимися обобщениями и способами действий. С. Л. Рубинштейн показал, что задача заключается в исследовании самого процесса обобщения, самого процесса «поиска», в исследовании способности самостоятельно приходить к новым обобщениям (это и лежит в основе умственных способностей). С. Л. Рубинштейн ставит задачу изучать не итоги мыслительной деятельности, не результат ее, а сам процесс, который приводит к этому результату.

Под руководством С. Л. Рубинштейна выполнено много исследований, раскрывающих механизм процесса мышления при решении задач, дающих характеристику процессов анализа, синтеза и обобщения. К. А. Славская [379], [380], [381], изучая решение геометрических задач старшеклассниками и взрослыми, показала, что за «переносом» решения с одной задачи на другую стоит синтетический акт соотнесения обеих задач и включения их в единую аналитико-синтетическую деятельность. А. М. Матюшкин [280], [282], [283] исследовал роль анализа в формировании обобщения отношений (на позиционных системах счисления).

Исследования С. Л. Рубинштейна и его сотрудников (Л. И. Анцыферовой, А. В. Брушлинского, Е. П. Кринчик,

Н. А. Мансурова, А. М. Матюшкина, К. А. Славской) позволили выделить и тщательно изучить две качественно-различные формы анализа — так называемые «анализ-фильтрацию» и направленный анализ через синтез.

Ряд экспериментальных исследований мышления был проведен под руководством А. Н. Леонтьева [256]. Выяснялись некоторые вопросы творческого мышления, в частности, как человек приходит к идее решения задачи, способ решения которой прямо не вытекает из ее условий. Экспериментально исследовались некоторые условия возникновения «догадки», «озарения», например роль «наводящих» упражнений. Была установлена интересная закономерность: эффективность упражнений, подводящих к правильному решению, различна в зависимости от того, на какой стадии решения основной задачи предъявляются вспомогательные упражнения.

Все перечисленные исследования проливают свет на природу и предпосылки возникновения «догадки», «сообразительности» — категорий, которые, по всеобщему мнению, характеризуют мышление человека с высоким уровнем умственных способностей.

Следует отметить и еще одно важное направление в советской психологии мышления, имеющее отношение к проблеме способностей. Представители этого направления исходят из известных высказываний И. П. Павлова о том, что образование временных связей (ассоциаций) — это и есть понимание, знание, мышление, что все обучение заключается в образовании временных связей.

В такой трактовке учебный процесс есть формирование и функционирование огромного многообразия ассоциаций и их систем, находящихся в сложном взаимодействии, а «учебные» способности (в частности, к математике) — это способности к образованию различного типа и вида ассоциаций. Задача исследования — изучить это многообразие связей, их состав, дать классификацию ассоциаций, изучить законы их образования.

Анализируя под углом зрения теории ассоциаций процессы рассуждения при решении алгебраических задач, П. А. Шеварев [440], [441], [442], [443], [444], [445], [446] сделал важный вывод, что по мере овладения процессом математического рассуждения, умением, навыком решать математические задачи учащиеся перестают осознавать то или иное правило, действуя, однако, в точном соответствии с ним. Постепенно процесс рассуждения сокращается, «свертывается», иногда вплоть до его полного выключения, хотя он и продолжает лежать в основе выполняемых операций. В интерпретации учения об ассоциациях это есть замыкание обобщенных, «правилосообразных» связей, наличие которых упрощает и ускоряет процесс решения. Обобщенными эти ассоциации названы потому, что они актуализируются во всех сходных случаях, отличающихся по своим конкрет-

ным признакам, это связи внешне разных элементов, но имеющих общие свойства. Правилосообразными они названы потому, что каждая такая ассоциация соответствует определенному правилу, вследствие чего ее актуализация дает такие же результаты, что и применение правила — субъект действует согласно правилу, в то же время не сознавая его. «Свернутые» умозаключения и есть актуализация таких связей. Быстрота и качество процесса рассуждения, соображения при решении задач находятся в прямой связи с наличием и функционированием «свернутых» умозаключений. Все это исчерпывающим образом показано и на анализе процесса решения арифметических задач Н. А. Менчинской [289], [290], [291].

В направлении выделения и анализа различного рода связей, лежащих в основе процесса решения разного рода задач, шли исследования Н. Ф. Талызиной [401] и А. В. Степанова [393] на материале геометрии, Л. П. Доблаева [114] на материале составления и решения уравнений. Н. Ф. Талызина выявила наличие двух типов ассоциаций. К ассоциациям первого типа относятся те ассоциации, актуализация которых приводит к выяснению особенностей, присущих данным геометрическим фигурам и их элементам. К ассоциациям второго типа относятся те, актуализация которых приводит к нужному для решения действию. Л. П. Доблаев выделил связи, названные им «срочными», устанавливающиеся и действующие в течение определенного времени решения данной задачи. А. В. Степанов сделал попытку показать, какие ассоциации обуславливают так называемое математическое развитие учащихся. Исследуя процессы решения учащимися задач на доказательство, он пришел к выводу, что в основе более высокого уровня математического развития лежит легкость замыкания и возможность актуализации так называемых «межкустовых» ассоциаций, объединяющих учебный материал из разных разделов школьного курса.

Как конкретно осуществляется процесс свертывания, за счет чего происходит сокращение процесса рассуждения? Эти вопросы получили детальное освещение в работах Н. К. Индик [145], А. Н. Соколова [387], [388], а также в уже упомянутых исследованиях Н. Ф. Талызиной и Л. П. Доблаева. Было показано, что в первую очередь «выпадают» об ос нов ы в а ю щ и е элементы рассуждения (те элементы рассуждения, которые объясняют, почему надо действовать так, а не иначе) и дольше всего удерживаются в сознании оперативные элементы рассуждения, непосредственно связанные с операциями, реализующими теоретические положения по отношению к условиям данной задачи (отвечающие на вопрос что и как надо делать).

В более широком плане исследует ассоциативную природу умственной деятельности Ю. А. Самарин [362], [363], [365]. Ю. А. Самарин дал классификацию ассоциаций на основе прин-

ципа системности (объединения ассоциаций в системы различного уровня). Он выделил и изучил «локальные» ассоциации как элементарные связи между отдельными явлениями, «ограниченно-системные», существующие в границах отдельной темы или раздела школьного курса, «внутрисистемные», осуществляющие систематизацию ассоциаций по тому или другому признаку, и «межпредметные» или «межсистемные», образующиеся на основе изучения различных учебных предметов.

Несколько особое значение имеет выполненное под руководством П. А. Шеварева исследование Б. Б. Коссова [490]. Автор обнаружил, что пресобладание первой сигнальной системы затрудняет некоторые действия испытуемых «первосигнальников» при решении алгебраических задач (в частности, при варьировании несущественных признаков в однотипных примерах), в то время как испытуемые с преобладанием второй сигнальной системы не испытывают таких затруднений.

Проблемой умственного развития в течение последних лет успешно занимается Н. А. Менчинская с группой своих сотрудников. Эти исследования исходят из положения, сформулированного Д. Н. Богоявленским и Н. А. Менчинской о том, что умственное развитие связано, во-первых, с накоплением систем ассоциаций (фонда знаний) и, во-вторых, с накоплением своего рода фонда хорошо отработанных и прочно закрепленных умственных приемов, которые можно отнести к интеллектуальным умениям.

В этой группе исследований по психологии обучения с различных точек зрения анализируются умственные операции школьников в процессе решения разнообразных учебных задач. Изучаются основные операции мышления — анализ и синтез, абстрагирование и обобщение, выделяются их уровни. Одной из последних работ этого типа была работа Г. П. Антоновой [30], [30-а], выделившей на основании изучения процесса решения арифметических и иных задач младшими школьниками три уровня аналитико-синтетической деятельности (связанные с уровнем продуктивного мышления).

Эти три уровня соответствуют по терминологии Н. А. Менчинской элементному, комплексному и предвосхищающему уровням анализа. В основе этих уровней лежит характеристика: 1) связи между анализом и синтезом; 2) средств, с помощью которых осуществляются эти процессы, и 3) степени полноты анализа и синтеза.

Наряду с исследованием уровней анализа и синтеза в процессе решения задач сотрудники Н. А. Менчинской изучают и умственные приемы как системы операций, специально формируемые для решения задач определенного типа в пределах одного школьного предмета или для широкого круга задач из разных областей знаний. В качестве показателя мыслительной активности школьников выступает перенос операций, приемов и их си-

стем. Наиболее целеустремленно работают в этом отношении Е. Н. Кабанова-Меллер [148], Д. Н. Богоявленский [43], [44], [45] и С. Ф. Жуйков [127]. В частности, Е. Н. Кабанова-Меллер [148] разрабатывает не только частные, но и общие приемы умственной деятельности, что стоит в прямой связи с проблемой умственного развития и умственных способностей. В качестве показателей умственного развития учащихся автор выдвигает широкий и активный перенос приемов умственной деятельности. Условием умственного развития Е. Н. Кабанова-Меллер считает формирование приемов, обобщенных «межпредметным путем» [147-а].

Интерес, с нашей точки зрения, представляют и исследования процесса обобщения, проводимые Н. А. Менчинской и рядом других психологов, в частности процесса подведения арифметической задачи под известную категорию или уже известный тип. Н. А. Менчинская [291] показала, что узнавание типа задачи связано с вычленением ее существенных признаков и абстрагированием их от несущественных признаков. Выделение общего типа отношений величин и отнесение задачи к определенному типу зависит как от особенностей самой задачи, так и от того, насколько учащиеся владеют понятием о данном типе задачи. З. И. Калмыкова [154], [155], [156] исследовала процесс формирования понятия о типе задачи в результате решения ряда однотипных задач с постепенным вычленением и обобщением их существенных признаков и ведущего принципа решения. Изучая индивидуальные особенности процесса подведения арифметических задач под тип, В. Л. Ярощук [475], [476] констатировала, что причина различий между учащимися в успешности решения задач лежит главным образом в умении подвести задачу под известный тип.

Прямое отношение к проблеме способностей имеет серия исследований Л. Н. Ланды. В одной из первых работ этой серии — «О некоторых недостатках изучения мышления учащихся» [240] — Л. Н. Ланда ставит вопрос о необходимости раскрыть психологическую природу, внутренний механизм «умения думать». Воспитать способности, по мнению Л. Н. Ланды, значит «обучить технике мышления», сформировать умения и навыки аналитико-синтетической деятельности. В другой своей работе — «Некоторые данные о развитии умственных способностей» [238] — Л. Н. Ланда обнаружил существенные индивидуальные различия в усвоении школьниками нового для них метода рассуждения при решении геометрических задач на доказательство — различия в количестве упражнений, необходимых для овладения этим методом, различия в темпе работы, различия в формировании способности дифференцированного применения операций в зависимости от характера условия задачи и, наконец, различия в усвоении операций.

Другой цикл работ Л. Н. Ланды был посвящен обучающему эксперименту — формированию у учащихся VII—VIII классов метода рассуждения, умения самостоятельно доказывать геометрические теоремы, рационально мыслить [237], [239], [241], [242], [243], [244]. В этих работах нас интересует не только вывод о возможностях такого обучения, но и тот факт, что и здесь обнаружились существенные индивидуальные различия, которые, вероятно, могут быть, если и не целиком, то частично отнесены за счет различия в способностях учащихся.

Большое значение для теории умственных способностей вообще и математических способностей в частности имеют исследования Д. Б. Эльконина и В. В. Давыдова [110], [460], [461], Л. В. Занкова [129], А. В. Скрипченко [375], [376]. Все эти исследования свидетельствуют о гораздо больших, чем считалось до сих пор, умственных возможностях младших школьников в процессе обучения, в том числе обучения математике.

Обычно считается, что мышление детей 7—10 лет имеет конкретно-образный характер, отличается малой способностью к отвлечению и абстрагированию. Опытное обучение, осуществляемое под руководством Д. Б. Эльконина и В. В. Давыдова, показало, что уже в I классе при специальной методике обучения возможно дать ученикам в буквенной символике, т. е. в общем виде, систему знаний об отношениях величин, о зависимостях между ними, ввести их в область формально-знаковых операций. А. В. Скрипченко показал, что у учеников III—IV классов при соответствующих условиях можно сформировать умение решать арифметические задачи путем составления уравнений с одним неизвестным. Однако приходится констатировать, что проблема индивидуальных различий (именно эта проблема и является одной из основных проблем психологии способностей) находится за пределами научных интересов упомянутых исследователей.

Представляет интерес и еще одно направление в психологии обучения, связанное с теорией умственных действий П. Я. Гальперина, разработанной на основании идей Л. С. Выготского и А. Н. Леонтьева. Согласно этой идее в онтогенетическом развитии человека необходимо совершаются процессы интериоризации действий — постепенного преобразования внешних действий во внутренние, умственные. Первоначально ребенок имеет дело с внешним действием. «Лишь затем в результате постепенного его преобразования — обобщения, специфического сокращения его звеньев и изменения уровня, на котором оно выполняется, происходит его интериоризация, т. е. превращение его во внутреннее действие, теперь уже полностью протекающее в уме ребенка» (А. Н. Леонтьев [259, стр. 304]).

Созданная на этой основе П. Я. Гальпериным теория и методические принципы формирования умственных действий в процессе обучения [78], [79], [80], [81], [82], разрабатываемая так-

же Н. Ф. Талызиной [399], [400], [402], [403], ставится ими в связь с организацией управляемого обучения, т. е. организацией управления процессом формирования как знаний, так и действий.

Высоко ценя идею замысла и практические результаты применения теории формирования умственных действий, мы все же хотели бы отметить тот бесспорный, по нашему мнению, факт, что эта теория оставляет в стороне проблему индивидуальных различий, а следовательно, и проблему способностей.

П. Я. Гальперин и его сотрудники формально не отрицают категорию способностей. В своих «Разъяснениях к гипотезе умственных действий» П. Я. Гальперин пишет: «Отрицает ли такое планомерное формирование умственной деятельности наличие способностей и различия в способностях? Нет, конечно. Оно отрицает не существование и различие способностей, а злоупотребление понятием способностей для оправдания педагогического брака» [78, стр. 144]. Но фактически проблема способностей в этих исследованиях все-таки снимается. Первоначально исследователи прямо подчеркивали, что успех в обучении почти всецело зависит от методов обучения, что при их методике «у всех», за редким исключением, получается «безотказный результат», индивидуальные различия сглаживаются. В дальнейшем индивидуальные различия стали отмечаться, но тогда следует естественный вопрос (поставленный Н. А. Менчинской): если одни и те же учащиеся обучаются у одного и того же педагога по одной и той же методике формирования умственных действий, то чем же объяснить разный эффект обучения в различных случаях, почему при прочих равных условиях у одних школьников складываются «полноценные» умственные действия, а у других — «неполноценные»?

П. Я. Гальперин отвечает на это так: «В общем эффекте обучения участвует такое множество факторов, что прямое отнесение различий этого эффекта за счет различных способностей учеников весьма неосторожно» [78, стр. 144]. Дальше он говорит о том, что, когда удастся полностью устранить недостатки в формировании умственных действий, только тогда можно будет ставить вопрос о способностях [78, стр. 145]. Это и есть фактическое снятие проблемы способностей, так как на современном этапе развития науки исследование этой проблемы объявляется П. Я. Гальпериным неправомерным.

Наибольший интерес для нас, разумеется, представляют те работы, где ставится вопрос о сущности и структуре математических способностей, о тех или иных компонентах, входящих в это сложное образование. Едва ли не единственной работой советских психологов (не считая наших исследований), прямо касающейся этой проблемы, является труд А. Г. Ковалева и В. Н. Мясищева «Психические особенности человека. Том II. «Способно-

сти» [174]. Математическим способностям там посвящено всего около 20 страниц (стр. 144—164), но эти страницы очень содержательны. А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев выделяют некоторые «опорные пункты для определения особенностей психических процессов при математической деятельности», а именно: 1) склонность на элементарной ступени развития к операциям с числами, в дальнейшем склонность к решению математических задач и на еще более высоком уровне — склонность и интерес к математическим проблемам; 2) быстроту усвоения счетных и арифметических правил; 3) своеобразную особенность мышления, заключающуюся в том, что развитие абстрактного мышления, аналитико-синтетической деятельности, комбинационной способности особенно сильно сказывается в оперировании цифровой и знаковой символикой; 4) самостоятельность и оригинальность в решении математических проблем, все более выявляющиеся в процессе овладения математической деятельностью, и соотношение репродуктивного и творческого моментов, все более изменяющееся в сторону нарастания второго; 5) волевою активность и работоспособность в области математического труда; 6) переход склонности и интереса в увлечение, когда математическая работа становится призванием; 7) продуктивную по количеству и качеству деятельность, позволяющую обнаруживать все более опережающие сверстников показатели [174, стр. 151].

По сути дела, это тот самый «ансамбль свойств», необходимый для успешного овладения математической деятельностью, понятие о котором развивают А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев в ряде своих трудов. Для нас наибольший интерес из этого перечня свойств представляют пункты третий и четвертый, которые, вероятно, в наибольшей степени выражают сущность математического мышления. Надо отметить, что в этом перечне свойства носят самый различный характер. Здесь и очень узкие (пункт 2), и очень широкие (пункты 4 или 7) по содержанию категории, очень элементарные (тот же пункт 2) и очень сложные (пункт 3), более определенные (пункты 5 или 6) и менее определенные (пункты 4 или 7).

Очень интересны те работы Н. А. Менчинской и ее сотрудников, в которых на материале изучения индивидуальных особенностей усвоения арифметики выделяются своего рода компоненты арифметических способностей, хотя авторы избегают употреблять этот термин. В книге «Психология обучения арифметике» (еще раньше отдельные соображения на эту тему высказывались ею в работах сороковых годов — см., например, статью «Интеллектуальная деятельность при решении арифметических задач» [289]) Н. А. Менчинская на основе многих наблюдений и экспериментов выделила «те свойства или особенности мыслительной работы, которые могут быть положены в основу различения учащихся и которые играют определенную роль в успеваемости в об-

ласти арифметики» [291, стр. 375]. К таким свойствам Н. А. Менчинская отнесла: 1) быстроту (или соответственно замедленность) усвоения арифметического учебного материала; 2) гибкость мыслительного процесса (т. е. легкость или соответственно трудность перестройки работы, приспособления к изменяющимся условиям задач) и 3) тесную связь (или соответственно разрозненность) наглядных (образных) и отвлеченных компонентов мышления. Н. А. Менчинская склонна трактовать их как «свойства обучаемости арифметике» (с нашей точки зрения это и есть компоненты способностей к ее усвоению).

В своей последней работе, написанной совместно с М. И. Моро и опубликованной в 1965 г. [292], Н. А. Менчинская уже широко употребляет термин «способность», характеризуя процесс усвоения арифметики. Н. А. Менчинская и М. И. Моро пишут о двух типах учащихся — с высокой и низкой способностью к усвоению арифметики и дают описание этих типов [292, стр. 188—222]. Первые характеризуются быстрым темпом усвоения, вторые — замедленным темпом. Быстрый темп усвоения связан с быстрым обобщением, более высоким уровнем аналитико-синтетических операций, гибкостью (подвижностью) мышления. Замедленный темп есть следствие слабости обобщения, инертности (слабой подвижности) мышления. Вопрос о специфичности способностей к усвоению арифметики в какой-то мере решается в выполненном в самое последнее время под руководством Н. А. Менчинской исследовании Г. П. Антоновой [30], [30-а]. Изучая «продуктивность мышления» как показатель обучаемости (в сущности — это показатель общих умственных способностей), Г. П. Антонова обнаружила значительные индивидуальные различия в продуктивности мышления у учащихся III—IV классов. Одна и та же степень продуктивности мышления проявлялась у данного учащегося при решении разного вида задач в разных видах деятельности, что дало Г. П. Антоновой основание сделать вывод, что она имела дело с проявлением достаточно общего качества ума.

Важные исследования проводятся З. И. Калмыковой на материале усвоения школьниками арифметики и физики в связи с разрабатываемым ею понятием темпа продвижения [150], [151], [152], [153], [158], [159], [160], [161], в основе которого лежит количество упражнений, необходимое для усвоения новых понятий. Темп продвижения, по мнению З. И. Калмыковой, определяется уровнем умственного развития. Эксперименты показали наличие больших индивидуальных различий в темпе продвижения, а следовательно, различий в уровне умственного развития (число конкретных фактов, на основе анализа которых формулировалось обобщение, составляло в одном из исследований от 0 до 88 [159, стр. 43]). Темп продвижения характеризуется быстротой формирования новых обобщенных связей, быстротой переключения от одной системы обобщенных связей к другой (под-

вижностью), быстротой и точностью дифференцирования обобщенных связей, но не коррелирует с их прочностью [160, стр. 181—182].

Новым моментом в более поздних исследованиях З. И. Калмыковой является ее попытка трактовать темп продвижения как показатель способностей учащихся к обучению, т. е. рассматривать его как одну из диагностических проб [159, стр. 49]. Это заслуживает, конечно, внимания.

Особое значение имеют немногочисленные, но очень содержательные работы советских ученых-математиков, в которых трактуются те или иные аспекты проблематики математических способностей. Весьма большая ценность этих работ для психолога заключается в том, что написаны они специалистами-математиками, которые с большим правом, чем многие другие, могут говорить о компонентах математических способностей, об условиях их развития. Исходя из характеристики математики как науки, из собственного опыта и опыта воспитания целой плеяды творчески одаренных молодых математиков, они говорят о тех свойствах, которыми должен обладать человек, чтобы успешно и творчески работать в этой области.

Известный математик А. Я. Хинчин в статье «О воспитательном эффекте уроков математики» [426] пишет о своеобразных чертах стиля математического мышления. К таким чертам он относит: 1) доминирование логической схемы рассуждения; 2) лаконизм (стремление всегда находить кратчайший путь, ведущий к цели); 3) четкую расчлененность хода рассуждения и 4) точность символики (каждый математический символ имеет строго определенное значение). В этой же статье А. Я. Хинчин говорит и о свойственной математическому мышлению полноценности аргументации, не допускающей, в частности, ни незаконных обобщений, ни необоснованных аналогий.

В брошюре академика А. Н. Колмогорова «О профессии математика» [180] есть специальный раздел (к сожалению, всего 3 стр.), который называется «О математических способностях». А. Н. Колмогоров указывает, что для усвоения математики («при хорошем руководстве или по хорошим книгам») в объеме курса средней школы и даже элементов высшей математики достаточны обычные средние способности. Но для успешного овладения математикой на более высоком уровне, в качестве будущей специальности, требуются развитые математические способности, так как известно, что «разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи... приходят к новым математическим открытиям с различной скоростью, легкостью и успехом» [180, стр. 9], а надо стремиться, чтобы специалистами-математиками становились те, кто в этой области будет работать наиболее успешно. А. Н. Колмогоров говорит далее о составе математических способностей, выделяя в этой связи:

1) способность умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила, или, как это принято называть у математиков, вычислительные или «алгоритмические» способности; 2) геометрическое воображение или «геометрическую интуицию»; 3) искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения; в частности, хорошим критерием логической зрелости, совершенно необходимой математику, является понимание и умение правильно применять принцип математической индукции.

А. Н. Колмогоров говорит и о тех особенностях мыслительной деятельности, которые вопреки распространенному житейскому мнению не имеют отношения к математическим способностям, например способности механически запоминать большое число фактов, формул, способности складывать или перемножать в уме длинные ряды многозначных чисел.

В заключение А. Н. Колмогоров отмечает, что различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Ценным является также указание на то, что математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения.

Академик АН УССР Б. В. Гнеденко в ряде публикаций [92], [93], [94] указывает на такие требования к математическому мышлению учащихся, как: 1) способность улавливать нечеткость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев доказательства; 2) привычка к полноценной логической аргументации; 3) четкая расчлененность хода рассуждения; 4) лаконизм; 5) точность символики.

Методист-математик С. И. Шварцбурд в статье «О развитии интересов, склонностей и способностей учащихся к математике» [439], обобщая методическую литературу, рассматривает ряд компонентов математического развития, а именно: 1) развитие пространственных представлений; 2) умение отличать существенное от несущественного, умение абстрагировать, абстрактно мыслить; 3) умение от конкретной ситуации перейти к математической формулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующей существо дела; 4) навыки дедуктивного мышления; 5) умение анализировать, разбирать частные случаи; 6) умение применять научные выводы на конкретном материале; 7) умение критиковать и ставить новые вопросы; 8) владение достаточно развитой математической речью; 9) обладание достаточным терпением при решении математических задач [439, стр. 33]. В этом перечне качеств и свойств, не представляющем определенной системы, рядоположены и способности в подлинном смысле, и умения, и навыки, и черты личности; одни качества специфичны для математической деятельности, другие имеют самое общее значение. Но тем не менее этот перечень представляет большой интерес

как попытка эмпирически выделить некоторые особенности, способствующие успешному овладению математикой как учебным предметом.

В заключение остановимся на статье Н. И. Кованцова «Являются ли врожденными математические способности?» [175], где специалист-математик, профессор университета высказывает интересные соображения о природе способностей вообще и математических способностей в частности, о соотношении врожденного и приобретенного в психике человека. Для нас, конечно, наибольший интерес представляют те разделы статьи, где речь идет о математике и способностях именно к этому предмету. Двадцатилетний опыт преподавания математики в высшей школе дал основание автору положительно ответить на поставленный им вопрос. Творческие математические способности (в отличие от «школьных» способностей), по его мнению, врожденные. Мы не будем придирчиво относиться к терминологии автора и упрекать его в воскрешении старых идеалистических идей врожденности способностей. Судя по содержанию статьи, автор говорит о врожденных задатках математических способностей, в отношении которых люди не равны и которые являются необходимым условием развития способностей к творческой математической деятельности. При такой интерпретации статья не вызывает у нас принципиальных возражений.

Завершая обзор советской психологической и педагогической литературы по проблеме математических способностей, следует отметить, что, несмотря на наличие в этой области или смежных областях ряда очень ценных работ, психология математических способностей еще не разработана с достаточной полнотой. У нас, в частности, нет четкого представления о сущности и структуре математических способностей, о возрастной динамике развития структуры, о различных типах структур. Без этого невозможна разработка объективных психологических методов диагностики математических способностей, выявление оптимальных условий их формирования и развития на разных возрастных этапах. В последующем изложении мы делаем попытку несколько восполнить этот пробел.

Глава IV

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Некоторые вопросы общей теории способностей

Не делая своей задачей подробное освещение теоретических вопросов общей психологии способностей, мы считаем необходимым изложить свою точку зрения на указанные вопросы, так как этим определяется в значительной степени наш

подход к проблеме математических способностей, направление нашего исследования.

Подлинно научные основы учения о способностях человека даны в трудах К. Маркса и Ф. Энгельса, выдвинувших положение об общественно-исторической природе человеческих способностей [1], [2], [3].

Опираясь на труды основоположников марксизма-ленинизма, советские психологи исходят из тезиса о том, что решающая роль в развитии способностей, как и всей психики человека, принадлежит общественно-историческим закономерностям.

С позиций марксизма решает советская психология один из самых сложных вопросов психологии способностей — вопрос о соотношении врожденного (природного) и приобретенного в способностях.

Основным положением советской психологии в этом вопросе является положение о решающем значении социальных факторов в развитии способностей, ведущей роли социального опыта человека, условий его жизни и деятельности. Психические особенности не могут быть врожденными. Это целиком относится и к способностям. Способности всегда результат развития. Они формируются и развиваются в жизни, в процессе деятельности, в процессе обучения и воспитания.

Согласно положениям, высказанным А. Н. Леонтьевым, развитие, формирование психических функций, специфически человеческих способностей происходит в онтогенезе, в форме процесса активного усвоения индивидом опыта предыдущих поколений¹ [257, стр. 28], [258, стр. 11], [259, стр. 305]. Человек наделен от рождения только одной способностью — способностью к формированию специфически человеческих способностей [257, стр. 39].

Большой интерес представляют в этой связи работы по экспериментальному формированию некоторых сенсорных способностей, выполненные под руководством А. Н. Леонтьева, например исследование по формированию тонального слуха у тех лиц, которые отличались ярко выраженной тональной глухотой [257], [258]. «Конечно, процесс формирования таких мозговых систем, которые реализуют, например, акты усмотрения логических или математических отношений, протекает иначе», — подчеркивает А. Н. Леонтьев [257, стр. 38]. Но факт первостепенной важности заключается уже в том, что была реально продемонстрирована справедливость положения о прижизненности формирования у человека психических свойств и их функциональных органов.

¹ А. Н. Леонтьев говорит о необходимости различать у человека два рода способностей: природные или естественные (в своей основе биологические, например способность быстрого образования условных связей) и способности специфически человеческие (общественно-исторического происхождения) [258]. В дальнейшем речь будет идти только о специфически человеческих способностях.

Итак, решающую и определяющую роль играют общественный опыт, социальное воздействие, воспитание. Ну, а какова же роль прирожденных особенностей?

Конечно, трудно определить в каждом конкретном случае относительную роль врожденного и приобретенного, так как то и другое слито, неразлично. Но принципиальное решение этого вопроса в советской психологии таково: врожденными способностями быть не могут, врожденными могут быть только задатки способностей — некоторые анатомо-физиологические особенности мозга и нервной системы, с которыми человек появляется на свет.

Но какова роль в развитии способностей этих врожденных биологических факторов?

Природные данные являются одним из важных условий сложного процесса формирования и развития способностей, почему, собственно, и получили название «задатков».

Как отмечал С. Л. Рубинштейн, способности не предопределены, но не могут быть просто насаждены извне. В индивидах должны существовать предпосылки, внутренние условия для развития способностей [356, стр. 4]. А. Н. Леонтьев, А. Р. Лурия также говорят о задатках как о необходимых внутренних условиях, делающих возможным возникновение способностей [259, стр. 288], [263, стр. 110].

Но признание реального значения врожденных задатков ни в коем случае не означает признания фатальной обусловленности развития способностей врожденными особенностями — таково общее мнение советских психологов. Способности не заключены в задатках. В онтогенезе они не проявляются, а формируются. Задаток не потенциальная способность (а способность не задаток в развитии), так как анатомо-физиологическая особенность ни при каких условиях не может развиваться в психическую особенность. Следует учитывать также, что природные предпосылки и сами по себе являются продуктом исторического развития. То, что запечатлевается в нервной системе и что передается от поколения к поколению в виде определенных задатков, является тоже результатом длительного филогенетического развития.

Несколько иное понимание задатков дается в работах А. Г. Ковалева и В. Н. Мясищева [173, стр. 192], [174, стр. 61]. Под задатками они понимают психофизиологические свойства, в первую очередь те, которые обнаруживаются в самой ранней фазе овладения той или иной деятельностью (например, хорошее цветоразличение, зрительная память). Другими словами, задатки — это первичная природная способность, еще не развитая, но дающая себя знать при первых пробах деятельности.

Однако и при таком понимании задатков сохраняется основное положение: способности в собственном смысле слова формируются в деятельности, являются прижизненным образованием.

Понятие задатков в зависимости от того, как они трактуются, может быть и теоретической основой порочных реакционных концепций способностей. Как показал С. Л. Рубинштейн [351, стр. 289—292], [355, стр. 127—128], такая концепция задатков заключается в представлении о том, что каждой способности подготовлен свой задаток, заложенный в фиксированных особенностях морфологической структуры мозга, нервной системы. Согласно этим взглядам способность непосредственно проецируется в морфологические особенности организма. С этим нельзя согласиться.

Что же можно сказать относительно конкретного значения понятия «задаток»?

Когда говорят о задатках способностей, обычно в первую очередь имеют в виду типологические свойства нервной системы. Вопрос о конкретном значении типологических свойств нервной системы в умственных способностях является еще неясным. Обычно по этому вопросу высказываются лишь самые общие соображения.

Как известно, типологические свойства — природная основа индивидуальных различий между людьми. На этой основе возникают сложнейшие системы разнообразных временных связей, отражающих внешние воздействия. От типологических свойств зависят особенности образования этих связей — скорость их образования, их прочность, легкость дифференцировок. Они определяют силу сосредоточенного внимания, умственную работоспособность.

О проявлении индивидуально-типологических различий нервных процессов в умственных способностях говорится в статье Н. Е. Малкова, где в этой связи ставится вопрос о природных задатках к плодотворной умственной деятельности [272-а, стр. 39]. Н. Е. Малков считает, что типологические свойства обуславливают динамическую характеристику протекания умственной деятельности. Он основывает свою мысль на таком примере. В основе знания таблицы умножения лежат определенные системы связей, одинаковые по своей структуре у всех людей. Однако функционирование их (точность, быстрота, прочность) у каждого человека разное в зависимости от свойств его нервной системы. Считая, что быстрота запоминания, сохранения, воспроизведения, степень дифференцированности и генерализация отношений — это функции свойств нервной системы, Н. Е. Малков предлагает в каждом психическом процессе и свойстве различать структуру как систему связей и динамику их протекания как функцию свойств нервных процессов. Эта мысль Н. Е. Малкова заслуживает внимания. Но надо учесть, что еще никто не доказал прямую связь динамической характеристики умственной деятельности и соответствующих свойств нервной системы. Конечно, быстрота работы, скажем, математика, вероятно, обуславливает-

ся быстротой протекания нервных процессов. Но ведь не о такой «быстроте» идет речь, когда мы говорим о способностях, о «быстроте продвижения», о «темпе продвижения». Человек может работать медленно, но продвигаться в овладении деятельностью быстро и наоборот. Еще не раз мы будем иметь возможность говорить о необходимости различать индивидуальный темп работы и темп продвижения, быстроту работы и быстроту развития.

Кроме того, если типологические свойства и могут трактоваться как задатки общих умственных способностей, то трудно сказать что-нибудь определенное относительно значения их как задатков по отношению к специфическим способностям (например, математическим). Ясно одно, что математики — это люди с самыми различными типологическими свойствами нервной системы.

Ряд исследований показал, что наряду с общими типологическими свойствами, характеризующими нервную систему в целом, существуют частные типологические свойства, характеризующие работу отдельных областей коры, выявляемые по отношению к разным анализаторам и разным системам мозга (Б. М. Теплов и его сотрудники).

В отличие от общих типологических свойств, которые определяют темперамент, частные типологические свойства имеют наибольшее значение при изучении специальных способностей. Нам кажется, что эта мысль Б. М. Теплова [407, стр. 74—75] очень правильна и перспективна.

В качестве задатков общих и специфических способностей следует рассматривать также соотношение сигнальных систем. Правда, остаются еще не изученными конкретные физиологические механизмы второй сигнальной системы.

Природные свойства анализаторов уже почти несомненно могут быть задатками некоторых специфических способностей (разумеется, к математическим способностям это не имеет отношения).

И наконец, задатки следует искать в индивидуальных вариациях строения коры больших полушарий мозга, данными о которых располагает современная наука о клетчатом строении мозга.

Но какова же все-таки конкретная роль задатков в развитии способностей? Сказать, что это «условия», «предпосылки» развития способностей, — это сказать еще очень мало. Каково же реально значение этих «условий», что реально может значить наличие или отсутствие задатков тех или иных специфических способностей?

По-видимому, роль задатков должна быть расценена по-разному, в зависимости от того, идет ли речь об обычном уровне способностей или о выдающихся способностях талантливых людей. Например, каждый нормальный человек обладает задатками в той мере, в какой это необходимо для развития способностей

к усвоению школьного курса математики. Но далеко не всякий обладает задатками для развития высшего уровня математических способностей, связанного с научным творчеством, открытием нового.

Надо сказать, что при едином у всех советских психологов взгляде на способности как на прижизненные формирования, при единой позиции отрицания их врожденности имеют место все-таки известные различия в трактовке некоторых основных положений теории способностей.

А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев склонны придавать несколько большее значение, чем другие психологи, природной стороне, естественным предпосылкам развития. То же можно сказать и о В. И. Киреенко [168, стр. 18—23]. По-видимому, к этой же категории можно отнести взгляды Б. М. Теплова и С. Л. Рубинштейна.

А. Н. Леонтьев и его последователи склонны в большей степени подчеркивать роль воспитания в формировании способностей.

Безусловно, идея о решающей роли воспитания является весьма прогрессивной, и в этом отношении следует положительно оценить взгляды А. Н. Леонтьева. Но все-таки остается впечатление, что при этом в ряде случаев несколько абсолютизируется и гипостазируется роль условий жизни и воспитания¹. Эта позиция, по-видимому, естественным образом вытекает из развиваемого А. Н. Леонтьевым представления о задатках как природных предпосылках, лишь обуславливающих некоторые индивидуальные особенности хода самого процесса формирования данной способности, но совершенно не влияющих на содержание или уровень возможных достижений [257], [258], [259]. При этом А. Н. Леонтьев с полным основанием указывает, что таково, например, влияние врожденных типов высшей нервной деятельности. Это верно, но ведь типами высшей нервной деятельности не исчерпывается понятие задатка.

Если видеть причину различных способностей людей только в различных условиях жизни и воспитания, то, по-видимому, остается заключить, что при идеальном обучении и воспитании любой нормальный человек в любой деятельности может достигнуть любых высот, путем воспитания можно развить любую способность у любого человека, причем возможности развития почти безграничны. Если все зависит только от воспитания, то, по-видимому, необходимо сделать вывод, что если из Лобачевского получился математик, из Чайковского — композитор, а из Пушкина — поэт, то это объясняется только обстоятельствами их жизни и деятельности. При других обстоятельствах жизни

¹ См., например, интервью с А. Н. Леонтьевым в журнале «Здоровье», 1964, № 5.

и деятельности вполне могло бы быть и наоборот: мы знали бы и чтити бы гениального математика Пушкина или великого композитора Лобачевского. Между тем весь опыт, жизненная практика, свидетельства авторитетных представителей науки и искусства говорят о другом. Академик А. Н. Колмогоров, например, пишет: «Талант, одаренность, скажем, в работе в области математики, физического эксперимента, конструирования новых приборов даны от природы не всем. Никакой упорный труд не может заменить эту природную одаренность. Он дает действительно ценные плоды в науке лишь в соединении с одаренностью, как, конечно, и одаренность окажется бесплодной без упорного и сосредоточенного труда» [179]¹.

«О природных данных», «природных талантах» писали академики М. А. Лаврентьев [233], Б. Константинов [185].

Нельзя не признать, что С. Л. Рубинштейн имел все основания возражать против детерминации способностей и их развития целиком за счет внешней среды и внешних воздействий [356].

Нам кажется правильной мысль, сформулированная В. И. Киреенко: «Педагогический оптимизм заключается не в утверждении, что у каждого человека путем правильного обучения и воспитания можно развить беспредельно любую способность... а в признании того факта, что нет ни одного человека из числа нормальных людей, которые были бы ни к чему не способны. Представляя благоприятные возможности для всестороннего развития, мы тем самым способствуем выявлению наиболее ярких способностей у каждого человека» [168, стр. 19].

Диалектико-материалистическое понимание способностей не отрицает индивидуальных различий в способностях людей. В отношении способностей люди не равны. Еще К. Маркс решительно возражал против представления о том, что при коммунизме способности будут нивелироваться. В. И. Ленин совершенно определенно указывал: «...равенство сил и способностей людей в социалистическом обществе ждать нелепо» [6, стр. 364].

Обратим внимание на указание основоположников марксизма-ленинизма о том, что люди будут не равны в отношении их способностей даже при таком общественном строе, где каждый будет поставлен в идеальные условия развития, идеальные условия обучения и воспитания. Личность каждого будет всесторонне и гармонически развита, но нивелировки в отношении способностей не будет. Но если даже при идеальных условиях обучения и воспитания, идеальных для развития внешних воздействиях равенства способностей все-таки не будет, то это можно объяснить только одним — наличием природных предпосылок, которые являются «условиями» развития способностей не только в смысле

¹ А. Н. Колмогоров, говоря об одаренности, по-видимому, имеет в виду совокупность природных задатков способностей.

того, что они придают своеобразие процессу их развития, но и в смысле того, что они в известных пределах могут определять содержательную сторону и влиять на уровень достижений.

К. Маркс в свое время высказал мысль о том, что «каждый, в ком сидит Рафаэль, должен иметь возможность беспрепятственно развиваться» [3, стр. 392].

Как мы видим, К. Маркс вовсе не утверждает, что у каждого человека любую способность можно развить беспредельно. Все-таки Рафаэлем становится не всякий, кому дается возможность беспрепятственно развиваться, а лишь тот, «в ком сидит Рафаэль», т. е. тот, кто имеет соответствующие природные задатки. То же самое, конечно, имеет место и в области математики: чтобы стать Галуа или Лобачевским, надо в известном смысле «носить их в себе». В то же время К. Маркс не говорит о том, что для того, чтобы стать просто живописцем или музыкантом, надо «носить его в себе». В этом случае природные задатки, очевидно, имеют меньшее значение.

Нам кажется, правильное решение вопроса о задатках должно исходить из представления о том, что задатки бывают разных видов. Одни из них, действительно, не определяют ни содержания способностей, ни уровня возможных достижений, их значение ограничивается тем, что они придают своеобразие процессу развития способностей, облегчают или затрудняют их развитие. К этой категории задатков можно отнести, например, типологические свойства нервной системы. Другие задатки, не определяя узко и «жестко» содержания способностей, по-видимому, все-таки больше влияют на их содержательную сторону. К этой категории задатков, возможно, следует отнести некоторые особенности строения анализаторов, а также особенности строения отдельных участков коры больших полушарий мозга (ниже об этом еще будет говориться). Но по отношению и к таким задаткам также остается в силе положение о том, что они не несут в себе способностей.

Только при такой трактовке задатков можно объяснить:

1) частые случаи раннего проявления способностей у детей до того, как они подвергаются систематическому обучению и воспитанию, до того, как они начинают систематически заниматься соответствующей деятельностью. (Это не противоречит высказанному ранее положению о том, что способности формируются и развиваются в деятельности. Деятельность всегда должна иметь место. Речь идет о том, что отсутствует систематическая, целенаправленная, организованная деятельность.) Ниже еще будет говориться об этом.

2) столь же частые случаи, когда многие люди, всю жизнь систематически и организованно занимающиеся интересующей их деятельностью, так и не обнаруживают особых способностей к ней.

3) проявление больших способностей у детей в явно неблагоприятных социальных или семейных условиях. Можно вспомнить М. В. Ломоносова, А. М. Горького, Ф. И. Шаляпина, многих талантливых самородков из народа, проявивших свои таланты, несмотря на крайне неблагоприятные внешние условия.

Только при наличии хороших задатков способности могут развиваться, во-первых, очень быстро даже при неблагоприятных жизненных обстоятельствах и, во-вторых, достигнуть очень больших высот развития.

Разумеется, даже прекрасные задатки сами по себе «автоматически» не обеспечивают высоких достижений. С другой стороны, и при отсутствии хороших задатков (но, разумеется, не при полном отсутствии их) человек может при определенных условиях добиваться значительных успехов в соответствующей деятельности, но ему потребуется на это значительно больше времени и сил. При всех прочих равных условиях хорошие задатки значительно облегчают развитие способностей как в смысле быстроты развития и меры «вложенного труда», так и в смысле высоты достижений.

Математик Н. И. Кованцов в статье «Являются ли врожденными математические способности?» [175] хотя и не различает понятий «задаток» и «способность», и приходит к неверному выводу о врожденности математических способностей, но правильно, с нашей точки зрения, отмечает, что если и принять положение о том, что всех можно развить в области математики достаточно высоко, то мера вложенного в это дело труда окажется совершенно различной.

Итак, нам представляется, что наличие задатков, говоря языком математика, является необходимым, но не достаточным условием развития математических творческих способностей. Чтобы быть способным к изучению школьной математики, не обязательно иметь какие-то особые задатки, но чтобы стать крупным ученым в области математики, задатки, по-видимому, необходимы.

В заключение этой главы кратко сформулируем несколько положений общей теории способностей, исходя из которых мы строим наше исследование.

1. Способности — это всегда способности к определенному роду деятельности, они существуют только в соответствующей конкретной деятельности человека. Поэтому они и выявлены могут быть лишь на основе анализа конкретной деятельности. Соответственно этому и математические способности существуют только в математической деятельности и в ней должны выявляться.

2. Способности — понятие динамическое. Они не только проявляются и существуют в деятельности, они в деятельности создаются, в деятельности и развиваются.

Соответственно этому и математические способности существуют только в динамике, в развитии, они формируются, развиваются в математической деятельности.

3. В отдельные периоды развития человека возникают наиболее благоприятные условия для становления и развития отдельных видов способностей и некоторые из этих условий имеют временный, преходящий характер. Такие возрастные периоды, когда условия для развития тех или иных способностей будут наиболее оптимальными, называются сензитивными (Л. С. Выготский, А. Н. Леонтьев). Очевидно, и для развития математических способностей существуют наиболее оптимальные периоды.

4. Успешность деятельности зависит от комплекса способностей. Равно и успешность математической деятельности зависит не от отдельно взятой способности, а от комплекса способностей.

5. Высокие достижения в одной и той же деятельности могут быть обусловлены различным сочетанием способностей. Поэтому принципиально можно говорить о различных типах способностей, в том числе и математических.

6. Возможна в широких пределах компенсация одних способностей другими, вследствие чего относительная слабость какой-нибудь одной способности компенсируется другой способностью, что в итоге не исключает возможности успешного выполнения соответствующей деятельности (см., например, статью Н. Д. Левитова [247]). А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев [174, стр. 45] понимают компенсацию шире — говорят о возможности компенсации недостающей способности умением, характерологическими качествами (терпением, настойчивостью). По-видимому, компенсация и того и другого вида может иметь место и в области математических способностей.

7. Сложным и не до конца решенным в советской психологии является вопрос о соотношении общей и специальной одаренности. Б. М. Теплов [412, стр. 28—30] склонен был отрицать само понятие общей одаренности, безотносительной к конкретной деятельности, полагая, что в этом понятии есть что-то родственное понятию общего интеллекта в трактовке буржуазных психологов. Понятия «способность» и «одаренность», по Б. М. Теплову, имеют смысл только в соотношении с конкретными исторически развивающимися формами общественно-трудовой деятельности. Следует, по его мнению, говорить о другом, о более общих и более специальных моментах в одаренности. С. Л. Рубинштейн [354, стр. 537—538] справедливо отметил, что не следует противопоставлять друг другу общую и специальную одаренность — наличие специальных способностей накладывает определенный отпечаток на общую одаренность, а наличие общей одаренности сказывается на характере специальных способ-

ностей. Б. Г. Ананьев [20] указал на то, что следует различать общее развитие и специальное развитие и соответственно общие и специальные способности. Каждое из этих понятий правомерно, обе соответствующие категории взаимосвязаны. Б. Г. Ананьев подчеркивает роль общего развития в становлении специальных способностей.

Детальный обзор этой проблемы не входит в наши задачи. Сейчас же следует только отметить, что, говоря о математических способностях, мы будем иметь в виду более общие и более специальные моменты в их структуре.

§ 2. Основные понятия

Перед тем как определить основные понятия, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем, необходимо отметить, что математические способности могут иметь свое выражение на весьма разных уровнях деятельности. Понятие математические способности мы будем трактовать в двух аспектах:

а) как творческие (научные) способности — способности к научной математической деятельности, дающей новые и объективно значимые для человечества результаты, достижения, ценный в общественном отношении продукт;

б) как учебные способности — способности к изучению (обучению, усвоению) математики (в данном случае школьного курса математики), быстрому и успешному овладению соответствующими знаниями, умениями, навыками.

Эти два уровня обычно различают и психологи, и математики. Например, французский математик Ж. Адамар говорит об уровне, на котором осуществляется лишь «понимание математических теорий», и уровне «создания новых теорий» [595, стр. 104], Р. Гань и Н. Парадиз соответственно употребляют термины «репродуктивная» и «продуктивная» математическая деятельность [572].

В советской психологической литературе А. Г. Ковалев говорит о двух уровнях развития способностей — отражательно-репродуктивном (усвоение знаний, овладение деятельностью, осуществление деятельности по образцу) и отражательно-творческом (создание новых оригинальных продуктов) [173, стр. 190].

Возникает вопрос: могут ли (и при каких условиях) способности к усвоению математики считаться хоть в какой-то степени проявлением подлинно математических способностей, математических способностей в собственном смысле слова (научно-творческих)? Или это в любом случае настолько разные категории, что по проявлению первых абсолютно ничего нельзя сказать о возможном в будущем проявлении вторых? Можем ли мы, изучая способности к усвоению математики, считать, что

в какой-то мере, в каких-то пределах мы изучаем и собственно математические способности?

Некоторые психологи (в частности, зарубежные) склонны резко отделять друг от друга указанные уровни математической деятельности, из чего следует, что по достижениям на первом уровне нельзя ничего с уверенностью заключить о достижениях на втором уровне. Это касается как публикаций более ранних (первая четверть нашего века—Б. Бакингом, В. Бетц, В. Браун), так и современных (И. Верделин). Б. Бакингом и В. Бетц считали, что школьная математика имеет крайне мало общего с реальным математическим мышлением [537, стр. 206]. В. Браун пишет, что имеется много оснований считать, что школьная математическая деятельность и собственно математическая деятельность относятся к различным формам способностей [533]. Современный шведский психолог И. Верделин отмечает: «То, что называется математическими способностями на определенных школьных ступенях, не является идентичным тому, что является базой научных исследований в математике» [727, стр. 14]. Но важно отметить, что во всех перечисленных случаях эти психологи имеют в виду обычное школьное усвоение математики, не связанное ни с эвристикой, ни с элементами творчества.

Как нам кажется, различие между указанными двумя уровнями деятельности не носит абсолютного характера. Изучая математические способности школьников, мы имеем в виду не просто обучаемость. В нашем исследовании будет идти речь хотя и об учебных способностях школьников, но о творческих учебных способностях, связанных с самостоятельным творческим овладением математикой в условиях школьного обучения, с самостоятельной постановкой несложных математических проблем и нахождением путей и методов для их решения, изобретением доказательств теорем, самостоятельным выведением формул, нахождением оригинальных способов решения нестандартных задач. Все это несомненно тоже проявление математического творчества. Если критерием собственно математического мышления является наличие творческого начала, то не надо забывать, что математическое творчество может быть не только объективным, но и субъективным. Устанавливая специфические критерии, отличающие творческий мыслительный процесс от нетворческого, А. Ньюэлл, Д. Шоу и Г. Саймон отмечают следующие признаки творческого мышления: 1) продукт мыслительной деятельности обладает новизной и ценностью как в субъективном, так и в объективном смысле; 2) мыслительный процесс также отличается новизной в том смысле, что требует преобразования ранее принятых идей или отказа от них; 3) мыслительный процесс характеризуется наличием сильной мотивации и устойчивости, протекая либо в течение значительного

периода времени... либо с большой интенсивностью [493, стр. 502].

Если исходить из упомянутых (с нашей точки зрения, правильных) критериев, то многие из весьма способных к математике детей демонстрируют своего рода творческое математическое мышление. Забегая немного вперед, укажем, что некоторые из исследованных нами весьма способных школьников буквально «открывали» для себя отдельные разделы школьного курса алгебры и геометрии. Открывали они давно и хорошо известное, продукт их творчества никакой объективной ценности не представлял, но для самого ученика (субъективно) это было несомненно открытием, изобретением, самостоятельным достижением нового. В каком-то смысле такую деятельность определенно можно отнести к математическому творчеству. Открытие заново того, что было известно, тоже творчество, и субъективно эта продукция может быть нова и оригинальна, подчеркивают А. Ньюэлл, Д. Шоу и Г. Саймон [493, стр. 506]. То же отмечает и Р. Карпентер: «Продукт может быть объективно и не творчеством, но процесс творческим» [547, стр. 392—394].

Таким образом, можно считать, что есть определенная связь между отмеченными уровнями математических способностей. Ж. Адамар утверждает, что между трудом учащегося, который пытается решать задачи по алгебре и геометрии, и трудом открывателя в математике имеется только различие степени, уровня, — оба труда по природе подобны [595, стр. 104]. А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев пишут о том, что эти два уровня «объединены генетической связью. При благоприятных условиях формирования способности математика-ученика становятся способностями ученого» [174, стр. 149]. Такова же точка зрения Ю. А. Самарина [360, стр. 44].

Таким образом, мы считаем, что на вопрос, могут ли способности к усвоению математики считаться проявлением математических способностей в собственном смысле слова, следует ответить утвердительно. Глубокое, самостоятельное и творческое изучение математики является предпосылкой развития способностей к творческой математической деятельности — самостоятельной постановке проблем и нахождению путей и методов их решения, имеющих новое и общественно-значимое содержание. Именно поэтому исследование математических способностей школьников есть первый шаг на пути к исследованию математических способностей в их высших проявлениях.

Анализ способностей вызывает необходимость дифференцировать в исследовательских целях понятия способностей, с одной стороны, и умений и навыков — с другой. Эти категории взаимосвязаны и взаимозависимы. С. Л. Рубинштейн писал о «своеобразной диалектике между способностями и умениями» [354, стр. 533]. С одной стороны, в процессе приобретения зна-

ний, умений и навыков развиваются способности, их формирование и развитие невозможно вне процесса овладения соответствующими знаниями, умениями и навыками. С другой стороны, процесс приобретения знаний, умений и навыков зависит наряду и с другими условиями и от индивидуальных особенностей учащегося — способности позволяют быстрее, легче и глубже овладеть соответствующими знаниями, умениями и навыками.

Мы считаем, что реальная тесная связь и взаимозависимость способностей и умений, навыков не «закрывает» возможности дифференцировать эти категории. Как неверно было бы разрывать их, так неправильным было бы и отождествлять их. Различать их в исследовательских целях, «развести» в процессе научного анализа не только можно, но и нужно.

Как же конкретно отличать способности от умений и навыков? В этом и заключается большая трудность. В многочисленных работах по психологии способностей, опубликованных в СССР, говорится о необходимости дифференцировать эти понятия, но, как правило, в них не содержится конкретных указаний на этот счет. Положение осложняется еще и тем, что в психологической литературе нет единообразия в употреблении соответствующих терминов. Мы часто говорим и пишем: «способность мыслить» и «умение думать», «способность подсчитать» и «умение рассчитать», «умение воспринимать» и «способность наблюдать» и т. д.

По каким же признакам можно было бы «развести» эти понятия? По параметру «врожденное» — «приобретенное»? Разумеется, нет. И способности, и умения, и навыки формируются и развиваются в жизни, в процессе деятельности, и те и другие являются условием успешного ее выполнения.

Может быть, их можно различать по признаку быстроты формирования: умение, навык — это то, что складывается сравнительно быстро, а способности — то, что формируется и изменяется медленно? Эта точка зрения, например, отражена в работах В. И. Киреевко [165], [166], [168], его сотрудника Б. М. Ребуса [345], который так и пишет, что если какую-то особенность можно развить сравнительно легко и быстро, то вряд ли ее можно назвать способностью. Не говоря уже о том, что такое различие является неопределенным и бессодержательным (выходит, что те психические качества, которые развиваются быстро, следует отнести к категории умений, навыков; те, которые развиваются медленно, — к категории способностей), оно и по существу спорно: есть умения и навыки, которые развиваются весьма медленно, и, наоборот, некоторые способности при определенных условиях могут формироваться сравнительно быстро.

Наконец, может быть, их можно различать по принципу сложности? Способности — это более элементарные, простые

образования, умения и навыки — более сложные? И снова это различие оказывается очень неопределенным и спорным по существу — и способности, и навыки, и умения по структуре бывают и очень простыми, и очень сложными.

Разумеется, если рассматривать вопрос в общем плане, то можно сказать, что способности по сравнению с умениями и навыками в большинстве случаев формируются и изменяются медленнее, с большим трудом, являются более устойчивыми образованиями. Но ставить этот принцип в основу различия указанных категорий все-таки невозможно, так как различие по параметрам «больше — меньше», «быстрее — медленнее» совершенно бессодержательно и качественно неопределенно.

В нашем исследовании математических способностей мы попытались исходить из другого понимания существа способностей и умений, навыков. Исходным при этом являлся факт, что при анализе способностей всегда имеют в виду качества, особенности человека, выполняющего ту или иную деятельность, а при анализе умений и навыков — качества, особенности деятельности, которую осуществляет человек. В основе определения понятия «способность» в любом советском учебнике психологии, почти в любом труде, касающемся психологии способностей, всегда лежит характеристика индивидуально-психологических особенностей человека. С другой стороны, все определения навыков, умений исходят из понятия действия. Н. Д. Левитов говорит об умении как о целесообразном выполнении действий [249], Б. М. Теплов считал навыками автоматизированные элементы сознательного действия и т. д. В этом различие: когда говорят о способностях, имеют в виду психологическую характеристику человека в деятельности, когда говорят об умениях (навыках) — психологическую характеристику деятельности человека. Поэтому-то почти во всех учебниках, с нашей точки зрения, совершенно справедливо глава «Способности» отнесена к разделу «Психологические особенности человека», а глава «Умения и навыки» — к разделу «Психологическая характеристика деятельности».

Все это дало нам основание попытаться следующим образом дифференцировать указанные понятия. Под способностями мы понимаем индивидуально-психологические особенности человека, которые благоприятствуют быстрому и легкому овладению определенной, например, математической деятельностью, овладению соответствующими навыками и умениями (это понятие идет от анализа психики человека); под умениями и навыками мы понимаем конкретные акты деятельности (например, математической), которые осуществляются человеком на сравнительно высоком уровне (это понятие идет от анализа данной конкретной деятельности). Способности — это не навыки и умения, а те индивидуально-психологические особенности, от которых зави-

сит легкое и успешное овладение умениями и навыками в соответствующей деятельности.

Необходимо подчеркнуть, что при анализе как умений, навыков, так и способностей мы анализируем деятельность. И о наличии способностей, и о наличии умений и навыков мы судим по особенностям выполнения человеком соответствующей (например, математической) деятельности. Но эту деятельность можно рассматривать под различным углом зрения, и этот подход и определяет различие между способностями и умениями, навыками. Если мы эту деятельность анализируем с точки зрения того, какие психологические особенности человека благоприятствуют овладению ею, то это и будет анализ способностей.

Исходя из принятой точки зрения, мы будем говорить «умения не составлять уравнение по условиям задач», «навык производить алгебраические преобразования» и т. д., так как и составление уравнений по условиям задач, и алгебраические преобразования — это элементы (акты) математической деятельности школьников, это то, что относится к содержанию их математической деятельности. Мы будем говорить также: «способность к обобщению», «способность к пространственным представлениям», «способность к отвлеченному мышлению» и т. д. Обобщение, пространственные представления, отвлеченное мышление — эти категории тоже существуют только в деятельности, но они не есть отдельные акты, элементы математической деятельности (ведь в школьной математике не занимаются обобщением, пространственным представлением как самоцелью; в школьной программе по математике мы не найдем разделов под таким названием, зато там есть разделы: «составление уравнений по условиям задач», «алгебраические преобразования» и т. д.). Поэтому исследование математических способностей школьника есть также исследование его математической деятельности, но под определенным углом зрения.

После того как проведена необходимая дифференцировка указанных выше понятий, можно попытаться более обстоятельно раскрыть понятие способностей вообще и математических способностей в частности. Прежде всего укажем на то, что принятые в советской психологии традиционные определения понятия способностей являются в большинстве случаев нечеткими и в силу этого не вполне удовлетворительными. Идут они от работ Б. М. Теплова сороковых годов [409], [412], [413] и с тех пор остались почти без изменений. Н. С. Лейтес в своей книге об умственных способностях определяет способности как психологические свойства личности, которые являются условием успешного выполнения определенных видов деятельности и от которых зависит возможность осуществления и степень успешности деятельности [252, стр. 5], [255, стр. 466].

Такое же определение способностей дается в учебниках Н. Д. Левитова [249, стр. 82], П. А. Рудика [359, стр. 395], Е. И. Игнатьева, М. Д. Громова и Н. С. Лукина [144, стр. 325]. Принципиально такого же рода определение дает и С. Л. Рубинштейн: способности — это «комплекс психических свойств, делающих человека пригодным к определенному виду общественно полезной деятельности» [355, стр. 126]. В. А. Артемов и Н. И. Иванов в своих учебниках [32, стр. 401], [139, стр. 422] также называют способностью «пригодность человека к той или иной деятельности».

Недостаток всех этих определений состоит в том, что, исходя из них, под понятие способностей можно подвести самые различные психологические категории, все, что необходимо для успешного выполнения деятельности, причем сами авторы, конечно, этого не имеют в виду. В самом деле, если способности — психические качества или свойства личности, от которых зависит успешность выполнения данной деятельности или «которые являются необходимым условием возможного успеха» (В. С. Мерлин [294, стр. 123]), то к ним надо отнести и такие индивидуально-психологические свойства человека, как отношение его к деятельности и соответствующие черты воли и характера (от интереса человека к данной деятельности и склонности заниматься ею, равно как и от наличия таких черт, как трудолюбие, работоспособность, настойчивость и т. д., безусловно зависит успешность ее выполнения). По-видимому, способности не условия, а лишь одно из условий успешности деятельности, как, собственно, и считают все вышеприведенные авторы. Попытка рассмотреть способности в широком личностном плане характеризует работы ленинградских психологов, в первую очередь Б. Г. Ананьева, А. Г. Ковалева, В. Н. Мясищева. Правильно поставив вопрос о необходимости преодолеть разрыв в изучении способностей и других черт личности, в частности способностей и характера («потенций и тенденций» — В. Н. Мясищев), ленинградские психологи изучают способности в широком личностном плане, собственно даже не способности, как таковые, а, скорее, личность в аспекте ее способностей. Такой подход, вероятно, включает в себе и сильные и слабые стороны. С одной стороны, он дает возможность, как уже говорилось, исследовать способности в широком личностном плане, а с другой — таит опасность «растворения» понятия «способность» в понятии «личность» и, следовательно, потери предмета исследования. По-видимому, в исследовании способностей надо сочетать и тот и другой подход.

Среди указанных работ необходимо в первую очередь отметить работу Б. Г. Ананьева «О взаимосвязи в развитии способностей и характера» [19], где раскрывается общая природная основа развития характера и способностей, показывается, как

в процессе деятельности формируются и способности, и характер, как связь способностей и характера приводит к новым психическим образованиям, обозначаемым терминами «талант» и «призвание». Тенденция Б. Г. Ананьева представить развитие способностей и характера как единый процесс формирования личности человека представляется очень плодотворной.

Изучая способности, А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев исходят из понимания способностей как «ансамбля свойств», необходимых для успешного осуществления определенной деятельности, включая систему отношений личности, особенности ее эмоционально-волевой сферы [171], [172], [173], [174], [302], [303]. Мы также исходим из представления о том, что успешность осуществления математической деятельности школьника является производным определенного сочетания качеств, а именно:

1) активного положительного отношения к математике, интереса к ней, склонности заниматься ею, переходящими на высоком уровне развития в страстную увлеченность;

2) ряда характерологических черт, прежде всего трудолюбия, организованности, самостоятельности, целеустремленности, настойчивости, а также устойчивых интеллектуальных чувств (чувство удовлетворения от напряженной умственной работы, радость творчества, открытия и т. д.);

3) наличия во время осуществления деятельности благоприятных для ее выполнения психических состояний (см. Н. Д. Левитов [246]), например состояния заинтересованности, сосредоточенности, хорошего «психического» самочувствия и т. д.;

4) определенного фонда знаний, умений и навыков в соответствующей области. Если человек, например, не имеет минимума знаний, навыков и умений в области математики, то он не может быть пригоден даже к заурядной математической деятельности, хотя бы он и обладал большими математическими способностями;

5) и наконец, определенных индивидуально-психологических особенностей в сенсорной и умственной сферах, отвечающих требованиям данной деятельности.

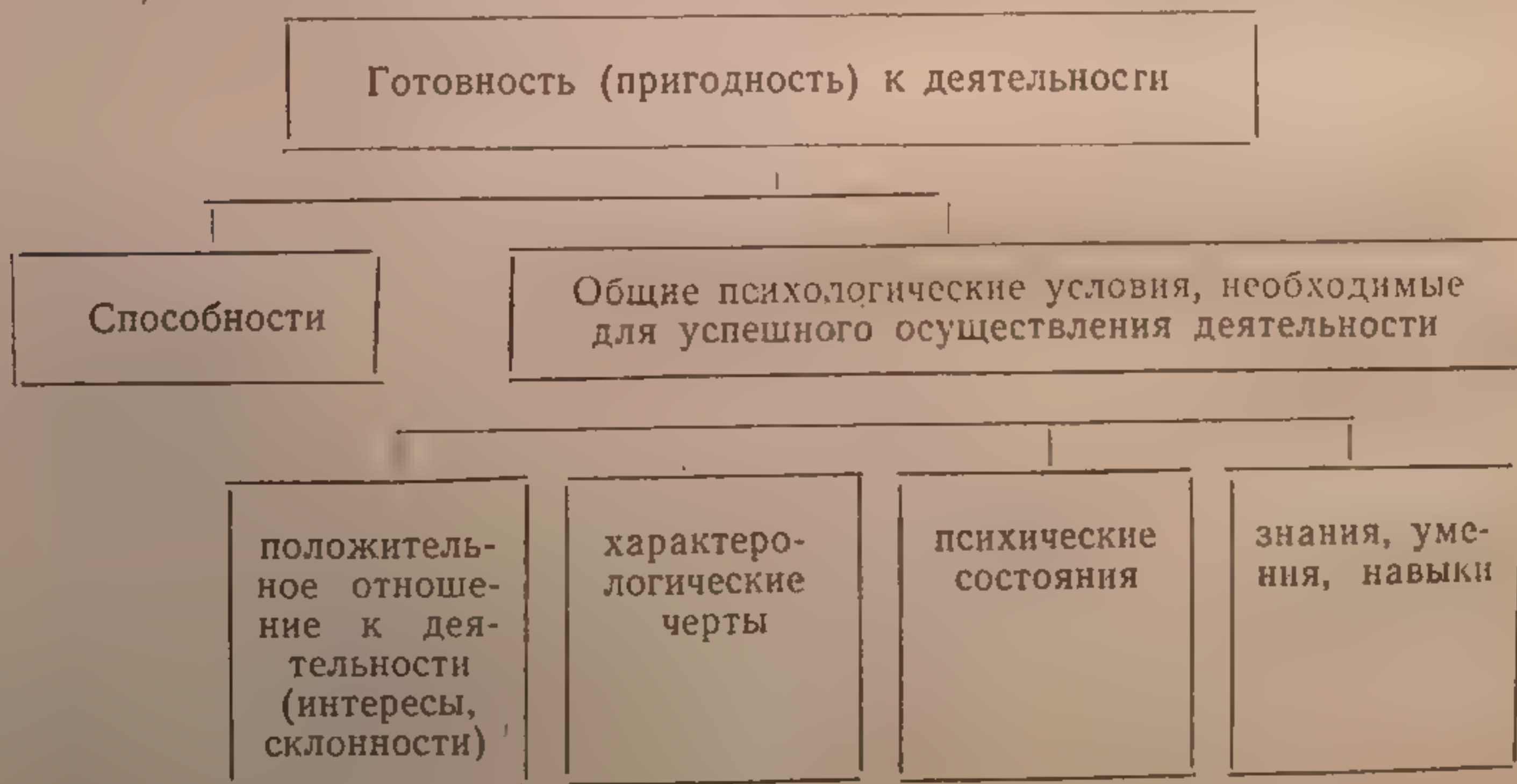
Но рационально ли все перечисленные категории (образующие, конечно, своеобразный «ансамбль») называть компонентами математических способностей? В таком случае произойдет неизбежное смешение понятий, так как компонентами способностей будут считаться интересы, склонности, характерологические черты, навыки и умения.

Собственно математические способности — это лишь пятая группа качеств приведенной схемы. Все же остальные лучше рассматривать как самые общие факторы, условия, благоприятствующие вообще всякой деятельности (какая деятельность не требует интереса к ней, волевых черт и т. д.). Полностью соглашаясь с тем, что для успешного осуществления деятельности

совершенно необходимы определенные черты воли и характера, соответствующее отношение к деятельности (интересы, склонности) и т. д., мы вместе с тем пытаемся ограничить понятие собственно способностей в основном сенсорной, умственной и моторной сферами. В этом вопросе наша позиция полностью совпадает с позицией Н. Д. Лебитова [248], [249].

Весь же «ансамбль», синтез свойств личности, как значительно более широкое понятие, чем способности, мы предпочитаем называть пригодностью или готовностью к деятельности. Понятие «готовность к высокопродуктивной деятельности в определенной области труда, общественной жизни» употребляет, например, Б. Г. Ананьев [20, стр. 16—17], [21, стр. 15]. Понятие «пригодность» — С. Л. Рубинштейн [354, стр. 533], [355, стр. 126], хотя он связывает это понятие не с понятием «ансамбль», а с понятием собственно способностей. А. В. Ярмоленко [474, стр. 78] приводит интересный случай расхождения интересов (склонностей) и способностей. Студент М. обладал, по мнению всех преподавателей, очень хорошими способностями к математике, но откровенно ненавидел ее. Поскольку собственно способности не сочетались у него со склонностями, то, по мнению А. В. Ярмоленко, у студента М. «нет и самой способности, а есть ее внешний образ, ведущий к ложному диагнозу». Мы бы сказали иначе: способности у М. все-таки есть, а вот готовности, пригодности к деятельности действительно нет. И ни о каком «ложном диагнозе» не может быть и речи. Ложный диагноз был бы в том случае, если бы констатировалось, что М. пригоден к математической деятельности. Наш же диагноз — способен, но не пригоден в силу абсолютного отсутствия склонностей.

Изложенное выше понимание структуры пригодности (готовности) к деятельности можно схематически изобразить так:



Итак, пригодность к деятельности (способность успешно осуществлять деятельность, способность в широком смысле слова) не может быть обусловлена только наличием способностей в собственном смысле слова. Она может быть обусловлена только всем комплексом необходимых свойств личности, касающихся как интеллектуальной, так и эмоциональной, и волевой сфер.

В итоге мы можем дать определение основного для нашего исследования понятия. Под способностями к изучению математики мы понимаем *индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики.*

Конкретное содержание понятия математических способностей будет раскрыто дальше, в процессе анализа их структуры.

Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская, говоря об индивидуальных различиях в обучаемости детей, вводят понятие психологических свойств, определяющих при прочих равных условиях успех в учении [44, стр. 182]. Они не употребляют термина «способности», но по существу соответствующее понятие близко к тому определению, которое дано выше. И если говорить об обучаемости, то способности к овладению математикой в нашей интерпретации, по-видимому, не что иное, как свойства творческой обучаемости математике.

Следует подчеркнуть, что способности — это в том числе и индивидуальные особенности психических процессов — восприятия, внимания, памяти, воображения, мышления и т. д. Не надо полагать, что способности — это всегда особенности какой-то своеобразной категории, не сводимые к особенностям восприятия, памяти, мышления и т. д. В свое время, например, В. И. Киреевко был адресован упрек в том, что он изучает не способности к рисованию, а индивидуальные различия в области зрительной памяти, восприятия и т. д. Но зрительная память и есть одна из художественных способностей. Аналогично и мы должны заранее отвести упрек в том, что исследуем не математические способности, а индивидуальные различия восприятия, мышления, памяти, воображения в процессе математической деятельности. Собственно говоря, большинство исследований способностей к конкретным видам деятельности и идет по пути вычленения в качестве компонентов (частных способностей) прежде всего индивидуальных особенностей психических процессов — ощущения, восприятия, мышления, памяти, воображения. Среди компонентов музыкальных способностей мы находим способность к слуховому представлению (Б. М. Теплов [411]), среди компонентов способностей к изобразительной деятельности — целост-

ность восприятия, зрительную память, оценки светлотных отношений (В. И. Киреенко [168]), среди компонентов литературных способностей — образное мышление, творческое воображение (В. П. Ягункова [468]), среди компонентов конструктивно-технических способностей — способность к пространственным представлениям, техническое мышление (В. Н. Колбановский [176-а]; П. М. Якобсон [472]).

Однако все компоненты способностей нельзя сводить только к индивидуальным особенностям психических процессов. Наряду с индивидуальными особенностями психических процессов компонентами способностей являются и более сложные индивидуально-психологические особенности — специальные образования, сформированные применительно к данному виду деятельности и не сводимые к ощущению, восприятию, мышлению, памяти, воображению. Они формируются на базе тех или иных особенностей психических процессов, но включают и эмоционально-волевые моменты, элементы отношения, имеют личностную окраску. Например, математическая направленность ума (раньше мы называли это математическим складом ума) есть своеобразное восприятие окружающего мира, неразрывно слитое с соответствующим отношением и тенденцией (о математической направленности ума подробно будет речь идти ниже).

Из всех наиболее распространенных иностранных научных терминов, соответствующих русскому термину «способность», ближе всего нашему пониманию немецкий термин «Fähigkeit». К сожалению, ни один из трех английских терминов, обозначающих понятие «способность», не может быть принят нами как адекватный нашему понятию способностей без существенных оговорок.

В английской и американской психологической и педагогической литературе применяются обычно следующие термины, каждый из которых имеет свои оттенки: «ability», «capacity» и «aptitude». Термин «ability» представляет собой нечто среднее между нашими понятиями «способность» и «умение» (понимается как умение выполнять действия, включая сюда и решение умственных задач), хотя для обозначения терминов, аналогичных русским терминам «приобретения», «знания», «умения», существуют специальные термины — «attainment», «acquirements», «knowledge». Б. М. Теплов склонен был даже считать, что «ability» вообще не означает способность, а скорее обозначает совокупность навыков и умений [408, стр. 11]. В термине «capacity» слишком подчеркнут аспект врожденных возможностей организма. Третий термин «aptitude» менее распространен и носит, пожалуй, значение «ability», с оттенком склонности к деятельности. Обычно же термин «способность» переводится на английский язык как «ability».

Математические способности (как и вообще все способности к сложным видам деятельности) — сложное структурное психическое образование, своеобразный синтез свойств, интегральное качество ума, охватывающее разнообразные его стороны и развившееся в процессе математической деятельности. Указанная совокупность представляет собой единое качественно-своеобразное целое, — только в целях анализа мы выделяем отдельные компоненты, отнюдь не рассматривая их как изолированные свойства. Эти компоненты тесно связаны, влияют друг на друга и образуют в своей совокупности единую систему, проявления которой мы условно называем синдромом математической одаренности (ряд связанных друг с другом показателей, характеризующих соответствующее психологическое явление).

Термин «одаренность» был общеупотребительным в советской психологии в сороковых и пятидесятых годах. Б. М. Теплов в своих работах [409], [411], [412], [413] убедительно показал, что для осуществления любой более или менее сложной деятельности нужна не одна способность, а целый ряд их. Качественно своеобразное сочетание способностей, от которого зависит возможность успешного выполнения деятельности, Б. М. Теплов назвал одаренностью к этой деятельности. Впоследствии Б. М. Теплов начал термином «одаренность» обозначать совершенно другое понятие — совокупность природных задатков к данной деятельности. Как указывал он сам, единственным соображением в пользу обозначения термином «одаренность» совокупности задатков является прямое значение русского слова «одаренность» («одаренность — «даровитость» — «дарование» — «дар», т. е. то, что дано от рождения). Вслед за Б. М. Тепловым и другие авторы учебников и учебных пособий приняли новую терминологию. П. А. Рудик термином «одаренность» обозначил «врожденные особенности, являющиеся предпосылкой развития способностей» [359, стр. 397]; П. И. Иванов — «прирожденные особенности, которые, развиваясь, проявляются в способностях», [139, стр. 423]; Н. Д. Левитов — «природный фонд способностей, представляющий собой анатомо-физиологические задатки» [249, стр. 82].

Нам кажется, что на современном уровне развития психологии термин «одаренность» в его последнем значении в большинстве случаев пока еще лишен реального содержания. Мы еще не знаем, какие конкретно анатомо-физиологические особенности являются задатками математических способностей, и термин «одаренность» (в смысле совокупности задатков) является пока еще бессодержательным. Может быть, поэтому некоторые ведущие ленинградские психологи отрицательно относятся вообще к понятию задатка в его анатомо-физиологическом значении, утверждая, что это понятие «лишь логический домысел... словесное

прикрытие неизвестных причин» (А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев [174, стр. 63]). Поэтому мы и нашли рациональным возвратиться к прежнему значению термина «одаренность». Математической одаренностью мы будем называть качественно-своеобразное сочетание математических способностей, которое открывает возможность успешного выполнения математической деятельности (или, имея в виду школьников, возможность успешного творческого овладения предметом).

§ 3. Проблема и задачи исследования

Как известно, основной, практически важной задачей психологии в области изучения способностей является установление условий их формирования, воспитания и развития на разных возрастных этапах. Это касается и изучения математических способностей. Основная задача, на решение которой должна быть направлена научная разработка проблемы математических способностей, — это задача создания психологических основ активной педагогики способностей. Перед тем и для того, чтобы ответить на поставленный выше вопрос, надо знать, что же такое конкретно математические способности, какие индивидуально-психологические особенности обуславливают успешное овладение математикой, т. е. делают человека способным к математике.

Из указанной общей проблемы исследования математических способностей школьников вытекают следующие конкретные задачи, которые мы попытались реализовать в своей работе.

1. Как указывал еще И. П. Павлов, подлинно научный подход к изучению явлений предполагает их анализ, разложение на более простые компоненты. Соответственно этому аналитико-синтетический подход к исследованию сложного психологического явления требует прежде всего анализа его структуры, выделения составляющих компонентов.

Принцип предварительного выделения и изучения отдельных свойств, которые должны быть положены в основу типологии, применил к изучению типов высшей нервной деятельности Б. М. Теплов. С. Л. Рубинштейн также говорил о необходимости в первую очередь исследовать структуру сложного явления, каким являются способности [356, стр. 9]. К анализу структуры (выделению факторов) сводят в последнее время исследования способностей большинство зарубежных ученых.

Поэтому нашей первой и основной задачей было исследование структуры математической одаренности (как качественно-своеобразного сочетания способностей) в школьном возрасте, иначе говоря — аналитическое «разложение» этого интегрального свойства ума на отдельные компоненты, занимающие су-

ственное место в его структуре. Эта задача частично сводилась к более определенной и конкретной задаче — выяснить, какие особенности характеризуют умственную деятельность способных к математике учащихся в процессе решения ими различных математических задач.

При исследовании этого вопроса мы использовали факторный анализ. Как мы говорили ранее, факторный анализ, рассматриваемый в качестве единственного метода исследования, не оправдывает себя при изучении высших и сложных способностей человека. Поэтому мы сочли наиболее рациональным избрать другой путь исследования структуры математических способностей, основанный в первую очередь на качественном анализе математической деятельности школьников, качественном анализе процесса решения ими математических задач. Факторный анализ использовался нами только как дополнительный метод.

2. Второй задачей исследования являлось создание экспериментальной методики исследования математической одаренности, которая могла бы иметь самостоятельное значение.

3. Третья задача исходила из идеи Б. М. Теплова о многообразии структур способностей, о том, что высокие достижения могут быть осуществлены различными сочетаниями компонентов способностей. Она заключалась в том, чтобы, установив своеобразие проявлений математической одаренности, выявить типологические различия в структуре способностей.

4. Четвертая задача касалась возрастных различий в проявлениях математических способностей школьников. Мы стремились наметить возрастную динамику развития компонентов математических способностей, проследив основные этапы их развития от элементарнейших их проявлений в младшем школьном возрасте до более сложных и многообразных форм в старшем школьном возрасте.

Что касается исследования условий формирования и целенаправленного развития математических способностей, то эти задачи на данном этапе исследования не могли быть поставлены в полном объеме. Этот вопрос будет предметом нашего специального исследования в дальнейшем.

Раздел II

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ И ЕГО ОРГАНИЗАЦИЯ

Глава I

ОБЩАЯ МЕТОДИКА И ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование математических способностей осуществлялось на протяжении 12 лет (1955—1966 гг.). Организуя исследование, мы исходили из представления о том, что наиболее плодотворным при изучении сложной проблемы способностей является сочетание ряда методов при доминировании одного из них. Мы полагаем, что только при таком подходе к проблеме можно раскрыть структуру способностей.

Основной материал получен путем экспериментального исследования. Наряду с этим применялись и неэкспериментальные методы исследования.

Экспериментальным методом исследования математических способностей был качественный и количественный анализ процесса решения учащимися с различными способностями к математике специальных экспериментальных математических задач.

Эксперименты носили характер «срезов», что позволило в сравнительно небольшой отрезок времени довольно полно раскрыть сущность происходящих в процессе развития изменений. Общее направление возрастного развития компонентов математических способностей исследовалось двумя путями: а) путем сравнения результатов «срезов», полученных от различных учащихся, стоящих на разных ступенях развития, и б) путем сравнения результатов «срезов», полученных от одних и тех же учащихся на разных ступенях их развития.

Наряду с чисто экспериментальным исследованием математических способностей путем «срезов» проводилось длительное (на протяжении нескольких лет) изучение нескольких групп учащихся. Это изучение, как правило, сочеталось с экспериментальным исследованием. Так, например, мы на протяжении нескольких лет изучали группу особо одаренных к математике учеников (25 чел., из них 16 чел. исследовались также и экспериментально), в течение года — группу средних и относительно неспособных учащихся (19 чел.).

Длительное изучение группы младших школьников осуществляла в 1963—1966 гг. под нашим руководством аспирантка Института психологии И. В. Дубровина. Соответствующее исследование группы учащихся старшего школьного возраста (в IX—X классах) вел в 1962—1964 гг. по нашим установкам опытный преподаватель математики из г. Курска С. И. Шапиро. В последнем случае экспериментатор, выступая в роли преподавателя математики, являлся активным организатором процесса обучения.

Всего было охвачено исследованием 201 человек (в том числе 192 чел. экспериментальным исследованием).

Длительное изучение школьников включало наблюдение за ними на уроках (а в отдельных случаях и дома), беседы с ними, их родителями, учителями, товарищами. По специальной инструкции тщательное наблюдение за развитием детей вели родители.

Изучение детей осуществлялось в широком личностном плане. Прослеживалось развитие их склонностей и интересов (учебных и внеучебных), отношение к различным учебным предметам, в частности к математике, проявление характерологических черт (в частности, настойчивости, трудолюбия, инициативности и т. д.). Программа изучения школьников была построена с учетом рекомендаций А. Г. Ковалева и В. Н. Мясищева [174, стр. 151—153].

Эксперименты, сбор дополнительного материала, наблюдение за учащимися проводились начиная с 1956 г. в основном в московских школах, в частности в школах № 649, 328, 282, 100, 330, 665, 358, 80, 434, 440, 91, в школе-интернате № 12, а также в школе № 6 г. Курска¹.

Что касается неэкспериментальных методов исследования, то здесь большую роль играл анкетно-опросный метод, который имел целью путем письменного или устного опроса определенного круга лиц собрать материал для решения некоторых вопросов. Разумеется, как указывал еще С. Л. Рубинштейн [354, стр. 33], материалы, полученные этим методом, не могут иметь самостоятельного значения для решения проблемы, но представляют собой чрезвычайно ценные дополнительные данные.

Прежде всего, несомненно, что решению вопроса о структуре способностей к изучению математики в значительной мере могут помочь суждения на этот счет практических работников — учителей математики, педагогов-методистов этого предмета. Их большой опыт (нередко — десятки лет работы в школе), цен-

¹ Мы считаем своим долгом выразить признательность за помощь в организации исследования товарищам, работавшим в соответствующее время директорами школ, в частности тт. Е. С. Хорохординой, А. Т. Мостовому, М. И. Рузаеву, Л. Д. Поляковой, М. Г. Струниной.

ные наблюдения и обобщения представляют собой богатейший материал. С этой целью в течение 1958—1960 гг. мы беседовали с преподавателями математики (62 чел.) Москвы и ряда других городов и областей РСФСР, интересовались тем, что понимают учителя под способностями к изучению математики, по каким критериям судят о способностях, каких учеников и за что именно считают способными и неспособными.

В 1965 г. был произведен письменный опрос учителей по более широкой программе. Среди учителей были распространены опросные листы, на которые было получено 56 ответов. Учителя выражали свою точку зрения на вопросы о том, в чем конкретно проявляются математические способности, какие качества отличают способных учащихся и насколько эти качества являются специфичными именно для математической деятельности, какие типы математических способностей им приходилось наблюдать.

В этом же году был произведен письменный опрос (по специально составленной анкете) ряда известных советских математиков. Одновременно ученым сообщалось, что любые их соображения по интересующему нас вопросу, все, что они найдут нужным и возможным сообщить дополнительно, представит для нас большую ценность.

Ученым были предложены, в частности, следующие вопросы:

- 1) Какие качества ума, по вашему мнению, делают человека способным к математике?
- 2) В какой мере математические способности являются общими или специфическими интеллектуальными способностями?
- 3) Каковы ваши соображения о наличии различных типов математических способностей?

Анкеты-опросники были отправлены 50 ученым. Ответы получены от 21 человека, в том числе 15 подписанных ответов и 6 ответов без подписи¹.

Кроме того, мы проанализировали по литературным источникам биографии 84 крупнейших математиков и физиков (русских и зарубежных) с целью выяснить, когда у них начали проявляться математические способности и в чем это выражалось, а также с целью выявления некоторых особенностей их математического мышления.

Так как специальные способности определяются теми объективными требованиями, которые предъявляет человеку соответствующая область деятельности (Б. Г. Ананьев [20,

¹ Свои соображения по предложенным вопросам высказали академики П. С. Александров, В. И. Смирнов, члены-корреспонденты АН СССР Б. Н. Делоне, А. А. Марков, И. Р. Шафаревич, доктора физико-математических наук, профессора Н. Я. Виленкин, М. Я. Выгодский, Е. Б. Дынкин, А. А. Кириллов, А. Г. Курош, В. И. Левин, А. И. Маркушевич, Г. Е. Шиллов, кандидаты физико-математических наук А. С. Пархоменко, С. В. Смирнов. Выражаем всем этим товарищам, равно как и тем, кто прислал ответы без подписи, глубокую благодарность.

стр. 16—17]), был собран некоторый материал по анализу математики как учебного предмета в плане того, какие требования она предъявляет к умственной деятельности человека, какие качества и свойства ума необходимы человеку для успешной математической деятельности. Эти материалы были положены в основу гипотезы компонентов математических способностей, подвергнутой в дальнейшем экспериментальной проверке.

В числе других неэкспериментальных методов применялись и массовые обследования. В частности, был собран материал, характеризующий соотношение между успеваемостью по разным учебным предметам более чем у 1000 учащихся VII—X классов школ г. Москвы.

В качестве дополнительного материала использовались материалы некоторых местных математических олимпиад и конкурсов; материалы, полученные в результате систематического просмотра тетрадей по математике у большого числа учащихся VI, VII, VIII классов, а также материалы, полученные в результате наблюдения за процессом усвоения учащимися математики на уроках.

Глава II

ГИПОТЕЗА КОМПОНЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ КАК ОСНОВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Неред тем как избрать конкретную методику экспериментального исследования, мы поставили себе задачей ориентировочно наметить те области, где наиболее ярко могут выступать различия между учащимися, способными к усвоению математического материала и малоспособными к этому. Иными словами мы предположительно выделили некоторые из компонентов, входящих в общую структуру этих способностей. Анализ психологической и математической литературы, а также поисковые эксперименты показали, в каком направлении следует «искать» способности.

Было предположено, прежде всего, что учащиеся с различными способностями способные к усвоению математики, характеризуются разной степенью развития способности к обобщению математического материала и соответственно разной способностью запоминания обобщений.

О способности к обобщению упоминается в ряде работ. Еще в 1908 г. русский математик Д. Д. Мордухай-Болтовский писал о такой характеризующей математиков черте, как «остроумие», понимая под этим способность «отыскивать сходное в самых отдаленных сферах» [300]. Интересную попытку выделить способности к изучению арифметики сделали А. Ф. Лазурский и его сотрудники [235, стр. 168—169]. В числе «некоторых психи-

ческих функций, мало упражняемых на других предметах обучения», они указывают и «способность к обобщениям», не вскрывая, однако, с достаточной полнотой психологическую сущность этой «функции». Упомянем работу американского психолога Э. Л. Торндайка [715], в которой автор говорит о «способности к обобщению» как об одной из «алгебраических» способностей.

Весьма ценный материал имелся в работах П. А. Шеварева [441], [442], [443], [445], [446], Н. А. Менчинской [289], [290], [291] и их сотрудников. П. А. Шеварев установил, что при решении алгебраических задач наряду с единичными ассоциациями имеют значение и ассоциации обобщенные. Указания на индивидуальные различия в области обобщения математического материала имелись в работах Л. П. Доблаева [114], А. В. Степанова [393], Н. Ф. Талызиной [399], [401], В. Л. Ярошук [175].

Мы предположили далее, что между способными и малоспособными учащимися должны наблюдаться определенные различия в скорости процесса «свертывания», сокращения рассуждений и системы соответствующих им действий при решении задач. У способных учеников процесс «свертывания» рассуждений и системы действий, вероятно, быстро приобретает весьма широкий характер.

Большое значение для понимания этого вопроса имеют те же, указанные выше, работы П. А. Шеварева и Н. А. Менчинской. П. А. Шеварев показал, что в процессе решения алгебраических задач учащиеся не выполняют всей той цепи умозаключений, которые образуют полную, развернутую логическую структуру решения. Н. А. Менчинская установила, что и в процессе решения учениками арифметических задач происходит постепенное сокращение промежуточных звеньев рассуждения. Н. Ф. Талызина [399], [401], Н. К. Индик [145], А. Н. Соколов [388] проследили путь постепенного сокращения процесса рассуждения на материале решения задач по геометрии, химии и физике.

Наконец, было сделано предположение, что учащихся с различными способностями к математике в разной степени характеризует способность к переключению с прямого на обратный ход мысли. По-видимому, способные учащиеся сравнительно легко и свободно осуществляют указанную операцию, в то время как для большинства учащихся переход от обычного доказательства к доказательству от противного, от прямой к обратной теореме представляет известные трудности.

В психологии различают два вида ассоциаций: «прямые» ассоциации — от предшествующего к последующему раздражителю и «обратные» ассоциации — от последующего к предшествующему раздражителю. Е. Н. Кабанова-Меллер [147] на географическом материале показала, что не все учащиеся могут самостоятельно переходить от «прямых» к соответствующим «обратным» ассоциациям. Сильные, хорошо успевающие школь-

ники, устанавливая связи в одном направлении, довольно легко переходят и к осознанию связей в обратном направлении. Слабым учащимся это недоступно, у них приходится формировать эти «обратные» связи путем специальных упражнений.

Указанное гипотетическое представление о компонентах математических способностей и послужило первоначальным основанием для разработки системы экспериментальных задач, которая была построена с тем расчетом, чтобы исследовать индивидуальные различия в этих предварительно намеченных областях.

На более позднем этапе исследования возникла необходимость представить гипотезу компонентов в более полном виде.

Материал для этого дали, во-первых, уже проведенные эксперименты, предварительно раскрывшие некоторые другие особенности умственной деятельности способных к математике учащихся, во-вторых, первые же этапы наблюдения за особо одаренными к математике детьми младшего школьного возраста. И в том и в другом случае материалы исследования показали, что способных к математике школьников может характеризовать своеобразное аналитико-синтетическое восприятие условий задачи, когда учащиеся быстро схватывают основные отношения, составляющие существо задачи, не упуская в то же время из виду конкретных данных.

Помимо этого, способных учащихся может характеризовать своеобразная гибкость умственных процессов, способность быстро переключаться с одной умственной операции на другую, свобода от навязчивого действия шаблонов и трафаретов.

Наконец, какую-то роль в структуре математических способностей должна играть способность к пространственным представлениям, хотя эта способность по-разному выражалась у способных учащихся, что возможно связано с наличием разных типов математических способностей.

Однако надо признать, что до некоторых пор еще нельзя было говорить о полной гипотезе структуры математических способностей. Мы имели дело лишь с отдельными гипотетически предположенными компонентами. Для дальнейшего исследования надо было иметь относительно полную гипотезу структуры (так как в зависимости от нее должна была формироваться полная система экспериментальных задач).

Чтобы придать ей относительно законченный вид, было решено подойти к построению гипотезы с другой стороны. Не претендуя на глубокий и содержательный анализ математики как науки (что по силам лишь специалистам-математикам и что выходит за рамки предпринятого исследования), мы поставили перед собой скромную цель — отразить основную специфику математики в плане того, какие требования она предъявляет к умственной деятельности человека, какими психологическими

особенностями необходимо обладать для успешного овладения ею в школе.

В этом смысле вопрос о сущности математических способностей является производным от вопроса о сущности математической науки.

Как указывалось выше, мы исследуем математические способности как способности к творческому овладению школьным курсом математики. Конечно, есть существенные различия между математической наукой и математикой, понимаемой как предмет изучения в общеобразовательной школе. Это не раз отмечалось в методической литературе. И. А. Гибш писал, что «отдельные ветви школьного курса математики (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия) как учебные предметы не воспроизводят, конечно, соответствующих наук» [88, стр. 108]. О том же писал В. Л. Гончаров в статье «Математика как учебный предмет», но при этом он сделал важное добавление: хотя наука и учебный предмет во многом могут быть противопоставлены, «но вместе с тем они тесно связаны между собой и находятся в постоянном взаимодействии» [98, стр. 40].

По классическому определению Ф. Энгельса, предметом изучения математики служат количественные отношения и пространственные формы действительного мира [4, стр. 37]. Это определение приводится и в Большой советской энциклопедии [178, стр. 464]¹. И дальше Энгельс указывает, что для того, чтобы исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо отделить их от содержания.

Абстрактный характер математических закономерностей обуславливает их большую общность. Посредством процесса обобщения признаки и свойства объектов, выделенные путем абстракции, обобщаются, т. е. распространяются на всю совокупность объектов некоторого класса. Сущность математики составляют абстракции и обобщения, и математическое мышление поэтому есть в высшей степени абстрактное и обобщенное мышление.

Следствием абстрактного и обобщенного характера математики является ее специфическая особенность—наличие знаковой символики, оперирование специальными математическими знаками, условными символическими обозначениями количественных величин и отношений и пространственных свойств. В этом смысле Г. Кепперс [624] говорит, что математику (в частности, алгебру) характеризует «символический перевод» (т. е. перевод на язык символов) чисел, отношений, вербально выраженных математических законов.

¹ Насколько нам известно, в настоящее время математики склонны более широко понимать предмет своей науки. Однако в отношении школьного предмета математики, о котором идет речь, указанное определение, по-видимому, сохраняет силу.

Характерной особенностью математической науки является ее формализация. Как отмечает В. Н. Молодший, «примерно со второй половины XIX века ученые-математики пришли к формальному обоснованию математических дисциплин. При формальном обосновании математической теории не сообщают, о каких объектах идет речь, не говорят, каков конкретный смысл отношений и связей, в которых могут выступать изучаемые объекты... Но зато стараются наиболее точно и полно описать структуру основных отношений и связей, которые являются общими для объектов» [299, стр. 131].

Существенная особенность математики — свойственный ей аксиоматический метод, являющийся стилем современной математики (А. А. Ляпунов [269, стр. 115]). Аксиоматический метод, как указывал А. А. Марков [276, стр. 338], — это один из наиболее распространенных способов логической систематизации математики. Сущность его — наличие в основе теории некоторых точно сформулированных основных, принимаемых без доказательств, положений (так называемых аксиом), из которых все дальнейшее содержание теории выводится логически, путем рассуждений, именуемых доказательствами [125, стр. 121]. Соответственно и аксиоматическое определение заключается в том, что «каждое понятие в данной системе понятий, из которых ни одно не служит родовым для других понятий рассматриваемой системы, определяется при помощи отношений, которые связывают это понятие с остальными понятиями определяемой системы» (И. А. Гибш, А. Д. Семушин, А. И. Фетисов [89, стр. 9]).

А. С. Есенин-Вольпин подчеркивает, что сейчас аксиоматический метод распространился на всю математику [125, стр. 122]. Однако А. Н. Колмогоров отмечает, что математика в целом не может быть до конца аксиоматизирована и можно говорить лишь о системах аксиом отдельных математических теорий [177, стр. 613—616].

Одной из особенностей математики является алгоритмичность решения многих ее задач. Алгоритмом, как известно, называется определенное указание относительно того, какие операции и в какой последовательности надо выполнить, чтобы решить любую задачу некоторого типа. Алгоритм представляет собой обобщение, так как применим ко всем задачам соответствующего типа. Конечно, очень большое количество задач не алгоритмируется и решается с помощью специальных, особых приемов. Поэтому способность находить пути решения, не подходящие под стандартное правило, является одной из существенных особенностей математического мышления, как об этом говорит академик А. Н. Колмогоров [180, стр. 9].

В итоге, если говорить о компонентах математических способностей, вытекающих из основных характеристик математического мышления, то сюда следует отнести:

1) способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;

2) способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном;

3) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

4) способность к «последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению» (А. Н. Колмогоров [180, стр. 10]), связанному с потребностью в доказательствах, обосновании, выводах.

Добавим к этой схеме компоненты, выделенные нами ранее:

5) способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;

6) способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу с прямого на обратный ход мысли).

7) гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов. Эта особенность мышления важна в творческой работе математика;

8) математическая память. Можно предположить, что ее характерные особенности также вытекают из особенностей математической науки, что это память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы;

9) способность к пространственным представлениям, которая прямым образом связана с наличием такой отрасли математики, как геометрия (особенно геометрия в пространстве).

Как можно видеть, мы стремились исключить из этой схемы категории самого общего характера (как-то: способность к абстрактному мышлению и т. д.), пытаясь представить их «разложенными» на более определенные и четкие категории.

Такой представлялась нам гипотетическая схема компонентов структуры математических способностей. Она и послужила основой экспериментального исследования.

Глава III

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Как уже указывалось, основным методом исследования являлся анализ процесса решения экспериментальных задач учащимися с разными уровнями развития способностей к математике.

Основная идея экспериментального исследования заключалась в следующем: если решение задачи есть производное двух факторов — особенностей самой задачи и особенностей решающего ее человека, то следует последовательно фиксировать то один, то другой из этих факторов — предлагать одну и ту же задачу разным испытуемым и разные задачи одному и тому же испытуемому.

Организуя экспериментальное исследование, мы исходили из следующих принципиальных положений.

1. В соответствии с основным положением советской психологии о том, что изучать способности надо в той деятельности, способности к которой изучаются, и на основе анализа этой деятельности мы считали, что экспериментальные задачи должны, как правило, соответствовать характеру математической деятельности школьника.

Математическая деятельность школьника в процессе школьного обучения заключается, по сути говоря, в решении различного рода задач в широком смысле слова, в том числе задач на доказательство, вычисление, преобразование, построение. Поэтому в качестве экспериментальных задач в предпринятом исследовании были взяты главным образом математические задачи. Анализ решения этих задач дает возможность понять, в чем заключается своеобразие мыслительной деятельности способных учащихся в отличие от малоспособных, выявить индивидуальные особенности умственной деятельности учащихся в процессе решения задач.

Наши экспериментальные задачи, специально отобранные или составленные, примерно в равной степени представляют различные области школьной математики — арифметику, алгебру, геометрию, достаточно полно охватывают сущность математической деятельности школьника и в каком-то смысле моделируют ее.

Среди экспериментальных задач довольно много арифметических. Оправданно ли это, особенно в связи с усилившимся в последнее время критическим отношением к решению арифметических задач в школе?

Надо сказать, что в отношении арифметических задач всегда высказывались различные мнения. В последнее время это отчетливо проявилось в дискуссии на страницах журнала «Математика в школе» (№ 1, 1964). Одни математики и методисты считают решение сложных арифметических задач в школе мало полезным делом ввиду того, что существует универсальный, более простой и более общий, алгебраический метод решения задачи с помощью составления уравнений.

Другие, сторонники широкого применения в школе арифметического решения, считают, что оно тренирует способности к рассуждению, развивает логическое мышление.

Возможно, значение арифметических задач несколько преувеличено, и излишнее увлечение их решением в школе имеет место. Но нельзя отрицать и их большого значения для развития умения рассуждать, логически мыслить. Впрочем, здесь не место вступать в дискуссию по этому вопросу. Арифметические задачи в нашем экспериментальном исследовании не самоцель. Они интересуют автора не столько сами по себе, сколько как средство выявления особенностей мышления, особенностей процесса рассуждения. Решение арифметических задач хорошо раскрывает процесс размышления, рассуждения, дает возможность проникнуть в «лабораторию мысли».

2. Экспериментальные задачи должны быть различной (малой, средней, повышенной) степени трудности, в том числе должны быть и нестандартные задачи, требующие элементов математического творчества. Они должны располагаться своеобразной «лестницей» от самой простой, доступной и малоспособным, до наиболее сложной, доступной не всякому способному ученику. Не всегда легко оценить ранг трудности каждой задачи, как это отмечает, например, и Л. Б. Ительсон [146]. В некоторых случаях возможны разные мнения о степени трудности задач.

Наша оценка степени трудности задачи основана, во-первых, на объективной оценке степени сложности данных в ней отношений. Покажем это на одном примере. Дается «лестница» задач на применение простейшей формулы сокращенного умножения — квадрата суммы двух чисел. Вот как объективно нарастают трудности (в скобках показывается, в чем выражается усложнение каждой последующей задачи по сравнению с предыдущей):

$$(a+b)^2 =$$

$$(2a+3b)^2 = \text{(введены коэффициенты)}$$

$$(3a^2+4b^3)^2 = \text{(введены показатели степени)}$$

$$(7a^m+2b^n)^2 = \text{(показатели степени получили буквенное обозначение)}$$

$$\left(\frac{1}{3}a^m + \frac{1}{7}b^n\right)^2 = \text{(введены дробные коэффициенты)} \text{ и т. д.}$$

Во-вторых, в сомнительных случаях производилась реальная проверка объективной трудности задач путем решения их многими учащимися в предварительных (пробных) экспериментах. Несколько задач, в отношении которых представлялось затруднительным объективно оценить их трудность, давались для решения большой группе учащихся, не принимавших участие в основных экспериментах, и вычислялось, какой процент учащихся решил данную задачу. Видимо, трудность задачи характеризовалась величиной, обратно пропорциональной количеству правильных решений. Та задача, которую решили, например, 75% учащихся, субъективно (для них) легче, чем та, которую решили 25%.

Все это дало нам возможность довольно уверенно распределить задачи по степени трудности (кроме, разумеется, тех серий, где этот принцип сознательно не соблюдался). Поэтому у нас были сравнительно редки случаи, когда испытуемый решил бы задачу, находящуюся на более «верхней ступени», и не решил — находящуюся на более «низкой ступени».

3. Экспериментальные задачи должны отвечать своему прямому назначению — процесс их решения должен помогать выяснить вопрос о структуре способностей; иными словами, в процессе их решения должны проявляться именно те особенности умственной деятельности, которые специфичны для математической деятельности. Как отметил Б. М. Теплов [406, стр. 513], тесты в тестологии, широко распространенной на Западе, не выступают как показатели определенного психологического свойства, они интересуют тестолога только с точки зрения корреляции их с другими тестами, сам же вопрос о том, показателем чего является данный тест, часто вообще не рассматривается. В отличие от этого наша экспериментальная методика создавалась с таким расчетом, чтобы показатели, полученные по этой методике, являлись бы возможно более точными психологическими индикаторами изучаемого явления (индивидуальных особенностей умственной деятельности).

Перед началом экспериментального исследования была установлена валидность (пригодность, законность) экспериментальных задач. Как известно, валидность задач-испытаний определяется оправдывающими их результатами на практике. Пробные эксперименты показали достаточно убедительно, что чем способнее в отношении математики испытуемые, тем успешнее они решают экспериментальные задачи. С другой стороны, учащиеся, дающие высокие показатели по нашим экспериментальным задачам, неизменно оказывались способными математиками и на практике; дающие низкие показатели — и в школе принадлежали к числу менее способных.

Была выборочно апробирована надежность методики (по сериям, дающим количественные показатели) с точки зрения стабильности показателей. Коэффициент надежности экспериментальных задач был вычислен по Гаррету [575, стр. 337—342]. К сожалению, простейший метод — «метод повторения теста» — в условиях нашего исследования не мог быть применен, так как на вторичном решении явно сказывался опыт первоначального решения задач, а при достаточно большом интервале (6 месяцев и больше) определенно сказывалось влияние возраста и приобретенных за это время в школе знаний, умений и навыков. Поэтому применялись «метод рационального эквивалента» в тех случаях, когда имелись две эквивалентные формы одного и того же типа задач, и «метод расщепления теста на половины» [575, стр. 339—342]. Корреляция в обоих случаях (между эквивалент-

ными половинами теста¹ или между двумя его эквивалентными формами) оказалась в пределах 0,802—0,926, что показывает вполне достаточную надежность.

4. Для целей предпринятого исследования необходимо фиксировать не только и не столько конечный результат выполнения испытуемыми того или иного задания, но прежде всего сам процесс его выполнения. Наши задачи были ориентированы не столько на количественное выражение изучаемого явления, сколько на то, чтобы вскрыть его качественные особенности, без чего невозможно получить полную картину изучаемого явления. Известно, что изучение процесса решения задач очень затруднено в связи с тем, что этот процесс далеко не всегда выражен объективно с достаточной полнотой, многие звенья мыслительного процесса, направленные на решение задачи, ускользают от исследователя. Если математическая структура процесса решения, последовательность действий, из которых складывается решение, получает обычно достаточно полное выражение в записях решения, то умственные процессы, которые характеризуют процесс решения, — обдумывание, размышление, сопоставление разных возможностей и т. д. — не получают объективного выражения в записях. На это, в частности, обращали внимание Н. А. Менчинская [291], В. Л. Ярошук [475] и многие другие.

Задача заключается в том, чтобы раскрыть качественные стороны этого сложного интеллектуального процесса, для чего необходимо, насколько это возможно, выявить реальный процесс мышления при решении испытуемым экспериментальных задач. Обычно в подобных случаях испытуемому предлагается производить решение вслух, не оставляя без вербализации никакой мысли, какой бы беглой или неразумной она ни была (К. Дункер [487], [561]). Однако это не так просто, как может показаться с первого взгляда. И самые большие трудности связаны с тем, что установка на вербализацию мыслительного процесса часто произвольно подменяется у испытуемого установкой на самонаблюдение мыслительного процесса.

Трудности организации мышления вслух при работе с учащимися связаны со следующими обстоятельствами: а) некоторые учащиеся не умеют, не привыкли думать вслух, мышление вслух для них неестественно, привычным является мышление про себя. Требование думать вслух с удовлетворяющей экспериментатора полнотой (разумея под этим не полноту рассуждения, так как оно может быть свернуто и это-то и важно фиксировать, а полноту вербализации реального процесса мышления) может выбить таких учащихся из колеи. Навязывать учащимся неестественный для них процесс — это значит сознательно мириться с возмож-

¹ Типы экспериментальных задач в нашем исследовании также называются тестами — см. об этом ниже.

ным искажением реальной картины мышления; б) может показаться, что школьники (особенно младшие) приучены в школе размышлять вслух — от них постоянно требуют этого. Однако это не так. Думать, решать вслух и объяснять вслух решение — совершенно разные процессы. Еще русский методист Ф. Н. Егоров отмечал, что решение задачи и изложение решения не одно и то же. Не подготовленный всесторонне к эксперименту ученик может понять инструкцию «думать вслух» как настойчивое приглашение пояснить, как решается задача. Он уже привык к тому, что, когда учитель требует от него в классе «решать вслух», это означает «решение для других», т. е. такое объяснение хода решения, чтобы оно было понятно другим; в) в некоторых случаях школьник (особенно более старшего возраста) может подумать, что от него требуется наблюдение и описание собственных мыслительных процессов при решении задачи, исчерпывающий рассказ о том, как он думает при этом. В таком случае мы будем иметь дело с самонаблюдением, да еще неумелым самонаблюдением. Само намерение наблюдать, как известно, может совершенно исказить картину мышления. Последователь Ж. Пиаже — Л. Жоанно в своей работе о математических рассуждениях подростка [620] пытался обойти эти трудности следующим образом: задача дается подростку, и он остается наедине с нею для поиска решения. По получении какого-то результата начинается свободная беседа экспериментатора с испытуемым с целью проследить ходы его мысли — какими путями он шел, что помешало ему правильно решить задачу [620, стр. 25]. Сам Жоанно отмечает существенный недостаток этой методики — проницательные дети часто угадывают, чего хочет от них экспериментатор, и дают такой ответ, которого от них ждут.

Как мы пытались преодолеть указанные выше трудности? Прежде всего, испытуемому тщательно объяснялось, что именно от него требуется: чтобы он не рассказывал о том, как он думает, а просто думал вслух, не стараясь пояснить экспериментатору процесс решения. Инструкция была такова: «Думай вслух! Ты, вероятно, делаешь это, когда дома один решаешь задачи? Пиши на бумаге все, что приходит в голову в связи с решением. Меня интересует не твое окончательное решение, не время (быстрота) решения, а сам процесс решения. Ничего никому не старайся пояснять, словно никого здесь нет, кроме тебя; не рассказывай о решении, а решай». Далее испытуемому на практике показывалось, что от него хотят, он постепенно приучался размышлять вслух. Экспериментатор несколько тренировал его в этом отношении, добиваясь того, чтобы испытуемый естественно мыслил вслух (пусть отрывочно, с междометиями, отвлечениями), не наблюдая и не комментируя свой процесс мышления. Экспериментатор особо старался не навязывать испытуемому

установку на подробное решение из опасения исказить его реальный ход.

Если вербализация явно оказывалась помехой мыслительному процессу испытуемого (это было непосредственно видно или ученик сам говорил об этом), то в таких случаях экспериментатор предпочитал не настаивать на этом и не пытался вмешиваться в интимный ход его мыслей, предоставляя ему поступать так, как он находит удобным. В этом случае приходилось больше ориентироваться на запись решения и на беседу с испытуемым после решения.

В результате установка на «мышление вслух» почти не нарушала в наших экспериментах естественного хода процесса мышления испытуемых.

Испытуемые решали задачи с записью всего хода решения, рассуждая при этом вслух. При этом процесс решения хронометрировался по методу Е. И. Игнатьева [142], с успехом использованному также А. В. Степановым [393]: под верхний листок блокнота, на котором производилось решение, подкладывался лист копировальной бумаги. Через определенные промежутки времени нижние листки, на которых копировалось решение, выдергивались. Таким образом, на каждой листке была запись действий, проведенных последовательно за равные промежутки времени. В дальнейшем мы упростили этот метод, ограничившись проведением на бланке решения через одни и те же интервалы времени красной чертой, отделявшей действия, произведенные за равные промежутки времени.

Мысли «вслух» тщательно регистрировались экспериментатором (письменно или с записью на магнитофонную ленту). В случае надобности (например, если вербализация тормозилась, если запись требовала пояснений) мы ставили испытуемым дополнительные вопросы, направленные на выяснение отдельных особенностей процесса рассуждения («Что тебя затрудняет?», «Поясни, что ты делаешь и почему?» и т. д.), стараясь не навязывать испытуемому своего хода мысли наводящими вопросами.

Таким образом, о реальном процессе мышления при решении экспериментальных задач мы судили: 1) по объективной записи решения, характеру выполненных испытуемым действий, схем и чертежей; 2) по записи словесно выявленного процесса размышления при решении задач; 3) по характеру ответов на вопросы по ходу решения; 4) по материалу беседы по поводу решения после его окончания. В результате мы получали довольно полное и объективное представление о характере мыслительной деятельности школьников в процессе решения ими экспериментальных задач. Все это, разумеется, имело место и в случае неумения школьника решить задачу, когда он избирал неверные пути, исходил из ошибочного хода мысли.

5. На решении задач, как известно, сказывается сложный комплекс факторов, в частности прошлый опыт, совокупность знаний, умений и навыков. Но изучаем мы способности, а не знания, умения и навыки, хотя, как уже говорилось выше, это очень тесно связанные друг с другом понятия. Вычленить фактор способностей в этом сложном комплексе причин трудно. По-видимому, следует подобрать такие задачи, чтобы на решении их в первую очередь сказывались именно способности.

Очевидно, что совершенно устранить влияние прошлого опыта, знаний, навыков невозможно. Основная трудность, которая возникает на этом пути, сводится к следующему: если экспериментальные задачи таковы, что на их решении не сказывается влияние математических знаний, умений, навыков, то эти задачи будут относиться уже к иной, не математической деятельности и это будет противоречить основному принципу исследования. На это обращал внимание также и Н. Д. Левитов в связи с освещением проблемы технических способностей [248], указывая на необходимость сочетать близость к нормальным условиям деятельности и относительную независимость от знаний, умений и навыков. Г. Роуз [681, стр. 4] указывал на два типа математических задач, каждый из которых в большей или меньшей степени связан со способностями: а) задачи на знания (репродуцирование формул, теорем и доказательств) и б) задачи на интеллект (созвучные тестам на измерение интеллекта) более творческого характера. Но здесь же Роуз заявляет, что трудно сконструировать задачи, в которых отсутствовал аспект знаний.

Надо полагать, обречены на неудачу все попытки найти такие математические задачи, решение которых определялось бы только способностями и совершенно не зависело бы от наличных знаний, умений и навыков. Если так, то надо отказаться от поисков таких задач и стараться лишь максимально «ослабить» это влияние, максимально уравнивать все прочие условия. Не «снять» влияние знаний, умений и навыков, а в каком-то смысле уравнивать всех испытуемых в этом отношении — вот к чему сводились наши цели при подборе экспериментальных задач. Иначе многие различия в характере решения задач нужно было бы отнести за счет различия в знаниях, умениях и навыках.

Достигли мы этого следующими путями:

а) Подбирали экспериментальные задачи, не требующие для своего решения никаких особых знаний, умений и навыков или только таких знаний, которые заведомо имелись у всех испытуемых школьников. Предварительно мы выявляли состав знаний, умений и навыков, которые нужны для решения данной задачи, и убеждались, что необходимые конкретные знания, умения и навыки у данных учеников действительно имеются, что теорию, необходимую для решения экспериментальных задач, знают все.

Если дело обстояло не так, то мы совместно повторяли теорию, напоминали учащимся соответствующие положения, но делали это очень осторожно, так, чтобы испытуемые не догадывались о том, что эти знания должны быть использованы при решении ближайшей задачи.

б) Влияние прошлого опыта существенно ослаблялось тем, что многие экспериментальные задачи являлись новыми для учащихся, давались на незнакомый еще материал. Некоторые задачи опережали программу, некоторые не проходились в школе совсем. Конечно, иногда экспериментатору было трудно судить о том, что знакомо и что незнакомо ученику, трудно оценить опыт каждого, но насколько это было возможно — это делалось.

в) Предлагались задачи на новый, только что усвоенный материал, что давало возможность проследить характер овладения новым умением (умением решать задачу соответствующего типа). При этом в целом ряде случаев экспериментатор сам организовывал процесс обучения (объяснял учащимся еще незнакомый им, не пройденный в школе материал, что предваряло решение соответствующих задач).

г) Применялись задачи с элементами математического творчества, нестандартные задачи.

6. Известно, что способности выявляются только в движении, в динамике, в развитии. Вне динамики, по одному лишь уровню достижений трудно оценить способности. Если два ученика находятся на одном уровне достижений, то это не значит, что их способности одинаковы. Об их способностях мы можем судить лишь тогда, когда узнаем, сколько труда, сколько усилий стоило каждому из них достижение данного уровня, как быстро и легко продвигается каждый из них в овладении соответствующими навыками. «Существенным показателем значительности способностей в процессе их развития могут служить темпы, легкость усвоения и быстрота продвижения», — писал С. Л. Рубинштейн [354, стр. 540]. Термин «темпы продвижения» охотно употребляет З. И. Калмыкова [158], [159], о «темпе обучения» как о признаке способностей пишет В. С. Мерлин [294, стр. 127]. Мы предпочитаем термин «быстрота продвижения» (так как термин «темпы» в его строгом значении характеризует относительную скорость движения, скорость относительно исходного уровня). Разумеется, употребляется ли термин «быстрота продвижения» или термин «темпы продвижения», в обоих случаях имеется в виду не столько время, сколько количество упражнений, количество ходов мысли. Быстрота или темпы продвижения ученика часто не совпадает с его индивидуальным темпом работы.

Поэтому было решено, что наша экспериментальная методика должна носить не только констатирующий, но и обучающий характер. Выяснялось, как быстро продвигается ученик в реше-

нии задач данного типа, как успешно обучается он навыку решения этих задач и каковы максимальные возможности каждого ученика в этом отношении. Конкретно здесь имелась в виду быстрота продвижения ученика по «лестнице» задач от наиболее простой до «потолка»: а) самостоятельно и б) с небольшой помощью экспериментатора. Последнее обстоятельство очень важно. Еще в начале тридцатых годов известный советский психолог Л. С. Выготский высказал важную мысль о том, что состояние развития не определяется только его созревшей частью. Существенно не только то, чему ребенок уже научился, но и то, чему он способен научиться. Поэтому необходимы два показателя: как ребенок решает предложенные ему задачи самостоятельно и как он решает те же задачи с помощью взрослых, имея в виду, что решать с помощью взрослых ребенок может только то, что лежит в зоне его собственных интеллектуальных возможностей. Расхождение между этими двумя показателями и будет показателем так называемой «зоны ближайшего развития» ребенка — важной составной частью общей оценки его умственных возможностей. Задачи, которые ребенок в состоянии решить с помощью взрослых, и указывают на зону его ближайшего развития. То, что сегодня ребенок делает с помощью взрослых (т. е. то, что сегодня лежит в его зоне ближайшего развития), завтра он сумеет сделать самостоятельно (т. е. это завтра перейдет на уровень актуального развития), подчеркивает Л. С. Выготский [76], [77]. Эта идея — учитывать не только уже достигнутое, но и достижимое в ближайшее время — кажется нам весьма плодотворной. Поэтому в экспериментах фиксировался как уровень, достигнутый испытуемым при самостоятельном решении, так и уровень, достигнутый с небольшой помощью экспериментатора (причем тщательно регистрировались все виды помощи экспериментатора — намеки, подсказки, наводящие вопросы, указания).

В исследовании применялся и собственно обучающий эксперимент, когда способности изучались в процессе экспериментального обучения математике. Наблюдалось, как под влиянием определенных педагогических воздействий (при варьировании их) формируются отдельные компоненты способностей.

7. Считая основным принципом исследования качественный анализ процесса решения, мы не ограничивались им, а пытались найти и количественные характеристики изучаемого явления.

Б. М. Теплов в своей книге «Проблемы индивидуальных различий» подчеркивал, что анализ качественных различий составляет основную задачу психологии способностей. Но вместе с тем он отмечал, что «не следует вовсе исключать возможность количественного подхода при исследовании способностей. Он возможен, однако, только в том случае, когда он следует за качест-

венным анализом, вытекает из него, им определяется» [412, стр. 23]. Подчеркиваем, что при всех условиях для нас главным является качественная характеристика процесса. Но, разумеется, нельзя резко противопоставлять качественный и количественный подходы, так как качество раскрывается и через количество, количественные показатели тоже в какой-то мере выражают качественную сторону способностей.

Количественные характеристики применялись при оценке «быстроты продвижения», быстроты овладения навыком решения задач данного типа (количество упражнений, необходимое для усвоения нового, количество задач, решенных самостоятельно, решенных с помощью экспериментатора и нерешенных; количество упражнений, необходимых для овладения решением самой сложной задачи теста, и т. д.), при оценке свертывания процесса рассуждения (количество «выпадающих» звеньев), при оценке гибкости мыслительного процесса (количество разных способов решения одной задачи) и т. д. В ряде случаев в соответствии со специальными целями давались временные характеристики процесса (проводился хронометраж). Подробнее об этом будет говориться при характеристике отдельных серий. При исследовании некоторых вопросов структуры способностей применялся факторный анализ.

Считаем нужным оговорить, что наш метод исследования ни по своим задачам, ни по своей организации не имеет ничего общего с тестологией, широко распространенной в зарубежной психологии.

Основное и принципиальное отличие наших экспериментальных задач от тестов, применяемых в зарубежной тестологии, состоит в следующем: 1) мы применяем эти экспериментальные задачи не для целей отбора умственно одаренных и умственно неполноценных учащихся, не для измерения степени умственной одаренности в области математики, а для изучения (исследования структуры) способностей. Если назвать наши задачи тестами (об этом речь будет идти ниже), то это исследовательские тесты, специально созданные для исследовательских целей, в отличие от применяемых за рубежом диагностических тестов (диагноз в целях «жесткого» прогноза); 2) наши экспериментальные задачи ориентированы не только на результат, но, главным образом, на то, чтобы вскрыть качественные особенности процесса решения, путей достижения результата, а поэтому характеристики решения не ограничивались количественными показателями — числовыми индикаторами, оценками (в баллах). Основное внимание уделялось характеристике самого процесса решения.

Глава IV

СИСТЕМА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ

Методика экспериментального исследования была разработана на основе изложенного выше гипотетического представления о компонентах математических способностей. Разработка такой системы явилась очень сложной и трудоемкой частью всего исследования. После ряда проб была разработана специальная система экспериментальных задач, направленных на выявление особенностей умственной деятельности школьников с различными способностями к математике. Эта система экспериментальных задач претерпела известную эволюцию в ходе пробных экспериментов. От ряда типов задач и отдельных заданий пришлось отказаться, так как они оказались недостаточно показательными; они были заменены другими, более индикаторными в отношении исследуемых явлений.

В основу классификации положены серии — специальные типы экспериментальных задач. Названия — обозначения серий — до известной степени условны. В основу названий положена характеристика самих задач, составляющих содержание серий. Пояснения по каждой серии даются в дальнейшем.

Серии сгруппированы по четырем основным разделам. Три раздела соответствуют трем основным этапам решения каждой математической задачи (имеется в виду получение информации, необходимой для решения задачи, переработка этой информации в процессе решения задачи и сохранение в памяти итогов, результатов и следствий решения). Четвертый раздел касается исследования типов математических способностей. Внутри каждого раздела серии даны не рядоположенно, а объединяются в группы соответственно тем (сначала гипотетически намеченным, а впоследствии экспериментально установленным) компонентам структуры математических способностей, исследованию которых они служат.

Группировка серий в зависимости от их назначения представляла известные трудности, так как сравнительно редко серия служит только одной цели. Серии обычно дают материал для суждения о самых разнообразных сторонах мыслительного процесса, и это часто вызывает затруднение, в какую группу отнести данную серию. Учитывая это, в основу классификации было положено основное назначение задачи. Поэтому отнесение серии к той или иной группе в известной мере условно. Это надо иметь в виду при анализе схемы, так, например, в группе «память» имеется только одна серия, тогда как материал по этому вопросу дают восемь серий (основное назначение которых другое, и поэтому они отнесены в другие группы).

Каждая серия представляет собой несколько совокупностей экспериментальных задач-тестов. Тем самым и мы вслед за Б. М. Тепловым и рядом других советских психологов делаем попытку вернуть слову «тест» его настоящее терминологическое значение. Тот факт, что термин «тест» был изрядно скомпрометирован в истории науки, не дает сколько-нибудь веских оснований отказываться от этого строго научного термина. Одно дело тестология как несостоятельная наука, сложившаяся за рубежом, и другое дело тесты как относительно краткие, стандартизованные пробы, своеобразные испытания для выявления каких-либо скрытых явлений и закономерностей, результаты которых могут выражаться и в количественной форме, а следовательно, могут быть подвергнуты статистической обработке. Только в этом значении мы и употребляем термин «тест». Особо подчеркиваем, что используемые нами тесты носят не диагностический, а чисто исследовательский характер. Тесты по каждой серии получили предметное наименование в зависимости от того, какие задачи (арифметические, алгебраические, геометрические, логические и т. д.) составляют их содержание. Каждая частная задача, следовательно, получает очень удобный индекс для обозначения ее, состоящий из номера серии, указателя теста и номера задачи, например, XIII—А—2, что означает задача № 2 теста «А» серии № 13.

Система экспериментальных задач включает 26 серий, содержащих 79 тестов (в том числе 22 арифметических, 17 алгебраических, 25 геометрических и 15 прочих). В связи с этим она может показаться на первый взгляд довольно сложной. Но надо иметь в виду, что любая современная система экспериментальных задач по исследованию способностей отличается не меньшей сложностью. Например, уже упоминавшийся автор одного из новейших и серьезнейших исследований математических способностей Верделин [727] использовал в исследовании систему более 50 тестов, многие из которых состояли из нескольких десятков отдельных заданий. Проявление способностей многообразны, и нередко на этих проявлениях сказывается воздействие различных частных факторов. Поэтому лишь целая система экспериментальных задач, с различных сторон подводящих к анализу одного и того же явления, может дать нужный материал. Соответствие результатов, полученных различными путями, можно тогда с большей степенью вероятности объяснить действием исследуемого фактора. Как указывал Б. М. Теплов, нельзя строить изучение какого-либо психического свойства на основании только одной методики, так как каждое свойство имеет многосторонние проявления. Каждая серия выявляет только одну или некоторые стороны и проявления изучаемого свойства, поэтому нужно сопоставлять результаты, полученные различными методиками.

Деление задач на арифметические и алгебраические в известной мере условно, так как почти любая арифметическая задача может быть решена алгебраическим путем (однако учащиеся V и VI классов с этим способом еще не знакомы). По предложенной системе задач исследуются и способные, и мало-способные к математике школьники (неспособные в основном по более элементарным задачам каждой серии).

Несмотря на большое количество задач, система не предъявляет чрезмерных требований в отношении времени и затраченных усилий. Во-первых, далеко не по всем сериям требуется всегда полное решение задач. В ряде случаев достаточно составить лишь план решения, продемонстрировать его принцип, иногда объяснить структуру задач или просто ответить на конкретный вопрос. Во-вторых, способные учащиеся очень легко и быстро решают элементарные задачи, а неспособные вообще не решают многих более трудных задач.

Большинство задач взято из самых различных советских и иностранных источников — задачников, сборников задач, популярных математических книг, газет и журналов. Делать ссылки сложно, так как таких источников около 50.

Поскольку система экспериментальных задач создавалась постепенно, то на разных этапах исследования, в зависимости от целей применялись различные серии. Часть учащихся была проведена через все серии.

Предложенная система задач рассчитана на всестороннее исследование математических способностей учащихся VI—VII классов. Нам кажется, что наиболее рационально на первых порах изучать математические способности именно в этом возрасте. Важно начинать изучение способностей у их «истоков», но все-таки тогда, когда что-то определенное в этом отношении уже сложилось. Обычно же только в VI—VII классах в связи с началом систематического изучения алгебры и геометрии начинают объективно проявляться и развиваться собственно математические способности. В I—IV кл. о математических способностях можно говорить лишь условно, а в IX—X кл. способности в каком-то смысле уже сложившееся образование.

Система тестов может применяться в более широком диапазоне (V—VIII кл.). Из этой системы в зависимости от возраста учащихся (класса), их подготовки и конкретных целей исследования отбираются определенные серии. Давать заранее такие точные наборы для каждого случая было бы нерационально хотя бы потому, что программа по математике в настоящее время перестраивается и закреплять какую бы то ни было схему за определенным возрастом не следует.

Переходим к последовательному описанию экспериментальных серий, их назначения, техники предъявления и принципа анализа результатов.

Таблица 1

Система экспериментальных задач по исследованию математических способностей учащихся VI—VII классов
(может быть применена в диапазоне от V до VIII классов включительно)

Раздел	Группа	№ серий	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Получение информации	Восприятие (осмысливание) задачи	I	Задачи с несформулированным вопросом	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический	Восприятие отношений и конкретных данных задачи	—
		II	Задачи с неполным составом условия	А. Арифметический Б. Геометрический	Восприятие отношений и конкретных данных задачи	—
		III	Задачи с избыточным составом условия	А. Арифметический Б. Геометрический	Восприятие отношений и конкретных данных задачи	Математическая память
		IV	Задачи с взаимопроникающими элементами	А. Геометрический	Восприятие (выделение геометрических элементов и фигур из фона)	Типы математических способностей
	Обобщение	V	Системы однотипных задач	А. Алгебраический Б. Алгебраический	Обобщение (подведение под понятие)	Восприятие. Свертывание процесса рассуждения

Продолжение

Раздел	Группа	№ серий	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Переработка информации	Обобщение	VI	Системы разнотипных задач	А. Арифметический Б. Арифметический В. Арифметический Г. Арифметический Д. Арифметический Е. Арифметический Ж. Геометрический	Обобщение (формирование обобщений) Свертывание процесса рассуждения Математическая память Восприятие отношений и конкретных данных задачи	Гибкость мыслительного процесса
		VII	Системы задач с постепенной трансформацией из конкретного в абстрактный план	А. Комбинированный	Обобщение (формирование обобщений)	Восприятие. Математическая память
		VIII	Составление задач заданного типа	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический Г. Логический	Обобщение (формирование обобщений) Восприятие (обобщенное восприятие задачи)	—
		IX	Задачи на доказательство	А. Алгебраический Б. Алгебраический В. Геометрический Г. Логический	Обобщение метода рассуждения Логичность рассуждения Свертывание процесса рассуждения	Типы математических способностей

Продолжение

Раздел	Группа	№ серий	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Переработка информации	Обобщение	X	Составление уравнений по условиям задачи	А. Алгебраический	Обобщение метода рассуждения Логичность рассуждений Свертывание процесса рассуждения Восприятие отношений и конкретных данных задачи	Гибкость мыслительного процесса
		XI	Нереальные задачи	А. Сборный	Обобщение Восприятие отношений и конкретных данных задачи Математическая память	—
		XII	Образование искусственных понятий	А. Специальный Б. Специальный В. Специальный	Обобщение нематематического материала	—
	Гибкость мышления	XIII	Задачи с несколькими решениями	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический	Гибкость мыслительного процесса Изыщество решения	Критичность мышления. Математическая память

Продолжение

Продолжение

Раздел	Группа	№ серии	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Переработка информации	Гибкость мышления	XIV	Задачи с меняющимся содержанием	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический	Гибкость мыслительного процесса	—
		XV	Задачи на перестройку действия	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Алгебраический Г. Алгебраический Д. Геометрический Е. Геометрический Ж. Специальный	Гибкость мыслительного процесса	Типы математических способностей
		XVI	Задачи, наталкивающие на «самоограничение»	А. Сборный	Гибкость мыслительного процесса	—
	Обратимость мыслительного процесса	XVII	Прямые и обратные задачи	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Алгебраический Г. Геометрический	Обратимость мыслительного процесса	—
	Соображение. Рассуждение. Логичность	XVIII	Эвристические задания	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический Г. Геометрический	Логичность рассуждения Самостоятельность обобщения	Свертывание процесса рассуждения

Раздел	Группа	№ серии	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Переработка информации	Соображение. Рассуждение. Логичность	XIX	Задачи на соображение, логическое рассуждение	А. Общематематический Б. Логический	Логичность рассуждения. Математическая память. Свертывание процесса рассуждения	
		XX	Ряды	А. Числовой Б. Фигурный	Логичность рассуждения	Восприятие отношений. Типы математических способностей
		XXI	Математические софизмы	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический Г. Логический	Логичность рассуждения	Гибкость мыслительного процесса. Типы математических способностей
Хранение информации	Математическая память	XXII	Задачи со сложным для запоминания условием	А. Арифметический Б. Алгебраический В. Геометрический	Математическая память. Обобщение. Восприятие отношений и конкретных данных задачи	

Раздел	Группа	№ серии	Название серий	Обозначение тестов	Что исследуется	
					основное назначение	дополнительное назначение
Типология	Типы математических способностей	XXIII	Задачи с различной степенью наглядности решения	Н. Арифметический ¹ С ₁ . Арифметический С ₂ . Арифметический М ₁ . Арифметический М ₂ . Арифметический Г. Геометрический	Типы математических способностей	Обобщение. Свертывание процесса рассуждения. Гибкость мыслительного процесса. Математическая память
		XXIV	Задачи в словесном и наглядном оформлении	А. Алгебраический Б. Геометрический В. Геометрический	Типы математических способностей	Обобщение. Свертывание мыслительного процесса. Математическая память.
		XXV	Задачи, связанные с пространственными представлениями	А. Геометрический Б. Геометрический В. Фигурный Г. Фигурный	Типы математических способностей	—
		XXVI	Задачи на выявление соотношения наглядно-образных и словесно-логических компонентов нематематической интеллектуальной деятельности	А. Узнавание Б. Описание	Типы математических способностей	—

¹ Пояснения к такого рода обозначениям будут даны ниже.

I. Задачи

с несформулированным вопросом

В задачах этой серии ни прямо, ни косвенно не формулируется вопрос, но этот вопрос логически вытекает из данных в задаче математических отношений. Устанавливалось, может ли испытуемый сформулировать вопрос, воспринимает ли он логику данных в задаче отношений и зависимостей, понимает ли их сущность. Эта серия направлена на выявление некоторых особенностей умственного восприятия школьниками математической задачи. Подобного типа задачи применялись в психологическом исследовании Л. П. Доблаевым, но совершенно с другой целью — выявить характер ассоциаций, лежащих в основе составления уравнений [114]. Для нас смысл серии заключается в том, что она позволяет выяснить, как воспринимает математическую задачу учащийся — видит ли он в ней лишь совокупность разрозненных и несвязанных данных (которые еще нужно специально связывать) или задача для него изначально существует как комплекс взаимосвязанных величин. В первом случае следует ожидать, что учащийся, как правило, не будет осознавать скрытого вопроса, во всяком случае не будет осознавать его сразу; если же испытуемый быстро «схватывает» основные отношения задачи, то он будет видеть и скрытый вопрос, который всегда органически вытекает из этих отношений.

Указанная серия задач состоит из трех тестов — арифметического, алгебраического и геометрического, которые предъявляются друг за другом. Получив карточку с задачей, ученик должен прочитать ее и возможно скорее сформулировать вопрос. При этом фиксируется весь ход рассуждений испытуемого, а также отмечается время, потраченное на выполнение тестов.

Приводим тесты этой серии (в скобках указывается несформулированный вопрос).

А. Арифметический тест.

1. На протяжении 155 м уложено 25 труб длиной по 5 и 8 м. (Сколько уложено тех и других труб?)

2. В двух кассах магазина находится 140 руб. Если из первой кассы переложить во вторую 15 руб., то в обеих кассах будет поровну. (Сколько денег было в каждой кассе?)

3. Пионеры собрали 65 кг лома, причем меди и алюминия вместе было собрано на 1 кг больше, чем цинка, а только меди было на 15 кг больше, чем алюминия. (Сколько килограммов меди, алюминия и цинка собрали в отдельности?)

4. Я сделал покупку. Если заплатить за нее трехрублевыми билетами, то придется выдать восемью билетами более чем в том случае, если заплатить пятирублевыми. (Сколько стоит покупка?)

5. У мальчика столько сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. (Сколько братьев и сколько сестер в этой семье?)

6. Скорость товарного поезда 38 км в час, а пассажирского 57 км в час. Первый вышел со станции A на 7 час. раньше второго, но второй обогнал его и пришел на станцию B двумя часами раньше. (Найти расстояние от A до B .)

7. До конца суток осталось $\frac{4}{5}$ того, что уже протекло от начала суток. (Который сейчас час?)

8. Велосипедист преодолел путь из A в B со скоростью 20 км в час, а обратно со скоростью 10 км в час. (Какова средняя скорость велосипедиста за весь путь?)

Б. Алгебраический тест.

1. У двоих вместе было 28 руб., а у одного из них A руб. (Сколько было у другого?)

2. Ученик купил в одном магазине 2 b тетрадей, а в другом в 3,5 раза больше. (Сколько он всего купил тетрадей?)

3. Автомобиль прошел 760 км со средней скоростью x км в час. (Какое время он потратил на путь?)

4. На расстоянии 1800 м колесо сделало 12 a оборотов. (Какова окружность колеса?)

5. Человек прожил A месяцев. (Сколько ему лет?)

В. Геометрический тест.

1. На прямой дана точка, из которой по одну сторону прямой проведены 2 луча. Величина одного из углов, образовавшихся при этом, равна $\frac{3}{5}d$, а величина другого составляет половину первого угла. (Определить величину третьего угла.)

2. В треугольнике первый угол на 30° больше второго, а третий угол на 20° меньше первого. (Найти величину углов.)

3. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 6 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 44 см. (Найти длину сторон.)

4. Дан квадрат. Если одну его сторону уменьшить на 1,2 м, а другую на 1,5 м, то площадь полученного прямоугольника будет на $14,4 \text{ м}^2$ меньше площади квадрата. (Какова длина стороны квадрата?)

II. Задачи с неполным составом условия

В этих задачах отсутствуют некоторые данные, вследствие чего дать точный ответ на вопрос задачи не представляется возможным. При введении этих данных точный ответ может быть получен. Устанавливалось, может ли испытуемый указать на комплекс отношений математических величин, необходимых для решения задачи (точного ответа на ее вопрос), и отметить недостающие данные. Эта серия, так же как и первая, направлена

на выявление некоторых особенностей умственного восприятия школьниками математической задачи. Подобные задачи применялись многими исследователями, в частности Н. А. Менчинской [291], З. И. Калмыковой [154], [155], [156], П. Я. Гальпериным и его сотрудниками, но с другими целями. В частности, П. Я. Гальперин применял задачи этого типа в связи с решением проблем управления процессом учения [81]. Мы же применяли задачи указанного типа для выявления того, «схватывают» ли учащиеся (и как именно) в процессе восприятия условия задачи ее формальную структуру, способны ли они обнаружить неполноту данных.

Смысл задач этой серии заключается в том, что точно указать на недостающие данные можно только тогда, когда воспринимается формальная структура задачи, комплекс взаимосвязанных величин, составляющих ее сущность. Видеть недостающий элемент подобного комплекса, как правило, нельзя, если не воспринимаешь формальной структуры задачи.

Разумеется, даже при неполных данных можно извлечь из них какое-то решение, вывести какое-то определенное положение (например, 1-я задача арифметического теста допускает такое решение: поезд состоит не менее чем из 15 единиц; товарных вагонов не менее 9 и т. д.). Школьники должны привыкать не отбрасывать данные, если они недостаточны для решения задачи, а попытаться извлечь из них все возможное.

Указанная серия состоит из двух тестов — арифметического и геометрического, которые предъявляются друг за другом. Получив карточку с задачей, испытуемый либо сразу заявляет, что нельзя дать точного ответа на вопрос задачи, либо приходит к этому выводу после некоторой прикидки. В том и другом случае ему ставятся вопросы: «Почему нельзя дать точного ответа на вопрос задачи? Чего не хватает? Что надо добавить? Докажи, что теперь задачу можно будет точно решить». Более способным учащимся ставятся вопросы: «А можно ли что-нибудь извлечь даже из этих данных? Какое заключение можно сделать из анализа того, что дано? Пусть даже ответ будет недостаточно точным и определенным». Во всех случаях фиксируется весь ход рассуждений учащихся, количество выполненных задач и время выполнения.

Особо отметим, что указание ученика просто на невозможность точного решения задачи без объяснения и мотивировки, без определения недостающих данных само по себе не имеет значения и не расценивается как правильный ответ.

Ниже приводятся тесты этой серии (в скобках указываются недостающие для точного решения данные).

А. Арифметический тест.

1. Поезд состоит из цистерн, товарных вагонов и платформ. Цистерн на 4 меньше, чем платформ, и на 8 меньше, чем товар-

ных вагонов. Сколько в поезде цистерн, товарных вагонов и платформ? (Неизвестно общее число их.)

2. Сколько нужно взять кипящей воды и воды комнатной температуры, чтобы получить 10 л воды с температурой 58° ? (Неизвестно, что понимать под комнатной температурой.)

3. Класс получил общие и простые тетради — всего 80 штук. Общая тетрадь стоит 8 коп., а простая 2 коп. Сколько тех и других тетрадей получил класс? (Нужно знать общую стоимость тетрадей.)

4. В библиотеке всего 6100 книг на русском, французском и английском языках. Французских книг больше английских на 25%. Сколько книг на каждом языке? (Нет данных о количестве книг на каком-нибудь одном языке.)

5. От веревки отрезали половину всей ее длины и 0,5 м, потом отрезали половину остатка и еще 0,5 м и, наконец, еще половину второго остатка и 0,5 м. После этого от всей веревки остался небольшой кусок. Найти первоначальную длину веревки. (Надо знать длину оставшегося куска.)

6. Собака погналась за лисцей, находящейся от нее в 30 м. Скачок собаки 2 м, скачок лисцы 1 м. Какое расстояние должна пробежать собака, чтобы догнать лисицу? (Нет данных отношения частоты скачков, например, в то время как лисица делает 3 скачка, собака делает 2 скачка.)

7. Банка с медом весит 500 г. Такая же банка с керосином 350 г. Сколько весит пустая банка? (Нужно отношение веса меда и веса керосина, например керосин легче меда в два раза.)

8. Расстояние между городами 225 км. Из них одновременно вышли поезда: из первого города — пассажирский (скорость 50 км в час), из второго — товарный (40 км в час). Когда поезда поравняются? (Не указано, двигались ли поезда в одном направлении или навстречу друг другу.)

Б. Геометрический тест.

1. Вычислить сторону квадрата площадью 64 см^2 . Вычислить сторону прямоугольника площадью 36 см^2 . (Во второй задаче надо знать величину одной из сторон или отношение величин сторон.)

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона меньше основания. Периметр его 31 см. Какова величина сторон треугольника? (Надо знать величину одной из сторон или отношение боковой стороны и основания.)

3. Даны две окружности, радиус одной из них 3 см, расстояние между их центрами 10 см. Пересекаются ли эти окружности? (Требуется знать радиус другой окружности.)

4. Через вершину угла вне его проведена прямая, образующая с одной из его сторон угол, равный $\frac{d}{3}$. Определить вели-

чину угла, образованного прямой с другой стороной данного угла. (Требуется знать величину основного угла.)

5. Стороны треугольника относятся как 5:4:3. Найти величину его сторон. (Надо знать величину периметра или хотя бы одной из сторон.)

III. Задачи с избыточным составом условия

В задачи этой серии введены дополнительные, ненужные, не имеющие значения показатели, до известной степени маскирующие необходимые для решения данные. Устанавливалось, сумеет ли испытуемый выделить комплекс отношений математических величин, необходимых для решения задачи, и отделить ненужные данные. И эта серия направлена на выявление некоторых особенностей умственного восприятия школьниками математической задачи. Подобные задачи также применялись в специфических условиях и с другой целью Н. А. Менчинской [291], З. И. Калмыковой [154], [155], [156], П. Я. Гальпериным и его сотрудниками [81]. Третья серия задач позволяет выявить, как учащиеся из совокупности данных им величин выделяют именно те, которые представляют собой систему отношений, составляющих существо задачи, и являются необходимыми и достаточными для ее решения. Указанная серия состоит из двух тестов — арифметического и геометрического, которые предъявляются друг за другом. В исследовании более способных к математике учащихся мы применяли также прием, ставящий их перед более сложной задачей — задачи второй и третьей серии давались «вперемежку». Это снимало установку на то, что в одной группе задач «всегда чего-то недостает», а в другой — «заведомо что-то лишнее». Но такой прием слишком затруднял действия мало-способных учащихся, и в работе с ним мы от него, как правило, отказывались. Получив карточку с задачей, испытуемый должен выделить минимальное количество данных, необходимое для решения, и объяснить, почему другие данные излишни. Фиксируется ход рассуждений учащихся, количество выполненных задач и время выполнения. С целью исследования некоторых особенностей математической памяти учащиеся должны были в конце урока, через неделю и через три месяца воспроизвести отдельные задачи. Выяснялось, как учащиеся помнят: а) тип задачи; б) конкретные данные и в) излишние, ненужные данные.

Приводим тесты этой серии (излишние данные выделены разрядкой, в задачах Б-4 и Б-5 они подчеркнуты).

А. Арифметический тест.

1. В магазине развесили картофель в 24 пакета весом по 3 и 5 кг, причем число первых оказалось больше, чем вторых. Вес всех пятикилограммовых пакетов оказался

равным весу всех трехкилограммовых пакетов. Сколько было тех и других?

2. На автостоянке находятся 40 машин — автомобили и мотороллеры. У них вместе 100 колес и 40 рулей. Сколько тех и других машин?

3. У мальчика было несколько копеек. Когда ему дали еще 14 коп., то он на все деньги купил 4 карандаша, заплатив за каждый вдвое больше того, что он имел прежде. На свои прежние деньги он не мог купить и одного карандаша. Сколько денег было у мальчика до получения 14 коп.?

4. Четыре гири весят вместе 40 кг. Определить вес самой тяжелой гири, если известно, что каждая из них в 3 раза тяжелее другой, более легкой, и что самая легкая весит в 12 раз меньше, чем весят вместе две средние.

5. Из города A в город B вышел поезд со скоростью 48 км в час. Двумя часами позже за ним вышел второй поезд со скоростью 56 км в час. На каком расстоянии от отправного пункта второй поезд нагонит первый, если расстояние между городами 1200 км, а в первом поезде вдвое больше вагонов, чем во втором?

6. Библиотеке нужно было переплести английские, французские и немецкие книги, число которых относилось как $3:2:1$. Три мастерские брались каждая самостоятельно выполнить заказ: первая — за 20 дней, вторая — за 30 дней, третья — за 60 дней. Чтобы заказ был выполнен возможно скорее, решили передать заказ сразу всем трем мастерским. Во сколько дней выполнят работу мастерские, работая одновременно?

Б. Геометрический тест.

1. Дан равнобедренный треугольник, одна сторона его 2 см, другая 10 см, третья равна одной из двух данных. Найти третью сторону.

2. В равнобедренном треугольнике две стороны его относятся как $3:8$. Определить стороны, если периметр треугольника равен 38 см, а одна сторона на 10 см больше другой, причем стороны выражаются целыми числами.

3. Задача. Даны 3 равных равно-
сторонних треугольника, стороны ко-
торых по 6 см. Доказать, что AB пря-
мая.

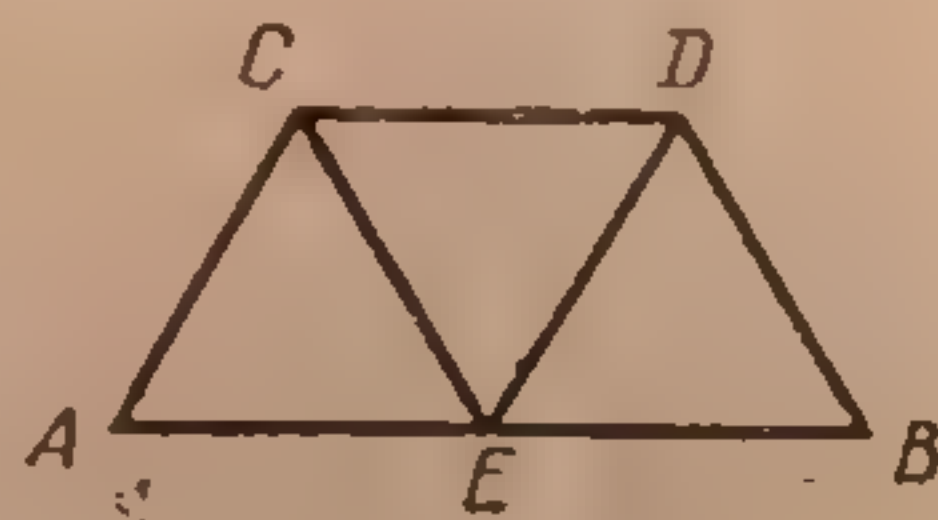


Рис. 2.

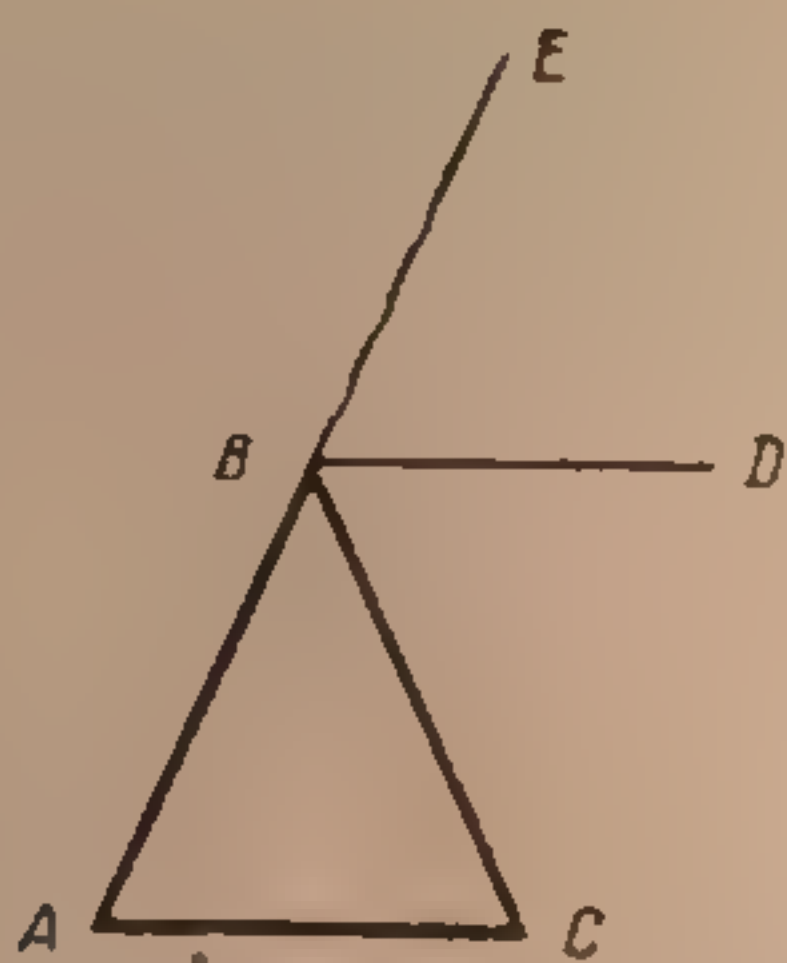


Рис. 3.

4. Задача. Дано: $AB = AC = BC$;
 $\triangle ABC$ равноугольный;
 $BD \parallel AC$.

Доказать: BD — биссектриса $\angle EBC$.

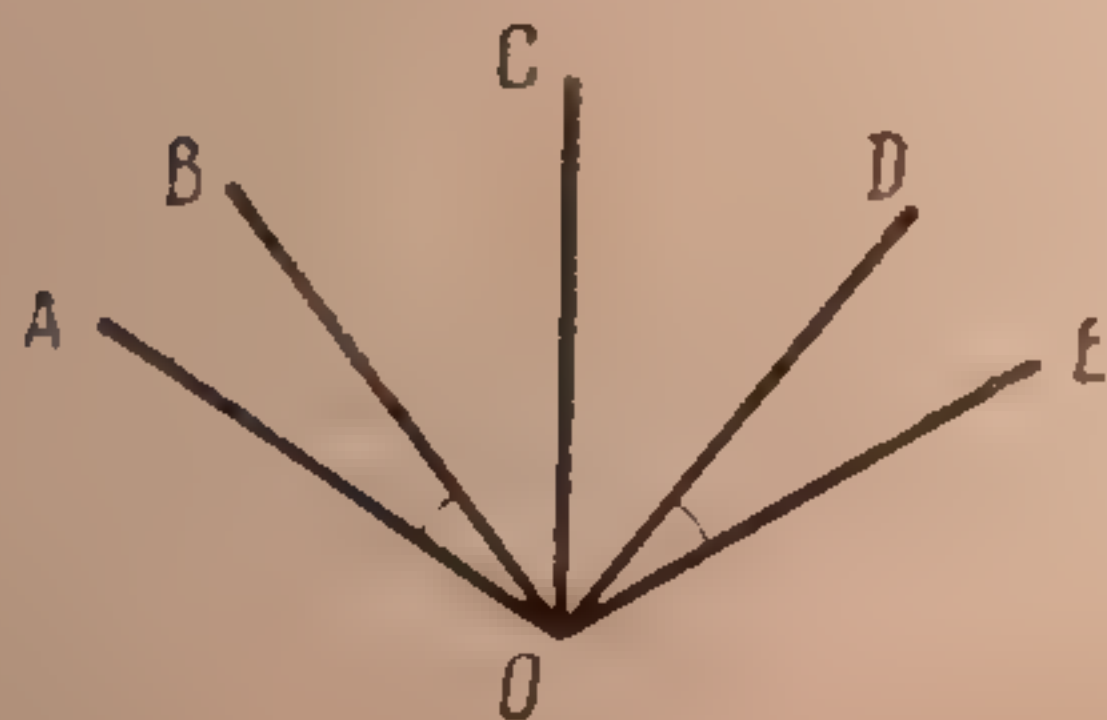


Рис. 4.

5. Задача. Дано: $\angle AOB = \angle DOE$; OC — биссектриса угла BOD ; $\angle DOE = 20^\circ$.

Доказать: OC — биссектриса $\angle AOE$.

IV. Задачи с взаимопроникающими элементами

Единственный разработанный нами геометрический тест этой серии представляет собой ряд геометрических фигур, отдельные элементы которых «взаимопроникают» (термин И. С. Якиманской).

Задачи подобной серии с успехом использовала И. С. Якиманская [469], [470], [471], исследуя вопросы анализа учащимися геометрического чертежа при решении задач на доказательство. В основу этой серии положена мысль Б. Журавлева о «математическом зрении» как способности «видеть на чертеже не только то, что бросается в глаза, но и все то, что на нем вообще есть» [128, стр. 73]. Эта серия направлена на исследование некоторых особенностей аналитико-синтетического восприятия геометрических фигур учащимися, в частности умения рассматривать и оценивать взаимопроникающие элементы геометрических фигур с различной точки зрения, выделять элементы фигур и фигуры из фона, включать один и тот же элемент в разные фигуры и соответственно давать ему различную интерпретацию. Фиксируется, насколько полный ответ дают испытуемые, какую роль играют «видение» и рассуждение. Предварительно учащимся объясняется характер задания на следующем примере:

Отрезок DB есть: 1) перпендикуляр к отрезку AC ; 2) высота треугольника ABC ; 3) сторона треугольника ADB ; 4) сторона треугольника BDC .

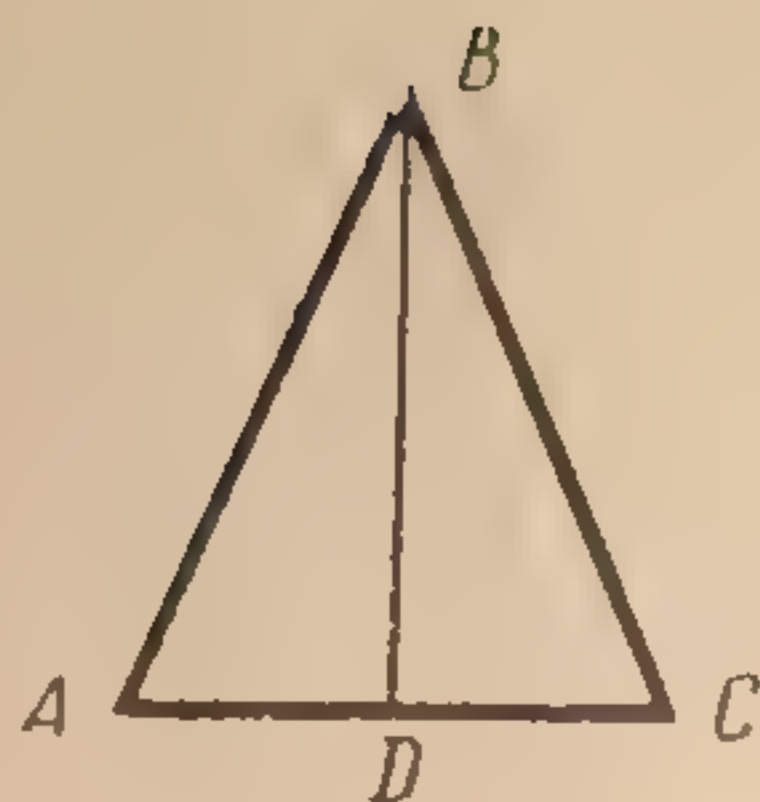


Рис. 5.

Разумеется, гибкость восприятия как способность быстрого переключения с одного аспекта восприятия на другой может исследоваться не только на геометрическом материале. Например, ученик должен уметь воспринимать число 4 как и $2 \cdot 2$, и $1 + 3$, и $\frac{1}{2}$ от 8, и 2^2 , и $\sqrt{16}$, и т. д.

Ниже приводится содержание теста.

А. Геометрический тест.



Рис. 6.

Сколько отрезков (и какие)?



Рис. 8.

Сколько секторов изображено (и какие)?



Рис. 10.

Сколько треугольников (и какие)?

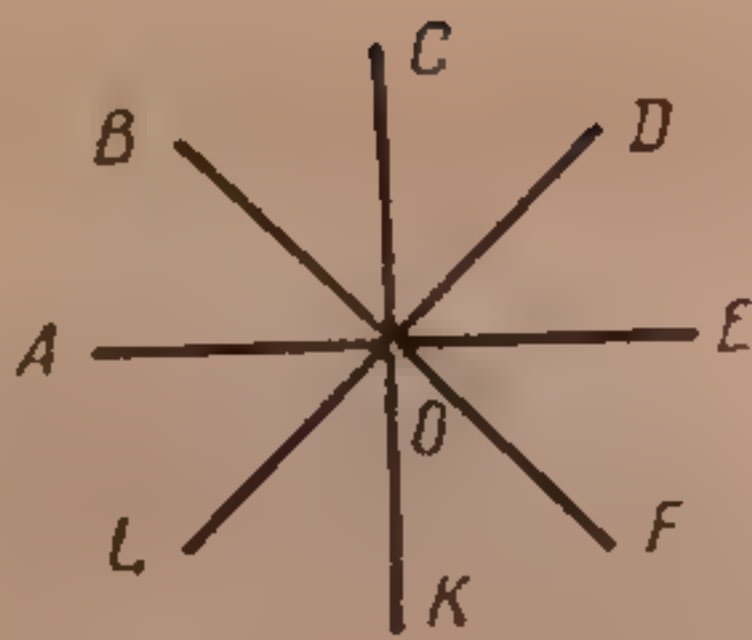


Рис. 7.

Сколько пар вертикальных углов?

9*

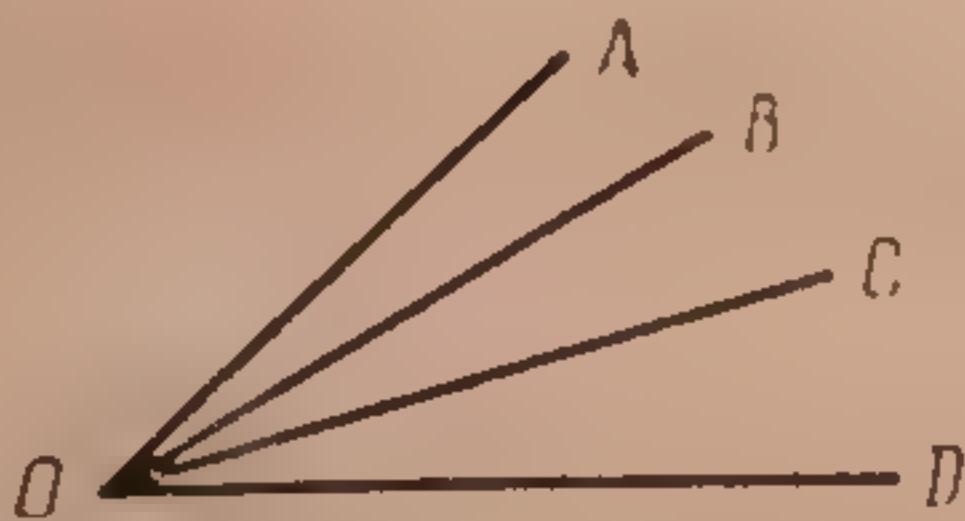


Рис. 9.

Сколько углов (и какие)?



Рис. 11.

Какие фигуры можно выделить на изображенной фигуре?

Сколько в том числе треугольников?

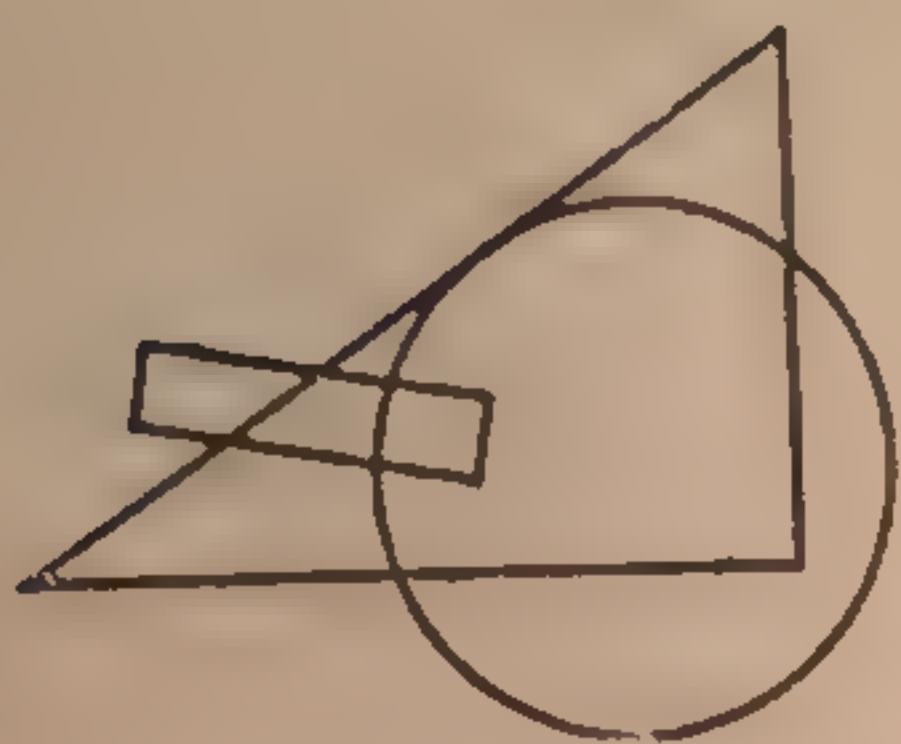


Рис. 12.

Указать часть плоскости, общую всем трем фигурам, общую кругу и треугольнику, общую для треугольника и прямоугольника.

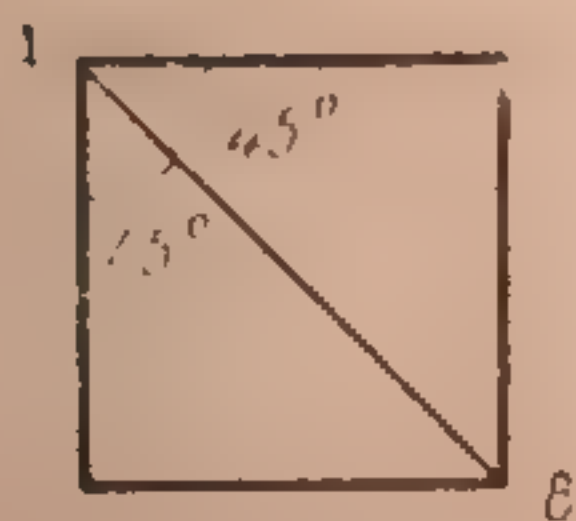


Рис. 13.

Чем является на чертеже отрезок AB ?

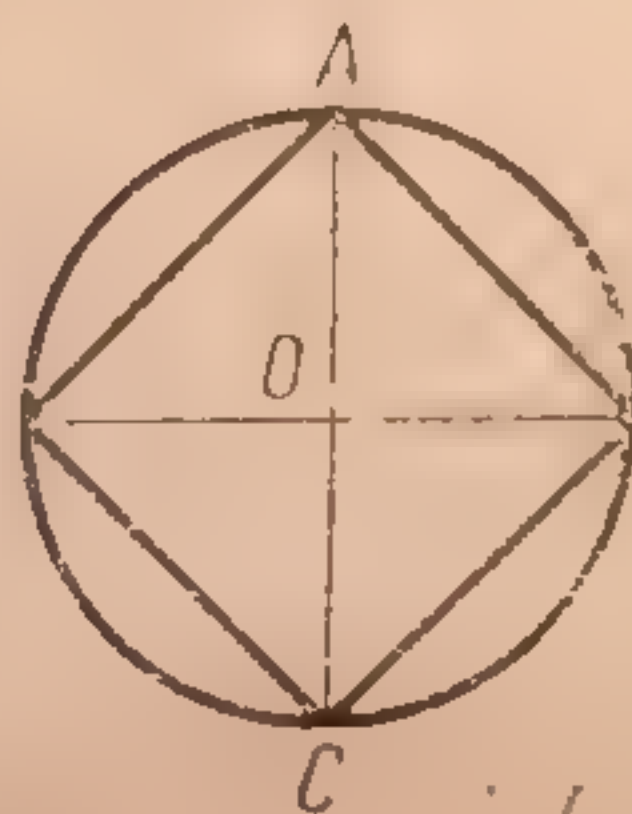


Рис. 14.

Что представляет собой отрезок AC ?

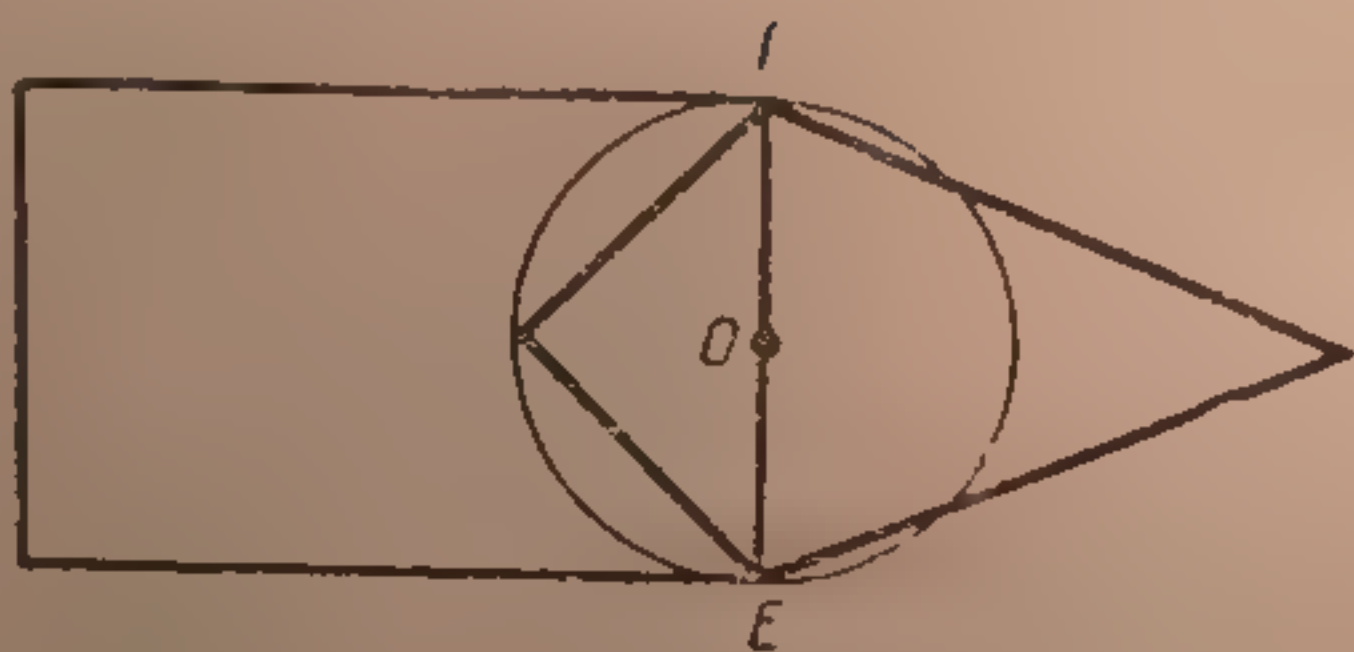


Рис. 15.

Что такое на чертеже отрезок KE ?

V. Системы однотипных задач

Эта серия рассчитана на учащихся, еще незнакомых с формулами сокращенного умножения (как правило, это учащиеся шестых классов). Эксперимент носит обучающий характер. Исследуется процесс обобщения — подведение объектов под только что сформировавшееся в своей основе понятие, процесс переноса

сложившегося способа действия в сходные условия, способность дифференцировать внешне сходный материал по существенному признаку. Для этого надо выделить основное, главное, существенное с точки зрения типа задач, отвлечься от несущественного, второстепенного, от деталей (т. е. здесь исследуются также и особенности восприятия математического материала).

О степени развития способности к обобщению судим по тому, насколько учащийся умеет видеть общий тип в разных задачах, как переходит от решения более простых к решению более сложных задач того же типа, как умеет дифференцировать задачи одного типа от внешне сходных с ними задач другого типа. О характере «свертывания» рассуждения мы судим, анализируя под этим углом зрения процесс рассуждения и систему соответствующих действий при последовательном решении однотипных задач.

Серия представлена двумя алгебраическими тестами: первый (А) предназначен для исследования учащихся со средними и высокими способностями к математике, второй (Б) — для учащихся, малоспособных к математике. Первый тест заменяется вторым (более легким), если оказывается, что работа с первым тестом ставит испытуемого перед трудностями, которые он не может преодолеть. Обе серии представляют собой своеобразную «лестницу задач» одного и того же типа, от наиболее простой к весьма сложной. Решать все задачи испытуемому не обязательно (в ряде случаев по усмотрению экспериментатора можно удовлетвориться тем, что испытуемый расскажет план решения, объяснит, как он собирается решать). Главное выяснить, как сумеет испытуемый доказать, что данная задача, несмотря на ее внешнее отличие, принадлежит к тому же самому типу, и как, учитывая конкретные особенности задачи, он собирается решать ее по общей схеме решения задач установленного им типа.

Ниже дается описание тестов.

А. Алгебраический тест.

1. $(a + b)^2 =$

1а. $a^2 + b^2 =$

2. $\left(1 + \frac{1}{2} a^3 b^2\right)^2 =$

2а. $\left(\frac{1}{3} ab^3\right)^2 + (2a)^2 =$

3. $(-5x + 0,6xy^2)^2 =$

3а. $(-5x^2 - 0,6 xy^2) \cdot 2 =$

4. $(3x - 6y)^2 =$

4а. $(3x + 6y) \cdot 2x =$

5. $(m + x + b)^2 =$

5а. $2(m^2 + x^2 + b^2) =$

6. $(4x + y^3 - a)^2 =$

6а. $4x^2 + y^2 - a^2 =$

7. $51^2 =$

7а. $98^3 =$

8. $(C + D + E)(E + C + D) =$

8а. $(c + m + x)(c - m + x) =$

В левом столбце дана система последовательно усложняющихся задач на применение одной из формул сокращенного умножения (квадрат суммы). В каждой последующей задаче все

труднее увидеть возможность применения этой формулы. Правый столбец содержит задачи, внешне напоминающие задачи левого столбца, но по существу совершенно отличные. Испытуемый должен обобщить задачи левого столбца и отдифференцировать от них задачи правого столбца.

Порядок предъявления задач: учащиеся впервые, с помощью экспериментатора, знакомятся с указанной формулой сокращенного умножения, усваивают ее математический смысл на простейших примерах. После этого им предлагается попробовать применить эту формулу к решению задачи № 8 (наиболее отдаленной). Узнает ли испытуемый в этом алгебраическом выражении квадрат суммы? Если учащийся затрудняется это сделать (обычно так и бывает), то вводятся последовательные звенья (задачи № 1, 2, 3, 4 и т. д.) с постепенным приближением к задаче № 8, причем после овладения каждым последовательным звеном испытуемому вновь и вновь предлагается возвратиться к задаче № 8.

Делается это следующим образом: предъявляется задача № 8. «Не можешь решить? Тогда реши вот эту (№ 1). Решил правильно. Ну а теперь попробуй решить задачу № 8. Снова нет? Тогда реши вот эту (№ 2). Верно решил. Теперь снова попробуй решить задачу № 8. И теперь не получается? Тогда реши вот эту (№ 3) и т. д.». Наряду с каждой задачей левого столбца предъявляется соответствующая задача правого столбца, причем, чтобы избежать такого положения, когда постоянно сначала предъявляется задача на применение формулы, а потом уже задача, к которой формула не применима, мы чередовали последовательность предъявления задач левого и правого столбца. Следовательно, в окончательном итоге порядок предъявления задач такой: 8, 1, 1а, 8, 2а, 2, 8, 3, 3а, 8, 4а, 4 и т. д.

Числовая характеристика способности к обобщению по данному тесту связана с количеством необходимых промежуточных звеньев (числом «шагов») при переходе от первой к восьмой задаче и величиной последнего «шага» при переходе к восьмой задаче. Например, если испытуемый решил задачи в следующей последовательности: 1, 2, 3, 4, 5, 8, то числовая характеристика, связанная с решением им этого теста, будет такова: 4, 3. Это значит, что ему понадобилось сделать четыре «шага», т. е. решить 4 задачи (№ 2, 3, 4, 5), чтобы распространить обобщение на самую «далекую» задачу, и последний «шаг» объединил 3 ступени ($5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$). С. И. Шапиро, оценивая «силу обобщающего мышления при решении математических задач» по результатам эксперимента в старших (IX—X) классах, основывался на понятиях «длина максимального шага в обобщении» и «сумма длины всех шагов» [433], [435] и применял более сложную систему оценки, но в применении к указанному выше тесту в такой сложной системе не было необходимости.

Но
ть тью
3-и пт
впро
работ
имелос
условно
испытуе
в решен
помог б
Кол
В этом
ваущая
Б. Ал
Тест
и диффе
жений м
чисел? С
 a^2+b^2 ; (
 $a+2b$; (
Даль

Исходная
Первый ва

Второй ва

Третий ва

Но как быть, если испытуемый не мог сделать самостоятельно какого-нибудь одного шага (например, перейти от 2-й к 3-й или от 3-й к 4-й задаче)? На этот случай (такие случаи, впрочем, были не очень часты, так как с указанным тестом работали в основном способные учащиеся) у экспериментатора имелось несколько совершенно аналогичных («теневых», как они условно назывались) столбцов, которые позволяли «отвести» испытуемого на «боковой» путь, с тем чтобы, потренировавшись в решении аналогичных примеров, он накопил опыт, который помог бы ему сделать следующий шаг.

Количество этих побочных упражнений тоже учитывалось. В этом случае давалась графическая схема, наглядно показывающая движение испытуемого от первой к восьмой задаче.

Б. Алгебраический тест.

Тесту предшествует небольшая система задач на обобщение и дифференцировку: «Какие из указанных алгебраических выражений могут быть подведены под формулу квадрата суммы двух чисел? Объясни, почему $(a+b)^2$; $(a+b) \cdot 2$; $a+b^2$; $a+2b^2$; a^2+b^2 ; $(a+2b)^2$; $(a+b^2)^2$; $(a+2b^2)^2$; $a+2b$; $(a+b^2) \cdot 2$; $(a+2b)^2 \cdot 2$; $(2a+2b) \cdot 2$ ».

Дальше идет основной тест.

Исходная задача: $(a+b)^2=$
Первый вариант: $(a+x)^2=$
 $(x+y)^2=$
 $(m+n)^2=$

Общее с исходной задачей: буквенные обозначения не имеют ни коэффициентов, ни показателей степеней (точнее, коэффициенты и показатели равны 1). Различие: различны буквенные обозначения. В итоге задачи имеют 2 элемента, общих с исходной задачей, 1 — различный, т. е. общее у них — отсутствие коэффициентов и отсутствие показателей степеней, различное — буквенные обозначения

Второй вариант: $(2a+b)^2=$
 $(3a+4b)^2=$
 $(\frac{1}{2}a+2b)^2=$
 $(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b)^2=$
 $(\frac{1}{5}a+0,2b)^2=$

Общее с исходной задачей: буквенные обозначения те же и не имеют показателей степеней. Различие: введены коэффициенты (сначала простые, потом дробные). В итоге 2 элемента общих (отсутствие показателей степеней и одинаковые буквенные обозначения), 1 — различный (различные коэффициенты)

Третий вариант: $(a^2+b)^2=$
 $(a^3+b^4)^2=$
 $(a^n+b^2)^2=$
 $(a^n+b^{2^n})^2=$

Общее с исходной задачей: буквенные обозначения те же и не имеют внешне выраженных коэффициентов. Различие: введены показатели степени (сначала конкретные, потом отвлеченные), т. е. 2 элемента общих, 1 — различный

Четвертый вариант: $(3x+6z)^2 =$
 $(\frac{1}{3}k+0,1p)^2 =$

Пятый вариант: $(6a^2+3b^4)^2 =$
 $(\frac{1}{3}a^x+0,4b^y)^2 =$

Шестой вариант: $(c^2+d^3)^2 =$
 $(x^n+y^m)^2 =$

Седьмой вариант: $(3c^3+\frac{1}{2}d^4)^2 =$
 $(\frac{1}{4}x^n+0,2y^{b+1})^2 =$

Комбинирование задач первого и второго вариантов. По отношению к исходной задаче 1 элемент общий (отсутствие показателей степеней), 2 — различных (различные коэффициенты, различные буквенные обозначения)

Комбинирование задач второго и третьего вариантов. 1 элемент общий (буквенные обозначения), 2 — различных (различные коэффициенты, различные показатели степени)

Комбинирование задач первого и третьего вариантов. 1 элемент общий (отсутствие коэффициентов), 2 — различных (буквенные обозначения и показатели степеней)

Комбинирование задач первого, второго и третьего вариантов (по сравнению с исходной задачей все 3 элемента различны)

Этот тест представляет собой систему последовательно усложняющихся задач на применение одной из формул сокращенного умножения (квадрат суммы), в которых варьируют несущественные для типа задачи признаки. В конечном варианте трудно увидеть возможность применения этой формулы, так как по сравнению с исходной задачей изменены все внешние элементы — введены коэффициенты (к тому же еще дробные), введены показатели степеней (к тому же буквенные), изменены буквенные обозначения. Однако во всех случаях (при варьировании в определенных границах несущественных для типа задачи признаков) тип задачи сохраняется, так как сохраняются существенные признаки — сумма двух чисел в квадрате.

Учащиеся, только что познакомившиеся с указанной формулой сокращенного умножения, усваивают ее математический смысл. После этого им предлагается попробовать применить эту формулу к решению конечного варианта. Следует ожидать, что малоспособные учащиеся будут категорически отрицать такую возможность. Тогда им предлагается применить эту формулу к решению задач разных вариантов с постепенным отступлением от конечного варианта к исходной задаче. После того как будет найден такой вариант задачи, который учащийся решит, экспериментатор начинает двигаться в обратном направлении — от решенного к конечному варианту.

Учащиеся должны всякий раз мотивировать свои действия или отказ от них.

Эта се
метрическ
группы за
ражения
усложняя
более труд
такому пр
зависимос
тематичес
друга, дру
существу
чтобы объ
ству одно
очень похо
жны обос
ими задач
жат к этом
специально
представле
однотипны
Учащий
Если зада
гают повто
того, чтобы
основе тол
для этого
метический
нольда. Ре
ческим (та
бранчески
VIII кл.).
В отли
иного хара
лось, по с
ияние. Зде
скольких
задачи.
Матери
вания», со
действий. С
ния при ре
и содержа
ших рассу
типа, и д
выпадают,

VI. Системы разнотипных задач

Эта серия состоит из шести арифметических и одного геометрического теста. Арифметические тесты представляют собой группы задач различного предметного содержания и формы выражения (от 3 до 6 в каждом тесте). От теста к тесту задачи усложняются (наиболее легкие задачи относятся к тесту А, наиболее трудные — к тесту Е). Внутри групп задачи подобраны по такому принципу: часть задач однотипна по характеру данных зависимостей и отношений, характеризуется одной и той же математической структурой, но внешне задачи отличны друг от друга, другие же задачи, наоборот, внешне очень похожи, но по существу совершенно различны. Смысл задания состоит в том, чтобы объединить задачи внешне очень непохожие (но по существу однотипные) и отдифференцировать от них задачи внешне очень похожие (но по существу другого типа). Учащиеся должны обосновать свою группировку, доказать, что выделенные ими задачи относятся к одному типу, а остальные не принадлежат к этому типу. Количество однотипных задач в каждом тесте специально сделано различным, чтобы у испытуемых не возникло представления о наличии постоянного во всех тестах количества однотипных задач.

Учащийся должен выполнить задание до решения задач. Если задание выполнено с ошибкой, то вторично ему предлагают повторить группировку после решения. Это делается для того, чтобы установить, может ли ученик обобщить задачи на основе только восприятия их структуры или же ему необходимо для этого обобщить ход решения, увидеть один и тот же «арифметический скелет рассуждения» — по терминологии И. В. Арнольда. Решать задачи учащимся разрешается как арифметическим (так обычно действуют учащиеся V—VI кл.), так и алгебраическим способом (так действуют обычно учащиеся VII—VIII кл.).

В отличие от V серии здесь мы имеем дело с обобщением иного характера, иного уровня. В V серии обобщение заключалось, по сути дела, в подведении задачи под уже известное понятие. Здесь же имеет место самостоятельное обобщение нескольких явлений, формирование понятия о данном типе задачи.

Материал VI серии позволяет судить и о характере «свертывания», сокращения рассуждения и системы соответствующих действий. Об этом можно судить, анализируя процесс рассуждения при решении однотипных задач. Выявляется: а) количество и содержание «ходов» мысли, отдельных положений, составляющих рассуждение при решении каждой задачи того же самого типа, и динамика этого процесса (какие звенья рассуждения выпадают, как свертывается процесс рассуждения от первой

к последней задаче данного типа); б) как учащийся может по требованию экспериментатора развернуть процесс рассуждения до полной, с его точки зрения, структуры.

Особенности математической памяти учащихся исследовались следующим образом: выявлялось, как учащиеся запоминают и насколько хорошо помнят: а) тип задачи (характер данных в задаче отношений) и б) конкретные данные задачи, конкретные числовые величины. С этой целью учащиеся должны были воспроизводить задачи в конце урока, через неделю и через три месяца (о необходимости запомнить задачу учащиеся не предупреждались).

Геометрический тест VI серии направлен на исследование способности к обобщению геометрического материала. Имеется 5 таблиц простых геометрических фигур. На одной изображены треугольники различного размера, формы, по-разному ориентированные, на другой — многоугольники также различного вида, размера и по-разному ориентированные (начиная с треугольника), на третьей — замкнутые кривые линии, круги и овалы, на четвертой — углы самого различного размера и длины сторон, на пятой — выпуклые и вогнутые четырехугольники различного вида. Серия предъявляется до начала изучения геометрии в школе. По каждой таблице отдельно ученикам задаются одни и те же вопросы: 1) Что различного во всех изображенных здесь фигурах? 2) Имеют ли что-нибудь общее все изображенные фигуры или отдельные группы их? 3) Насколько существенно это общее? 4) Можно ли на этом основании объединить все фигуры, изображенные на таблице, в одну группу? 5) Как бы эту группу можно было обозначить, так чтобы ее можно было отличить от других? Ученик должен мотивировать свои ответы.

Приводим тесты этой серии.

А. Арифметический тест.

1. Сколько весит рыба, если хвост ее весит 4 кг, голова весит столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище столько, сколько весят голова и хвост вместе?

2. За 2 кг первого сорта рыбы и 3 кг второго сорта заплатили всего 4 руб. 80 коп. Если цена первого сорта будет снижена на 10%, а цена второго сорта на 15%, то за эту покупку придется заплатить 4 руб. 20 коп. Сколько стоит килограмм рыбы каждого сорта?

3. Мать, сын и дочь израсходовали вместе некоторую сумму, причем мать и сын израсходовали вместе 22 руб., сын и дочь вместе 15 руб., а мать и дочь вместе 20 руб. Сколько рублей израсходовал каждый из них в отдельности?

4. Трасса эстафеты была разбита на 4 участка. Нужно найти общую длину трассы, если длина 1-го и 2-го участков 100 м, 2-го и 3-го — 200 м, 3-го и 4-го — 300 м и 4-го и 1-го — 400 м.

5. Сколько весит вся выловленная рыболовецкой бригадой

за три дня рыба, если известно, что в первый день выловлено 3,2 ц, во второй в 1,5 раза больше, а в третий день на 10% меньше того, что выловлено за второй день?

Б. Арифметический тест.

1. Имеются кролики и клетки. Если в каждую клетку посадить по одному кролику, то один кролик останется без места. Если в каждую клетку посадить по два кролика, то одна клетка окажется пустой. Сколько было кроликов и сколько было клеток?

2. Во дворе бегают куры и кролики. У них вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько тех и других?

3. Если на каждую скамью в классе посадить по 5 учеников, то четверо останутся без места. Если же посадить на каждую скамью по 6 человек, то два места останутся свободными. Сколько учеников в классе и сколько скамеек?

4. Рубль разменяли на монеты 10 коп. и 15 коп. Сколько получили тех и других монет, если всего их было 9?

5. Девочка наклеивала в альбом картинки. Если на каждой странице наклеивать по 1 картинке, то останутся 4 картинки, если же на каждой странице наклеивать по 2 картинки, то одна страница останется пустой. Сколько было картинок и страниц в альбоме?

В. Арифметический тест.

1. Мебельная фабрика по плану должна ежедневно изготавливать по 48 столов. Однако она ежедневно изготавливала на 2 стола больше, чем полагалось по плану, и поэтому уже за 3 дня до намеченного срока ей оставалось изготовить только 100 столов. Сколько всего столов должна была изготовить фабрика?

2. На четырех складах мебельной фабрики хранилось по одинаковому количеству изготовленных столов. Когда с каждого склада вынесли по 90 столов, то на всех четырех складах вместе осталось столько столов, сколько было до этого на каждом. Сколько столов хранилось на каждом складе?

3. Питомнику предложено высадить в грунт определенное количество деревьев, и установлен определенный срок для их посадки. Если питомник будет высаживать по 240 деревьев в день, то к сроку будет высажено на 400 деревьев меньше, чем намечено. Если же питомник будет высаживать ежедневно по 280 деревьев, то к сроку будет высажено на 200 деревьев больше плана. Сколько деревьев должен высадить питомник и какой срок установлен для этого?

4. Двое рабочих-мебельщиков работали за одинаковую плату. Первый сделал $\frac{3}{5}$ всей работы, а второй — остальную часть. Второй рабочий получил 8 руб. Сколько получил за работу первый?

Г. Арифметический тест.

1. Автомобиль прошел путь из A в B со скоростью 20 км в час, а обратно со скоростью 30 км в час. Какова средняя скорость автомобиля за весь рейс?

2. Расстояние между A и B 135 км. Из A к B отправился грузовой автомобиль, а через 1 час 10 мин. вслед за ним отправился легковой автомобиль. Определить скорость автомобилей, зная, что легковой автомобиль шел вдвое быстрее и прибыл в пункт B на 20 мин. раньше грузового.

3. Пароход идет с постоянной скоростью из Астрахани в Волгоград и обратно. Когда быстрее можно было бы совершить этот путь — при наличии течения или если бы оно отсутствовало?

Д. Арифметический тест.

1. Старинная задача. Муж выпивал кадь воды за 14 дней, а вместе с женой за 10 дней. За сколько времени выпьет кадь воды одна жена?

2. Семья из двух человек тратит каждый день по 20 л воды. По субботам эта норма увеличивается на 15%, а по воскресеньям, наоборот, снижается на 7,5%. За сколько недель семья израсходует запас воды в 424,5 л?

3. Одна машинистка может перепечатать 1000 библиографических карточек за p час., вторая за q час. Сколько часов будут печатать они эти карточки совместно?

4. Старинная задача. Лев может съесть овцу за 2 часа, волк за 3 часа, а пес за 6 час. За сколько времени они съедят ее, если будут есть вместе?

5. Через одну трубу бассейн заполняется водой за одни сутки, через вторую за двое суток, через третью за трое суток. За какое время наполнится бассейн, если открыты все три трубы?

6. Два туриста находятся соответственно в пунктах A и B ; расстояние между A и B первый проходит за x час., второй за y час. Через сколько часов встретятся туристы, если они выйдут навстречу друг другу из пунктов A и B одновременно?

Е. Арифметический тест.

1. Учащиеся собрали 13 руб. и купили 55 билетов в театр и кино. Сколько билетов они купили, если билет в театр стоит 35 коп., а в кино 10 коп.?

2. Зрительный зал освещен 100 электрическими лампами. Горение за вечер большой лампы стоит 1,5 коп., маленькой 1 коп. Сколько было больших и маленьких ламп, если общая стоимость освещения зала за вечер равна 1,35 руб.?

3. Поезд составлен из двух-, трех- и четырехосных вагонов, причем число трех- и четырехосных вагонов одинаково. Число всех вагонов 36, а число осей 111. Определить число вагонов каждого рода в отдельности.

Ж. Геометрический тест.

Описание дано на стр. 138.

VII. Системы задач с постепенной трансформацией из конкретного в абстрактный план

Едиственный тест (А. Комбинированный) этой серии представляет собой систему десяти задач, каждая из которых постепенно трансформируется из конкретного в абстрактный, общий план. Каждая задача имеет от 3 до 5 вариантов. Первый вариант (a) — задача совершенно ясного, конкретного плана, последний вариант (d) — та же задача, но переведенная в абстрактный, общий план. Варианты b , $в$, $г$ промежуточные, представляют собой постепенные переходы от a к d с последовательным обобщением все большего и большего числа элементов задачи. Сначала испытуемому предлагается решить задачу d (абстрактный вариант). Если он не справится с заданием, то ему дается конкретный вариант этой же задачи — предлагают решить задачу a , потом снова обращаются к задаче d . Если и на этот раз решения не последует, то предлагается решить задачу $в$ и потом снова переходят к задаче d . Таким образом, порядок предъявления вариантов каждой задачи таков: $d, a, d, б, d, в, d, г, d$.

Сами задачи (от 1-й до 10-й) расположены в порядке постепенного усложнения, в этом порядке они и предъявляются испытуемому. Однако не для всех задач возможны 5 вариантов. В этом случае давались 4 и даже 3 варианта.

Не считая нужным приводить здесь все варианты задач, ограничимся тем, что приведем варианты d всех десяти задач и на двух из них покажем характер постепенного обобщения их элементов.

- 1 d . Длина комнаты b м, ширина и высота по a м. Каков объем n таких комнат?
- 2 d . Из доски нарезали m квадратиков со стороной x см и n квадратиков со стороной y см. Обрезков не осталось. Какова площадь доски?
- 3 d . Тетрадь стоит a коп., а карандаш $в$ коп. Сколько придется заплатить за x тетрадей и y карандашей?
- 4 d . Зрительный зал кино разделен проходами на a частей, причем в каждой части имеется p рядов по n мест в каждом ряду. Определить общее число зрителей, которые могут одновременно присутствовать на сеансе.
- 5 d . Для отопления здания запасено m тонн угля. Из этого количества израсходовано n тонн. По сколько тонн угля в день надо расходовать, чтобы оставшегося угля хватило на t дней?
- 6 d . Надо окрасить стену дома длиной L м и высотой H м, имеющую 3 окна по E м ширины и N м высоты. Какую площадь стены нужно окрасить?

- 7 д. На пришкольном участке p плодовых деревьев. Груш в q раз больше, чем слив, а число яблонь равно числу груш и слив вместе. Сколько плодовых деревьев каждого вида на участке?
- 8 д. Книга имеет m страниц, на каждой странице n строк, в каждой строке p букв. Во втором издании шрифт был изменен так, что в каждой строке стало a букв, на каждой странице помещалось b строк. Сколько страниц было во втором издании книги?
- 9 д. Завод должен в определенный срок выпустить a станков и поэтому наметил изготавливать по b станков в день. Рабочие перевыполнили план и изготавливали ежедневно на m станков больше, чем было запланировано. На сколько дней раньше срока завод выполнил заказ?
- 10 д. В двух колхозных амбарах имеется всего p тонн зерна. Из первого амбара ежедневно берут по a тонн зерна, из второго по b тонн. Через t дней в обоих амбарах осталось поровну. Сколько зерна было в каждом амбаре?

В а р и а н т ы з а д а ч и № 1.

- 1 а. Длина комнаты 6 м, ширина 3 м, высота 3 м. Каков объем 4-х таких комнат?
- 1 б. Длина комнаты 6 м, ширина 3 м, высота 3 м. Каков объем n таких комнат?
- 1 в. Длина комнаты 6 м, ширина 3 м, высота a м. Каков объем n таких комнат?
- 1 г. Длина комнаты 6 м, ширина и высота по a м. Каков объем n таких комнат?
- 1 д. Длина комнаты b м, ширина и высота по a м. Каков объем n таких комнат?

В а р и а н т ы з а д а ч и № 9.

- 9 а. Завод должен в определенный срок выпустить 100 станков и поэтому наметил изготавливать по 4 станка в день. Однако рабочие перевыполнили план и изготавливали ежедневно на 1 станок больше, чем планировалось. На сколько дней раньше срока завод выполнил заказ?
- 9 б. То же самое, но общее число станков a .
- 9 в. То же самое, но общее число станков a , а ежедневный план выпуска b .
- 9 г. Та же задача, но общее число станков a , ежедневный план выпуска b , изготавливали фактически каждый день на m станков больше.

Указанная серия задач показывает, насколько легко и быстро школьник переводит решение задач в общий план, насколько способен он перейти от оперирования конкретными величинами к действиям с их условными обозначениями, дающими возможность выражать отношения между величинами в обобщенной абстрактной форме. Выясняется, решает ли школьник

задачу сразу в общем плане или к этому его надо постепенно подвести и на каком этапе (на каком варианте задачи) в последнем случае произойдет полный «отрыв» от конкретных данных и школьник перейдет к абстрактному плану решения. Таким образом, в данной серии исследуется обобщение как самостоятельный переход от конкретного к абстрактному плану. Количественные показатели этого: 1) число задач (из 10 возможных), решенных испытуемыми в общем плане, и 2) среднее число вариантов, необходимых для перехода от a к d (включая и тот и другой). Чтобы уравнивать задачи в отношении вариантов (как уже указывалось, отдельные задачи имели не 5, а 4 и даже 3 варианта), устанавливался такой порядок: по каждой задаче количество решенных вариантов соотносилось с их общим количеством и исчислялся показатель соответственно пяти вариантам. Например, испытуемый по четвертой задаче решил варианты $4a$, $4b$ и $4d$. Это значит, что он решил три варианта из четырех, или 75%, что по отношению к пяти вариантам составило бы (75% от 5) 3,75. Исходя из этого устанавливаем, что по четвертой задаче показатель числа решенных вариантов у него 3,75.

В конце занятия учащихся просят воспроизвести как решенные, так и нерешенные (если они решались) задачи. Выясняется, как они запомнили конкретные данные и отношения величин в задаче.

VIII. Составление задач заданного типа

Эта серия состоит из четырех тестов — арифметического, алгебраического, геометрического и логического. В каждом тесте дается несколько задач (каждая — определенного, неизвестного ученику типа). Испытуемый, ознакомившись с задачей (но не решая ее) или решив ее (если без этого он не может обойтись при работе с тестом), должен самостоятельно составить другие задачи (по возможности и другого предметного содержания с другими числовыми показателями): а) такого же типа и б) заведомо другого типа.

Смысл заданий этой серии заключается в попытке выяснить, сможет ли испытуемый произвести самостоятельное обобщение ряда объектов в результате анализа лишь одного объекта этого рода. Если обобщение обычно производится в результате сравнения, сопоставления ряда явлений, то здесь ставится вопрос о возможности испытуемого сделать вывод о существенных (и, следовательно, общих для всех явлений данного ряда) свойствах без сравнения и сопоставления на основании анализа лишь одного явления. Построить ряд объектов (а если ученик самостоятельно составил задачу, однотипную с данной, значит, он уже строит этот ряд), аналогичный одному данному объекту,

можно только в том случае, если в этом одном испытуемый видит существенное и общее. Выяснялось, как испытуемый анализирует структуру задачи (или структуру решения задачи), как рассуждает, выделяя существенное и несущественное с точки зрения типа и не имея возможности сравнить и сопоставить хотя бы две задачи одного типа. Для оценки выполнения задания употребляется трехбалльная шкала соответственно трем уровням выполнения задания: 1) наиболее примитивный уровень — задача аналогична данной, только изменены числовые показатели; 2) задача другого предметного содержания и с другими числовыми показателями; 3) задача другого предметного содержания, представленная в общем виде.

Ниже дается описание тестов.

А. Арифметический тест.

1. Двое рабочих изготовили за 9 час. работы 243 детали. Один из них изготовлял в час 13 деталей. Сколько деталей изготовлял в час другой рабочий?

2. На берегу реки заночевали 3 рыбака. Все они были курящие, но только у одного оказалась начатая пачка папирос. Рыбаки разделили папиросы поровну. К утру каждый выкурил по 4 папиросы и у всех вместе осталось столько штук, сколько вначале было у каждого. Сколько штук папирос досталось каждому рыбаку, когда папиросы были разделены поровну?

3. Велосипедист должен попасть в место назначения к определенному сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 км в час, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 км в час, то опоздает на час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

4. На 36 руб. куплен товар двух сортов. Товара второго сорта куплено на 1,5 кг больше, чем товара первого сорта, поэтому за товар каждого сорта уплачено поровну. Если бы было куплено товара каждого сорта по 5 кг, то остались бы неизрасходованными 9 руб. Найти цену товара каждого сорта.

Б. Алгебраический тест.

1. Придумать трехчлен, который можно было бы разложить на множители вынесением члена $2a^2b$ за скобки.

2. Можно ли сказать, что p всегда будет меньше, чем $3p$? Что a^2 больше a ? Что « $-x$ » — отрицательное число?

3. Одна сторона прямоугольника равна $3m+2n$, а другая сторона больше ее на $m-n$. Определить периметр и площадь его.

4. Какова общая формула четного числа?

В. Геометрический тест.

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника вдвое больше его основания. Периметр его равен 45 см. Найти величину сторон.

2. Ребро куба равно 6 см. Найти поверхность куба.

3. В треугольнике ABC угол A равен $\frac{2}{3}$ от угла B , а угол B равен $\frac{3}{5}$ угла C . Определить величину каждого угла.

Г. Логический тест.

В школе 370 учащихся. Доказать, что среди них обязательно найдутся хотя бы два ученика, отмечающие свое рождение в один и тот же день.

IX. Задачи на доказательство

Серия состоит из двух алгебраических, одного геометрического и одного логического теста. Каждый тест представляет собой систему однотипных, все усложняющихся доказательств. Подобных задач учащиеся либо вообще не решают в школе (тесты Б и Г), либо еще не решали (тесты А и В предъявляются до начала изучения соответствующих разделов в школе). С помощью этих тестов исследуется собственно творческое обобщение — обобщение метода рассуждения, перенос усвоенных принципов доказательства на решение аналогичных, но более сложных мыслительных задач. В основе первого алгебраического теста (А) лежит принцип алгебраических преобразований, второй тест (Б) связан с овладением принципом последовательного исследования различных возможностей. Геометрический тест связан с овладением доказательством теорем, основанном на принципе выделения и доказательства равенства треугольников. Порядок предъявления задач следующий: предъявляется первая (наиболее простая) задача серии. Ученик должен осознать (самостоятельно или с помощью экспериментатора) принцип рассуждения. Затем ему дается для доказательства последняя (самая сложная) задача серии. В случае, если ученик не справится с нею, ему дается вторая задача (и так далее с последовательным приближением к последней задаче). Например, порядок предъявления задач алгебраического теста А таков: 1, 7, 2, 7, 3, 7, 4, 7, 5, 7, 6, 7. О характере обобщения судим, анализируя процесс рассуждения. Его количественная сторона выражается числом звеньев при переходе от первой к последней задаче теста и величиной последнего шага. Так, если школьник решил задачи в следующем порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 7, то его показатель по этому тесту будет 6, 2.

Тесты IX серии предназначены и для исследования свернутости (сокращенности) процесса рассуждения. Под этим углом зрения анализируется решение наиболее сложной задачи теста, которую оказался в состоянии решить испытуемый. Для этого количество звеньев реального процесса рассуждения при решении этой задачи фиксируется и соотносится с количеством звеньев развернутого процесса решения той же задачи (по предложению экспериментатора школьник развертывает рассуж-

дение до полной с его точки зрения структуры). Обращается внимание на то, какие звенья выпадают. Тесты этой серии.

А. Алгебраический тест.

1. Можно ли сказать, что $-d$ заведомо изображает отрицательное число? Или что $2a > a$? Или что $8n$ — обязательно целое число?

2. При каких условиях: $a = 5a$; $a = a^2$; $a < a^2$; $a > a^2$; $-a > 0$; $a - 2 > 0$; $a + b < a - b$?

3. При каком значении m равенство $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ несправедливо?

4. При каких значениях a и b имеет место равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{3a}{b} ?$$

(Испытуемый должен исследовать разные возможности.)

5. Доказать, что $x^2 + x + 1$ не может быть отрицательным числом при любом значении x .

6. Доказать, что многочлен $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ при всех значениях x положителен.

7. Доказать, что при любом значении a выражение $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10$ будет числом положительным.

Б. Алгебраический тест.

1. Доказать, что сумма любых трех последовательных чисел делится на 3 (при любом целом значении a).

2. Задумайте любое число, умножьте его на число, больше задуманного на 6 и прибавьте 9. Доказать, что полученный результат является квадратом.

3. Доказать, что если к произведению двух последовательных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

4. Доказать, что любые три последовательных числа отличаются следующим свойством: квадрат среднего на единицу больше произведения двух остальных.

5. Написать любое трехзначное число, цифры сотен, десятков и единиц которого есть последовательные числа натурального ряда. Затем написать число теми же цифрами, но в обратном порядке. Из большего числа вычесть меньшее. Доказать, что во всех случаях получится 198.

6. Сумма двух дробей равна 1. Доказать, что квадрат первой дроби, сложенный со второй дробью, равен квадрату второй дроби, сложенной с первой.

7. Дано шестизначное число типа $abcavc$ (например, 526 526). Доказать, что все подобные числа делятся на 13. Если задача оказывается слишком трудной для испытуемого, который уже «вплотную» подошел к ней, решив задачу № 6, то дается вспомогательная задача: доказать, что все числа типа aa (например, 33, 55 и т. д.) делятся на 11.

В. Геометрический тест.

1. Доказать, что периметр треугольника, вершины которого лежат на сторонах данного треугольника, меньше периметра этого треугольника (см. рис. 16).

2. Доказать, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны.

3. Если середины боковых сторон равнобедренного треугольника ABC соединить отрезками прямой DA и EC с вершинами противоположных углов при основании этого треугольника, то эти отрезки равны. Доказать.

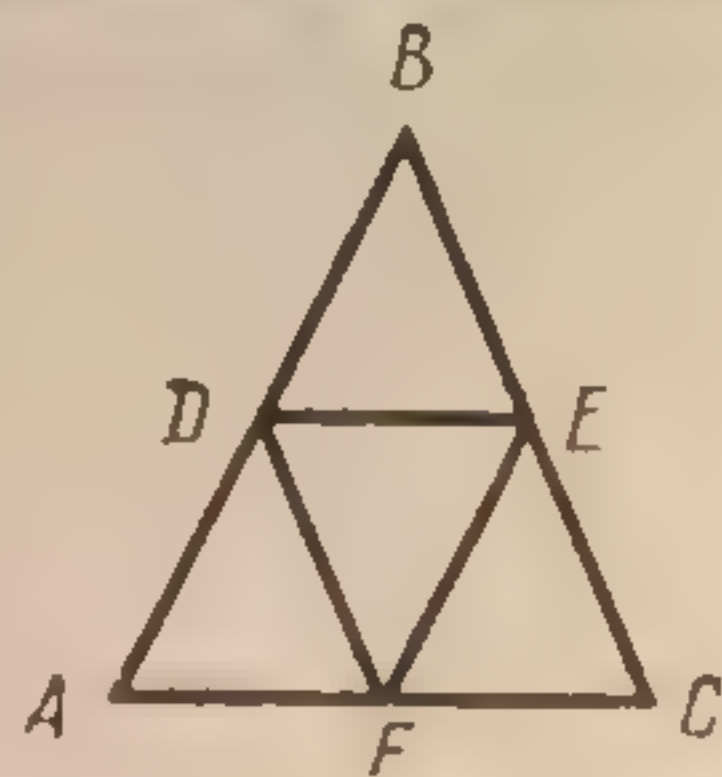


Рис. 16.

4. Если из середин боковых сторон равнобедренного треугольника ABC провести перпендикуляры до пересечения с другой стороной, то эти перпендикуляры будут равны. Доказать.

5. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36° . Доказать, что биссектриса угла при основании, продолженная до пересечения с противоположной стороной, делит равнобедренный треугольник на два других равнобедренных треугольника.

6. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

7. Доказать, что сумма расстояний от точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон одна и та же для всех точек основания.

Г. Логический тест.

1. Восстановить пропущенные цифры в записи сложения:

$$\begin{array}{r} + \quad 4. \\ \quad \dots 2 \\ \hline \quad \dots 01 \end{array}$$

2. Восстановить пропущенные цифры в записи умножения:

$$\begin{array}{r} \times \quad \dots \dots 2 \\ \quad 18.48 \\ 7499. \\ \hline \quad \dots 66. \end{array}$$

3. Восстановить пропущенные цифры в записи умножения:

$$\begin{array}{r} \times \quad 6. \\ \quad \dots \\ \quad \dots \\ \quad \dots \\ \hline \quad \dots 6 \end{array}$$

4. Ученик правильно перемножил на доске два числа — пятизначное на трехзначное, но после этого большинство цифр стер. Восстановить стерты цифры по оставшейся записи:

$$\begin{array}{r} \times \quad .7 \dots \\ \quad 743 \\ \hline \dots\dots 5 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \hline 42 \dots 87 \end{array}$$

5. Найти цифровое значение букв в этой условной записи сложения многозначных чисел (одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами):

$$\begin{array}{r} + \quad \text{смех} \\ \quad \text{гром} \\ \hline \quad \text{греми} \end{array}$$

Х. Составление уравнений по условиям задачи

Задачи серии направлены (как и задачи предыдущей серии) на исследование обобщения определенного метода рассуждения. По мнению большинства методистов, составление уравнений по условиям задач не поддается единому достаточно конкретному правилу. Это, по-видимому, правильное утверждение. Однако при решении ряда подобных задач у учащихся постепенно формируется навык составления уравнений, в основе которого лежит определенный общий принцип подхода к решению таких математических задач, общий метод рассуждения. Целью указанной выше серии и является выяснение того, насколько легко и свободно складывается этот навык, как быстро обобщается соответствующий метод рассуждения и как широка зона его переноса.

Серия предъявляется ученику до начала изучения соответствующего раздела алгебры в школе. В этой серии 12 постепенно усложняющихся задач, сведенных в один тест. Составить уравнение по условиям первой задачи очень легко, по условиям последней задачи — значительно трудней. Экспериментатор объясняет ученику самый общий принцип составления уравнений на первой задаче и затем предлагает ему для решения задачу № 12 (можно ограничиться только составлением уравнения). Если ученик не справится с этим заданием (это вполне естественно), то экспериментатор начинает движение «вниз», последовательно предлагая 11, 10, 9, 8-ю и т. д. задачу вплоть до той, которую ученик решить сумеет. Вот этот диапазон — от первой задачи до той, которую ученик сумел решить, и будет характеризовать количественно широту переноса только что сформи-

ровавшегося частного метода рассуждения. Затем экспериментатор ведет ученика в обратном направлении — последовательно предлагает задачи от той, которую он только что решил, до 12-й включительно. На какой задаче ученик остановится и не сможет продвигаться дальше самостоятельно? А с небольшой помощью экспериментатора (зона ближайшего развития!)?

Количественный показатель отражает все эти три момента. Если, например, испытуемый после первой задачи сумел решить четвертую, затем самостоятельно дошел до шестой, а с помощью экспериментатора — до девятой, то он получает индекс 3; 6; 9, что означает: зона переноса только что сформировавшегося на одной задаче метода — три задачи (вторая, третья и четвертая), максимальное продвижение — до шестой задачи, а зона ближайшего развития — девятая задача включительно. О свертывании процесса рассуждения судим, сравнивая под этим углом зрения рассуждение школьника при последовательном решении задач (как и в предыдущей серии). Серия дает возможность исследовать дополнительно и некоторые особенности восприятия задачи, умения «схватить» общую структуру задачи, основные отношения.

А. Алгебраический тест.

1. Учитель сказал ученику, чтобы он прибавил к данному числу 12, а результат разделил на 13. Однако ученик невнимательно слушал учителя и от данного числа отнял 13 и полученный результат разделил на 12. Ему повезло: он дал правильный ответ. Каково заданное число?

2. Прибавить 36 к определенному числу — это все равно, что умножить это неизвестное число на 4. Какое это число?

3. Я загадал число. Сумма половины и трети его на 7 единиц больше четверти его. Что это за число?

4. Блокнот в 4 раза дороже карандаша, карандаш дешевле блокнота на 30 коп. Сколько стоит блокнот и карандаш в отдельности?

5. В трех палатках у продавцов было поровну мандаринов. Когда каждый продал по 600 штук, то у всех вместе осталось их столько, сколько было первоначально у каждого. Сколько мандаринов было у каждого вначале?

6. Сумма двух чисел равна 20. Если одно из этих чисел увеличить в 5 раз, а другое в 4 раза, то сумма полученных чисел будет равна 92. Найти числа.

7. «Скажи-ка, дедушка, какого возраста твой сын?» — «Ему столько же недель, сколько внуку дней». — «А внук в каком возрасте?» — «Ему столько месяцев, сколько мне лет». — «Сколько же тебе лет-то?» — «Троим вместе ровно 100 лет». Сколько лет каждому?

8. Школа приобрела библиотечные книги. Если заплатить за них трехрублевыми деньгами, придется выдать восемь биле-

тами больше, чем в том случае, если заплатить пятирублевыми. Сколько стоят книги?

9. В двух бочках было разное количество воды. Если из первой бочки перелить во вторую одно ведро воды, то в них будет равное количество воды, а если из второй бочки перелить в первую 20 ведер воды, то в первой будет втрое больше воды, чем во второй. Сколько ведер воды в каждой бочке?

10. Разделите число 100 на 4 неравные части с таким расчетом, что если от первого числа отнять 4, ко второму прибавить 4, третье умножить на 4, четвертое разделить на 4, то во всех случаях получится одинаковый результат. Какие это числа?

11. По окружности, длина которой равна 999 м, движутся 2 тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 мин. Определить скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.

12. Мне теперь втрое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моем возрасте. Когда мне будет столько лет, сколько теперь моему брату, то нам вместе будет 96 лет. Сколько лет сейчас каждому?

XI. Нереальные задачи

Эта небольшая серия (один тест) состоит из задач, числовые данные которых таковы, что делают эти задачи лишены смысла. Тип этих задач вполне реален, но данный конкретный вариант этого типа не реален. Задачи указанной серии направлены на исследование некоторых особенностей обобщения математического материала, проявляющихся как в области его восприятия, так и в области переработки и хранения в памяти. Предъявляя эти задачи, экспериментатор просит решать их возможно быстрее одну за другой и не останавливается на их разборе и анализе совместно с испытуемым, пока тот не закончит решение всех задач. Если испытуемый обнаруживал нереальность условия, то экспериментатор объяснял это случайной ошибкой и предлагал перейти к следующей задаче. Установка на быстроту решения важна для того, чтобы побудить испытуемого проявить свойственный ему тип восприятия и решения задачи «в чистом» виде, отвлекая его от возможных попыток проанализировать и оценить условия задачи. Предполагалось, что испытуемый, предпочитающий воспринимать и решать задачи в общем виде, отвлекаясь от конкретных данных, может и не заметить нереальности конкретных условий задачи. Выясняется также, как испытуемый помнит задачи данной серии (воспроизведение требовалось в конце занятия, через неделю и через три месяца).

А. Сборный тест.

1. Периметр прямоугольного треугольника равен 3,72 м. Две его стороны по 1,24 м каждая. Найти третью сторону.

2. Чему равна площадь прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом, равным $5a$ см, и гипотенузой, равной $12a$ см?

3. Записать в общем виде (алгебраически) все числа, которые делятся на 5 и в остатке имеют 7.

4. Иван на два года моложе Петра, Петр четырьмя годами старше Степана, Андрей на три года старше, чем Петр, Иван равен по возрасту Степану. Кто старше — Андрей или Иван?

5. Пароход весь путь от A до B (по течению) и обратно (против течения) шел с максимальной скоростью. Фактически, ввиду наличия течения, скорость его была различной: от A до B он шел со скоростью 20 км в час, а обратно со скоростью 30 км в час. Какова его средняя скорость за весь путь?

XII. Образование искусственных понятий

Тесты этой серии имеют целью выявить некоторые особенности способности школьников к обобщению как общей способности, не связанной с осуществлением математической или какой-либо иной учебной деятельности.

Тесты представляют собой специально разработанные нами модификации известной методики образования искусственных понятий Выготского—Сахарова. Эта методика использовалась и в последнее время для характеристики индивидуальных особенностей мышления (см., например, работы А. Ф. Говорковой [95], Г. П. Антоновой [30]). Тесты представляют собой задачи на формирование искусственных, экспериментальных неучебных понятий¹. Для обозначения этих искусственных понятий вводятся такие же искусственные, ничего не значащие условные термины (в использованных тестах это были слова «хок», «гок», «лок»). Тесты отличаются друг от друга по степени сложности. Каждый тест представляет собой набор карточек с изображением фигур. Эти фигуры характеризуются тремя параметрами — формой, величиной и цветом. Часть этих фигур объединяется в искусственное понятие (по двум из трех данных признаков) и обозначается условным термином. Таким образом, в каждом тесте часть признаков является существенными, а часть — несущественными, и соответственно этому часть фигур образует экспериментальное понятие, а часть — не входит в него. У одной из фигур, относящихся к экспериментальному понятию, обозначение понятия дано на лицевой стороне, у других — на оборотной стороне. Испытуемый не знает, комбинация каких

¹ С точки зрения математики эти тесты можно рассматривать как задачи на классификацию по разным признакам. Целям нашей работы более соответствует классическая психологическая интерпретация такого рода задач, из которой мы и исходим.

признаков и какого их количества лежит в основе понятия. Ему дается задание — отобрать все карточки с изображением фигур, относящихся к данному понятию, стараясь обойтись возможно меньшим количеством проб (вытащив как можно меньше «пустых» карточек). Карточки расположены перед испытуемым в свободном порядке, он указывает поочередно на те карточки, которые, как он предполагает, могут быть отнесены к экспериментальному понятию, данному ему в образце. Перевертывая вслед за этим карточку, он смотрит, есть ли там слово, обозначающее, что данная фигура относится к этому понятию. Фиксируется, как испытуемый рассуждает при этом, с помощью каких умозаключений он приходит к решению задачи, как выделяет существенные признаки, как отвлекается от несущественных, как он обобщает при этом и как у него формируется понятие (как совокупность существенных признаков)¹. Количественный показатель — количество проб, т. е. число карточек, которые выберет испытуемый, прежде чем отберет все карточки, образующие понятие, и назовет его существенные признаки.

Характер инструкции для испытуемых будет показан на тесте Б. Инструкции к тестам А и В носят аналогичный характер. Всюду фигуры даны в уменьшенном размере.

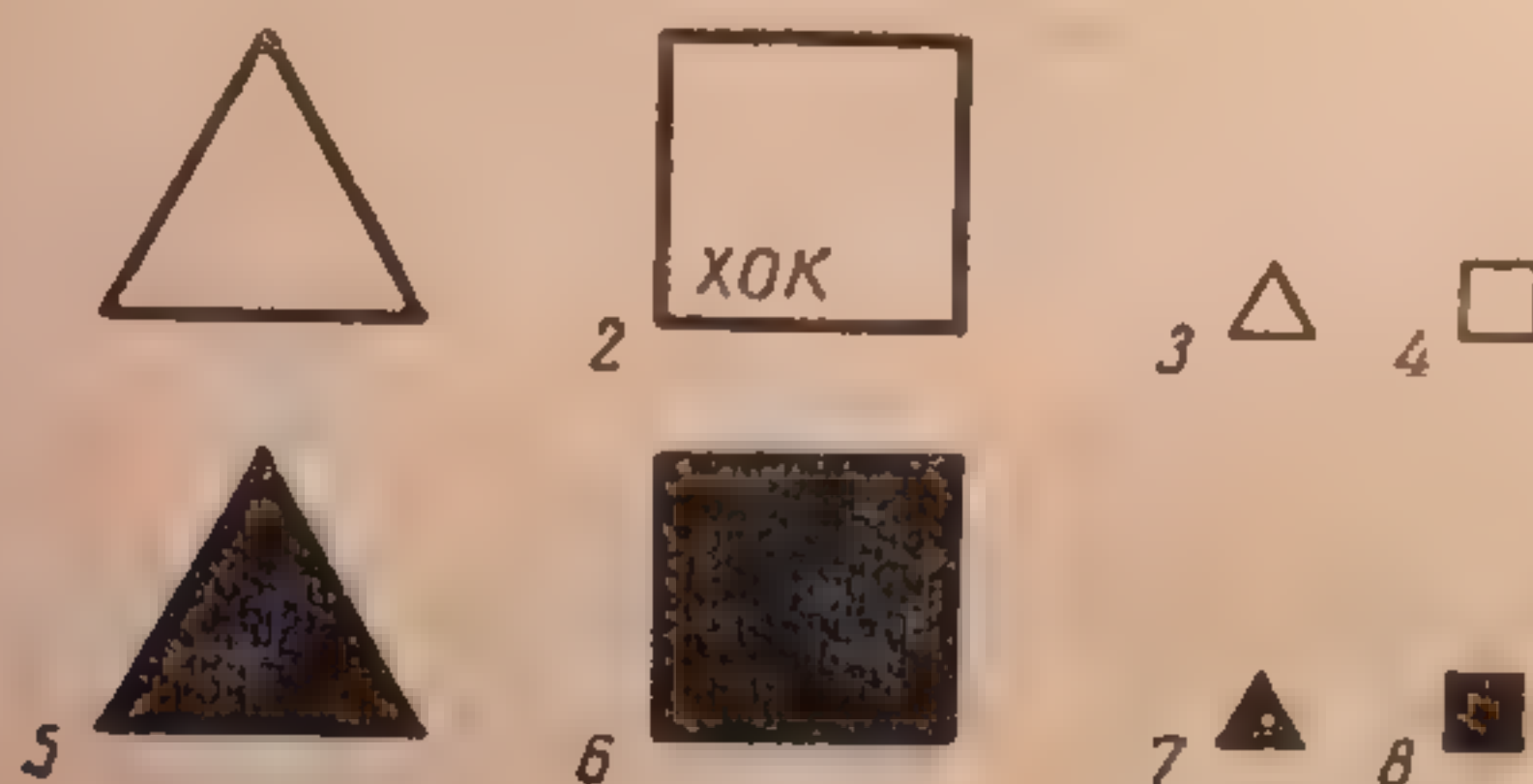


Рис. 17. А. Специальный тест. Понятие «хок» (фигуры 2 и 6). Существенные признаки — форма и величина. Несущественный признак — цвет. (На рисунке фигуры красного цвета изображены белыми, синего цвета — черными.)

Инструкция. «Перед тобой находятся 12 карточек с изображениями фигур. Они все разные, двух совершенно одинаковых нет. Однако часть их по определенным признакам объединяется в группу, обозначаемую условно термином «гок». У всех карточек, относящихся к этой группе, на оборотной стороне обозначено это слово. Те карточки, у которых на оборотной стороне

¹ Разумеется, все испытуемые предварительно проверяются на отсутствие аномалий цветоощущения.

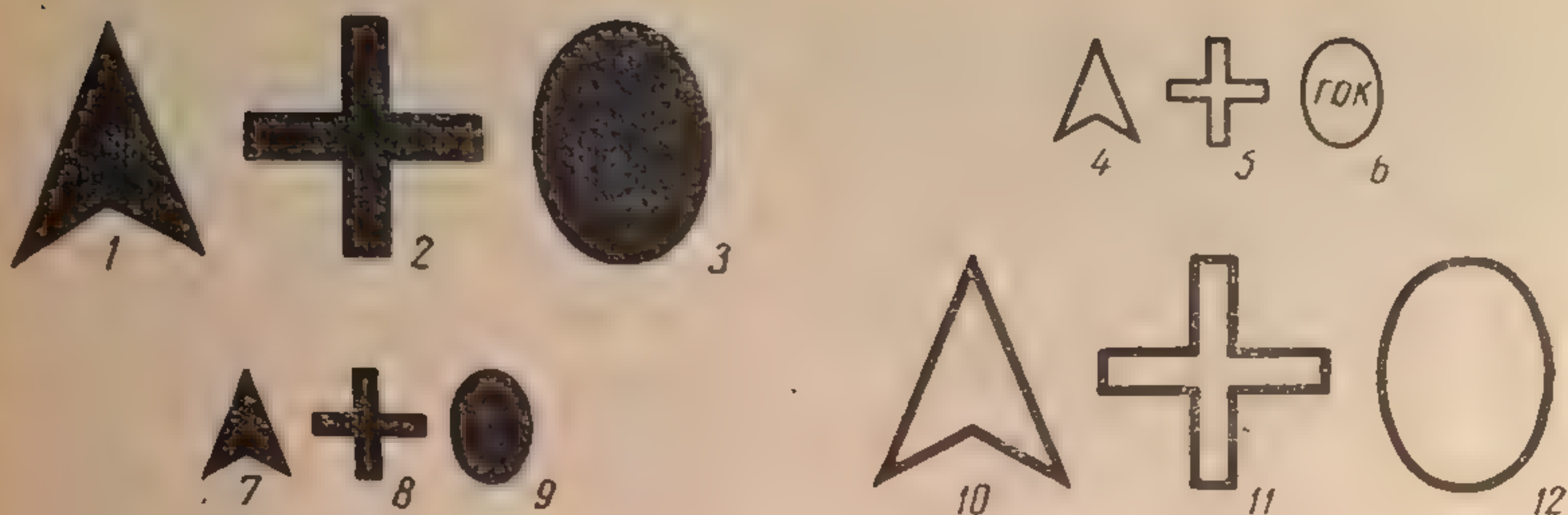


Рис. 18. Б. Специальный тест. Понятие «гок» (фигуры 4, 5 и 6). Существенные признаки — цвет, величина, несущественный признак — форма.
(Фигуры красного цвета изображены белыми, синего цвета — черными.)

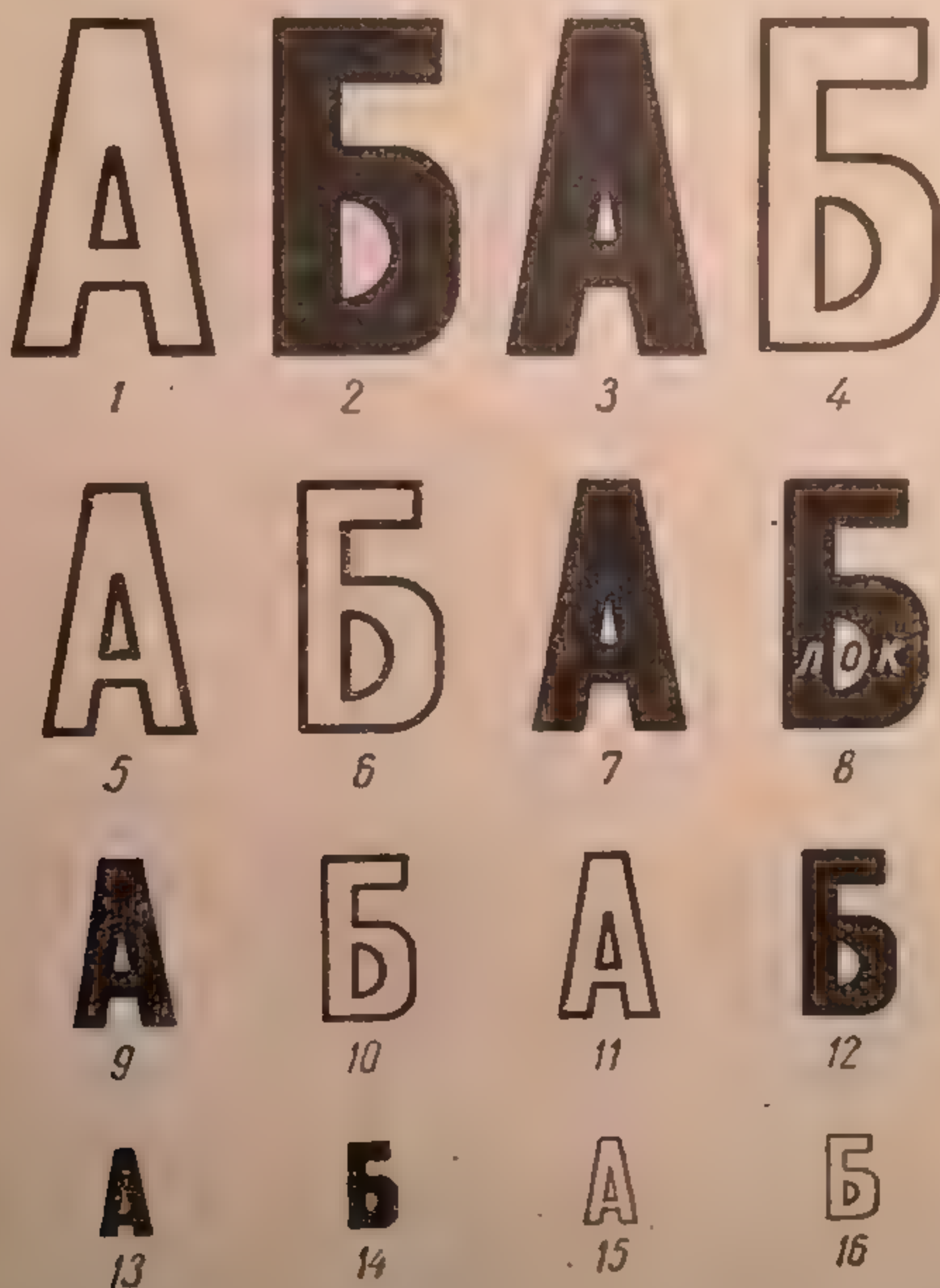


Рис. 19. В. Специальный тест. Понятие «лок» (фигуры 2, 8, 12, 14). Существенные признаки — форма и цвет. Несущественный признак — величина. (На рисунке фигуры красного цвета изображены белыми, а синего цвета — черными.)

этого слова нет, не относятся к данной группе. Только у одной карточки ты можешь видеть это слово на лицевой стороне. Она будет служить тебе ориентиром.

Задача заключается в том, чтобы отобрать все карточки «гок» с помощью возможно меньшего числа проб. Бери карточки в любом порядке, переворачивай, смотри, есть ли там надпись, и соображай. Естественно, что самое большое число проб — 12 (если перевернуть одну за другой все карточки и отобрать все с надписью «гок»). Задача же, повторяю еще раз, — сделать это, производя как можно меньше пробных попыток. Если ты взял карточку, на которой нет слова «гок», положи ее обратно на прежнее место. Как только ты, как тебе кажется, отобрал все фигуры «гок», скажи об этом».

ХIII. Задачи с несколькими решениями

В трех тестах этой серии представлены задачи, которые могут быть решены различными путями (помимо общего перехода от арифметического к алгебраическому решению). Наиболее простой, экономный («изящный» по распространенному выражению математиков) путь решения по возможности скрыт.

Эти задачи направлены на исследование особенностей переключения от одной мыслительной операции к другой. Выясняется, в частности, насколько ученик способен переключаться с одного способа решения задачи на другой способ решения этой же задачи, т. е. с одного способа действия на другой.

Испытуемый должен самостоятельно найти максимальное количество способов решения задачи. Однако сначала такого задания не дается. Ученик должен просто решить задачу. Выясняется, нет ли у него самого потребности, не удовлетворяясь первым решением, искать наиболее простое и экономное. После этого ученику дается задание — попытаться найти как можно больше различных способов решения задачи. Если ученик вообще не сумел найти других решений или нашел не все возможные, то экспериментатор демонстрирует ему эти решения. Дальше ученика просят сравнить все решения, оценить их и указать то, которое ему больше нравится (с мотивировкой выбора). Отмечается, какой способ решения предпочитает школьник и почему. Через неделю экспериментатор выясняет, какие из способов решения запомнились. О гибкости мыслительных процессов судим по тому, насколько ученик умеет разнообразить попытки решения, насколько легко и свободно он переключается от одной умственной операции к другой, по многообразию подходов к решению задач.

А. Арифметический тест.

1. Сколькими способами можно уплатить 78 руб., имея денежные знаки 3- и 5-рублевого достоинства?

2. На двух кустах сидели 16 воробьев. Скоро со второго куста 2 воробья улетели совсем, а затем с первого куста на второй перелетели 5 воробьев. После этого на каждом кусте оказалось одно и то же число воробьев. Сколько воробьев было на каждом кусте вначале?

3. В четырех классах всего 118 учеников, в том числе в I и II классах вместе 70 учеников; в I и III — вместе 65 учеников; во II и III — вместе 59 учеников. Сколько учеников в IV классе?

4. Найти сумму всех целых чисел от 1 до 50.

5. «Так ты, значит, состоишь в профсоюзе вдвое дольше меня?» — «Да, ровно вдвое». — «А помнится, ты говорил раньше, что втрое». — «Два года назад? Тогда и было втрое, а теперь только вдвое». Сколько лет каждый из собеседников состоит в профсоюзе?

6. Плывая по течению, пароход делает 20 км в час, против течения он плывет со скоростью 15 км в час. Чтобы пройти путь от А до Б, он употребляет на 5 час. меньше, чем на обратный путь. Каково расстояние между А и Б?

7. К 3 л воды температурой 36° добавили 4 л воды комнатной температуры (15°). Какая температура установится в сосуде?

8. Расстояние по реке между двумя пристанями А и В равно 13,5 км. От пристани А к пристани В отправилась шлюпка, а через 1 час 10 мин. вслед за ней отправилась моторная лодка. Определить скорость шлюпки и моторной лодки, зная, что моторная лодка шла вдвое быстрее и прибыла к пристани В на 20 мин. раньше, чем шлюпка.

Б. Алгебраический тест.

1. Вычислить выражение: $a^2 (a^2 - b) (a^8 - b) (a^n + b^n) =$ при $a=2$; $b=4$; $n=3$.

2. Вычислить: $2ab + b^2 + a^2 =$ при $a=17$; $b=3$.

3. Решить уравнение: $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$.

4. Вычислить: $113^2 - 112^2 = ?$

5. Разность квадратов двух последовательных четных чисел равна 28. Найти эти числа.

В. Геометрический тест.

В этом тесте содержится прямое указание на возможность доказательства разными способами. В скобках дается либо число способов, которое демонстрировали способные ученики в экспериментах, либо число способов, которое указывается в методической литературе и на которое, следовательно, можно ориентироваться.

1. Попытаться найти несколько доказательств теоремы о внешнем угле треугольника (внешний угол равен сумме двух внутренних, с ним не смежных) (2 способа).

2. Доказать, разными способами, что из точки вне прямой можно опустить на нее только один перпендикуляр (2 способа).

3. Доказать, несколькими способами, что две параллельные хорды, проведенные через концы одного диаметра, равны. (В статье Кузьмина [227] дано 3 способа доказательства этой теоремы.)

4. Попытаться найти несколько доказательств теоремы о том, что большей дуге круга соответствует и большая хорда. (В статье Никитина [314] указывается на 6 возможных доказательств.)

5. Попытаться найти несколько доказательств теоремы Пифагора. (В статье Никитина [314] указывается на 4 возможных способа.)

XIV. Задачи с меняющимся содержанием

Здесь также исследуется переключение от одной закрепленной умственной операции к другой.

В эту серию входят задачи, построенные по следующему принципу: дана исходная задача и второй ее вариант. Во втором варианте по сравнению с первым изменяется один из элементов (внешне кажущийся малосущественным), вследствие чего содержание задачи и действий по ее решению резко меняется. Исследуется, насколько испытуемый способен резко изменить, перестроить содержание действия по решению задачи в соответствии с изменившимися условиями (так как задача путем трансформации одного из элементов превращается, по сути дела, в задачу другого типа). Тот факт, что в задаче на первый взгляд никаких существенных изменений не произошло, невольно настраивает испытуемого на тенденцию придерживаться уже сложившегося способа решения, заставляя его думать, что если задача в сущности не изменилась, то не должен сколько-нибудь существенно измениться и способ действия по ее решению.

Важно выяснить, какое влияние оказывает решение первого варианта задачи на решение ее второго варианта. Для этого надо проследить, как решается второй вариант: а) сам по себе и б) сразу после решения первого варианта. Для этого мы поступили следующим образом: за месяц до предъявления задач XIV серии испытуемые должны были решить отдельно несколько задач типа второго варианта (за исключением задач «впечатляющих» по своему характеру) с несколько измененными данными. Это и позволило выяснить, как одна и та же задача решается сама по себе и в качестве второго варианта.

А. Арифметический тест.

1. Расстояние между городами 225 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно выходят поезда — пасса-

жирский (скорость 50 км в час) и товарный (40 км в час). Через какое время они встретятся?

(2-й вариант: вместо слов «навстречу друг другу» говорится «в одном направлении». Если испытуемый задает вопрос, какой из поездов находится впереди, то ему предлагается самому решить, при каком условии задача имеет смысл.)

2. Для автомобиля «Москвич» норма расхода бензина на 100 км пути составляет в летнее время 10 кг, а в зимнее 11 кг. На сколько процентов зимняя норма больше летней?

(2-й вариант: на сколько процентов летняя норма меньше зимней?)

3. Брусok мыла весит $\frac{3}{4}$ кг плюс $\frac{3}{4}$ этого числа. Сколько он весит?

(2-й вариант: вместо слов «этого числа» говорится «этого бруска».)

4. Лошадь половину времени, затраченного на переход, двигалась со скоростью 12 км в час., а остальное время — со скоростью 4 км в час. Найти среднюю скорость лошади.

(2-й вариант: половину пути прошла со скоростью 12 км в час, а остальной путь — со скоростью 4 км в час.)

Б. Алгебраический тест.

1. $(0,1mn^2 + 0,01m^2n)^2 =$

(2-й вариант: плюс меняется на минус.)

2. $(2a^2b^2c^2 - 2x^2y^2z^2)^2 =$

(2-й вариант: то же выражение в кубе, т. е. меняется только одна из данных девяти одинаковых цифр.)

3. В бассейн проведены 2 трубы, первая наполняет бассейн за p час., вторая за q час. Через сколько часов наполнится пустой бассейн, если обе трубы будут открыты одновременно?

(2-й вариант: по первой трубе вода поступает в бассейн, а по второй, наоборот, выливается из бассейна.)

В. Геометрический тест.

1. Чему равен угол между биссектрисами вертикальных углов?

(2-й вариант: смежных углов.)

2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Определить угол, образованный пересечением биссектрис внутренних односторонних углов.

(2-й вариант: внешних односторонних углов.)

3. Имеется прямая на плоскости и точка на ней. Сколько можно построить в этой плоскости прямых, исходящих из этой точки и перпендикулярных к данной прямой?

(2-й вариант: вместо слов «прямая на плоскости» говорится «прямая в пространстве».)

XV. Задачи на перестройку действия

Тесты этой серии (как и предыдущей) направлены на исследование легкости переключения с одного способа действия на другой, легкости перестройки системы действий в соответствии с изменившимися условиями. В отличие от XIV серии в задачах XV серии первоначальный способ действия не только складывался, но и специально закреплялся. Соответствующий стереотип мыслительных операций формировался в условиях последовательного решения ряда «монотонных», более или менее однообразных задач одного и того же типа. Соответственно этому устанавливался и закреплялся определенный алгоритм решения как определенный порядок выполнения некоторой системы операций для решения всех задач данного типа. После того как стереотип устанавливался и более или менее закреплялся, для решения предлагалась другая задача — на поверхностный взгляд того же типа, но резко отличающаяся по существу (эта задача проще и легче предыдущих).

Выясняется, насколько легко перестраивается у испытуемого сложившийся и ставший уже до некоторой степени привычным стереотип рассуждения и алгоритм решения или здесь будет действовать «инерция». Сумеет ли он отойти от шаблона, трафарета?

Тесты XV серии предъявлялись учащимся с предложением решать их возможно быстрее. Однообразие задач обычно их не удивляло, они рассматривали это как своеобразную тренировку в решении. Измерялось и фиксировалось время решения каждой задачи, особенно последней. Предполагалось, что в ряде случаев у испытуемого, даже обратившего внимание на то, что задача другая, будет «срабатывать» сложившийся стереотип решения и время решения последней задачи (объективно менее трудной, чем предыдущие) заметно возрастет. Как и в предыдущей серии, выяснялось, как испытуемый решает последние задачи тестов, независимо от первых (с этой целью последние задачи в несколько измененном виде решались испытуемым за месяц до проведения основного эксперимента).

Ниже приводятся тесты XV серии.

А. Арифметический тест.

1. $\frac{1}{2}$ пришкольного участка занято садом, 50% остатка огородом, остальная площадь (0,3 га) занята цветами. Какова площадь пришкольного участка?

2. 75% огорода занято картофелем, $\frac{1}{5}$ остатка капустой, остальная площадь (4 га) занята свеклой. Какова площадь огорода?

3. 0,6 сада занята плодовыми деревьями, $\frac{1}{4}$ остатка ягодными кустарниками, остальная площадь (3 га) занята виноградником. Какова площадь сада?

4. Школьники осваивают пустырь под спортплощадку. Седьмые классы обработали 40% всей площади, шестые 0,5 остатка, остальные 0,15 га обработали пятые классы. Какова площадь будущей спортплощадки?

5. $\frac{2}{5}$ площади острова в излучине реки занимают огороды, 0,75 остатка — луга, остальные 6 га — пески. Какова площадь острова?

6. $\frac{4}{5}$ стогектарного поля занято под пашню, 15% огородами, остальную площадь занимают пруды. Какова площадь прудов?

Б. Алгебраический тест.

$$+12 - (-4) =$$

$$-17 - (+18) =$$

$$0 - (-6) =$$

$$+7 - (+11) =$$

$$-46 - (+3) =$$

$$22 - (-3) =$$

$$-19 - (+18) =$$

$$-9 - (+7) =$$

$$14 - (-11) =$$

$$27 - (-9) =$$

$$19 - (+3) =$$

$$-2 + (-3) =$$

В. Алгебраический тест.

Дано a , прибавить 2, потом умножить на 2, затем возвести в квадрат. (В задачах 2—9 те же операции производятся с другими данными числами.)

2. Дано $2x$

3. " $3m$

4. " y^2

5. " $3a^2$

6. " b^n

7. " $n+2$

8. " a^3-2

9. " $3a^n-1$

10. " $2b^n$, разделить на 2, потом вычесть 2, затем возвести в квадрат.

Г. Алгебраический тест.

1. $(x+2y)^2 =$

2. $(2m+1)^2 =$

3. $(x^2+xy)^2 =$

4. $(2mn+2m)^2 =$

5. $(3a^2+2b^3)^2 =$

6. $(2a^3-3b^2)^2 =$

Д. Геометрический тест.

Площадь квадрата равна 0,16 м². Какой станет площадь этой фигуры, если:

- 1) его стороны уменьшить вдвое;
- 2) » » » на 25%;
- 3) » » » на 0,1;
- 4) » » » на 75%;
- 5) » » » впятеро;
- 6) » » увеличить втрое.

Е. Геометрический тест.

Ученика просят доказать две теоремы, которые он лучше всего знает и помнит (на выбор). Затем резко изменяют форму чертежа, приведенного учеником, меняют буквенные обозначения и предлагают ученику вновь доказать эти же теоремы на необычном для него чертеже.

Ж. Специальный тест.

ТОП	АБВ	КВА	КУТ	ЕКР	АКТ	РКУ	ИБС	НАК	БВЕ
ТАР	КОС	КНР	СТО	АРТ	РТА	ОВВ	АТС	ТОР	БВА
АРК	ГЛЕ	НАК	КЕТ	ОЛГ	ТСА	РИК	БНО	АМН	КСА
АТС	АКН	КОР	БСО	АКЛ	ВКО	ЛАН	РЕК	АКТ	РНУ
КАН	РТА	ТУК	АКТ	ТУС	ТАК	АКН	ТЕК	ОНВ	СТА
КОР	КРА	СОТ	РПУ	АСТ	БВИ	ТОК	КАР	АРТ	ТСУ
ТАК	НАТ	КУТ	ВТО	НАК	ТАН	УКВ	САК	РТА	ИРТ
АНР	ОДН	АКН	ТОН	АКТ	ТИП	ЕДК	ТСА	УПР	БРА
АМН	ТКА	БОС	АБВ	РЕК	ИНТ	НАК	КВА	НОК	СИП
САН	БАР	РОК	ИПР	СТА	ПИТ	РТА	КОН	ТУК	БАК

Этот тест представляет собой своего рода корректурную таблицу. Исследуется легкость переключения с одного закрепленного способа действия (нематематического характера) на другой. Учащимся предъявляется подобная таблица с заданием зачеркивать все сочетания букв, где имеется буква А. Задание

предлагается выполнить возможно быстрее. После этого дается второй экземпляр такой же таблицы с противоположным заданием зачеркивать все сочетания букв, кроме тех, где есть буква А. Отмечается время, затраченное на выполнение каждого задания, и количество ошибок. Задания совершенно равноценны в отношении трудностей: в таблице имеется 50 сочетаний букв с буквой А и столько же без этой буквы.

XVI. Задачи, наталкивающие на «самоограничение»

В эту серию отобраны задачи на рассуждение, отличающиеся следующими особенностями: либо их условие обычно воспринимается с ограничением, которого в действительности не существует, либо в процессе решения решающий невольно ограничивает себя некоторыми возможностями, неправомерно исключая другие. В том и другом случае непроизвольное ограничение приводит к мысли о невозможности решения задачи. Однако экспериментатор подтверждает, что задача составлена правильно и имеет решение. Сумеет ли испытуемый освободиться от навязчивого, шаблонного подхода к решению задачи и прийти к выводу, что, видимо, существуют другие пути подхода к ее решению, другая интерпретация ее условий? Сумеет ли он «снять самоограничение», освободиться от шаблонов, трафарета? Как он рассуждает при этом? Если испытуемый самостоятельно не может прийти к выводу о том, что имеет место «самоограничение», то экспериментатор дает соответствующее указание в самой общей форме (типа: «А» может быть, ты вводишь какие-то условия, которых на самом деле нет, и тем самым сковываешь себя узкими рамками?»).

А. Сборный тест.

1. Одним отрезком прямой пересечь четырехугольник, чтобы получить 4 треугольника. (Ограничение заключается в том, что испытуемый рассматривает только выпуклые четырехугольники и полагает, что треугольники должны лежать только «внутри» четырехугольника.)

2. Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на 3 года, дочь старше сына на 2 года. Четыре года тому назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену семьи? (Испытуемые часто считают, что задача составлена неверно, так как 4 года назад всем членам семьи должно было быть на 16 лет меньше, а не на 15. Они не учитывают того, что это указывает на то, что самого младшего члена семьи 4 года назад еще не было.)

3. На столе сидели три мухи. Одна из них взлетела вертикально вверх со скоростью 2 м/сек. Спустя 2 сек поднялись ос-

тальные две мухи. Они взлетели вверх под углом 30° со скоростью $2,5 \text{ м/сек}$. Когда все три мухи окажутся в одной плоскости? (Испытуемый считает, что речь идет о горизонтальной плоскости. Три мухи всегда находятся в одной плоскости, так как через три точки всегда можно провести плоскость и притом только одну.)

4. Можно ли шашечную доску закрыть фигурами вида



Испытуемые часто не учитывают, что шашечные доски есть двух типов: 8×8 (русские шашки) и 10×10 (международные шашки), и рассматривают только одну возможность (при этом экспериментатор за несколько дней до эксперимента обеспечивает наличие соответствующих твердых знаний).

5. В прямоугольном треугольнике один катет равен 7 см . Определить две другие стороны, если они выражены целыми числами. (Испытуемый часто заявляет, что задача не решается, так как по одной стороне нельзя построить треугольника, упуская из виду заключительное условие задачи.)

6. На собрании присутствовало 225 человек. Знакомые обменялись рукопожатиями. Докажите, что хотя бы один из участников собрания пожал руку четному числу знакомых. (Испытуемые обычно исключают нуль из состава четных чисел, даже зная соответствующее определение. Пожать руку 0 раз — это значит не пожать никому, иначе задача легко опровергается: может быть случай, когда из 225 человек знакомы только двое — они обменялись рукопожатием и каждый, следовательно, пожал руку нечетному числу знакомых.)

XVII. Прямые и обратные задачи

С помощью задач этой серии исследовалась способность к обратимости мыслительного процесса. Этим термином мы обозначаем способность к перестройке и направленности мыслительного процесса, к переходу с прямого на обратный ход мысли. Частным случаем этого (как будет пояснено ниже) является способность к образованию двусторонних (обратимых) ассоциаций.

Мы отдаем себе отчет в том, что с математической точки зрения симметрия (взаимность) отношений, прямые и обратные операции, прямые и обратные теоремы, наконец, простому умению «читать» формулу слева направо и наоборот — это категории совершенно различного характера. Однако, как нам кажется, внутренней психологической основой их является перестройка направленности мыслительного процесса, переход с прямого на обратный ход мысли, установление двусторонних (обратимых) ассоциаций. Задача нашей работы — исследовать

чисто психологический (и с этой точки зрения очень важный) вопрос о том, насколько легок или затруднен для того или иного ученика быстрый переход с прямого на обратный ход мысли, насколько способен он к такой резкой перестройке направленности мыслительного процесса. Вопрос же о том, корректным ли, законным ли в том или другом случае является подобное «обратное» движение мысли (не всякое отношение обладает свойством симметрии, не всякая обратная теорема справедлива) — это совершенно другой вопрос (не менее важный), относящийся, скорее, к области математики, чем психологии.

Разумеется, ученик должен не только быть способным сделать подобный переход, но и должен уметь оценить корректность его, установить, в какой мере данное обращение законно или незаконно, но второе в гораздо большей степени связано со знаниями, умениями и навыками в области математики и должно быть предметом специального исследования.

В тесты XVII серии включены парные задачи — прямая и обратная. Обратными задачами мы будем условно называть, в соответствии с изложенными выше положениями, задачи, в которых по сравнению с исходной (прямой) задачей при сохранении сюжета искомое входит в состав условия, а один или несколько элементов условия становятся искомым.

Выяснилось, как испытуемые будут решать обратные задачи: а) непосредственно после прямой и б) независимо от прямой. Для выяснения того, как обратные задачи решаются сами по себе (в этом случае они уже, собственно говоря, не являются обратными, так как обратными они являются только в паре с прямыми), некоторые из обратных задач в несколько измененном виде давались испытуемым примерно за месяц до проведения эксперимента. В основном эксперименте обратная задача предъявлялась сразу после прямой и наблюдалось, какое влияние оказывает решение прямой задачи на решение обратной (с хронометражем времени решения). Что касается существа процесса перехода от прямого к обратному ходу мысли, то надо иметь в виду, что далеко не во всех случаях мысль в точности повторяет тот же путь, но в обратном порядке (например, это относится к прямым и обратным теоремам). Путь от A к D может быть иным, чем путь от D к A ; к исходному от конечного можно перейти различными путями. В одних случаях это прямые

и обратные ассоциации $A \longleftrightarrow D$ в других случаях имеет-

ся в виду только общее направление движения мысли

$A \rightleftarrows D$ Но важно, что в обоих случаях мысль, до этого

стремлящаяся от A к D , движется теперь в обратном направлении. Среди экспериментальных задач имеются как такие, которые связаны с установлением прямых и обратных ассоциаций, так и такие, которые связаны с изменением лишь общего направления мысли.

Ниже приводятся тесты данной серии.

А. Арифметический тест.

1. Прямая. В бак влили 16 л воды, и при этом бак наполнился на $\frac{2}{5}$ своего объема. Каков объем бака?

Обратная. В бак вместимостью 80 л влили воды до $\frac{2}{5}$ его объема. Сколько литров воды влили в бак?

2. Прямая. На лесопильном заводе каждую минуту пила отпиливает от бревна кусок в 1 м. Через сколько минут она распилит бревно в 16 м?

Обратная. За три минуты бревно распилили на полуметровки, причем каждая распиловка занимала 1 мин. Найти длину бревна.

3. Прямая. Завод, имея план выпуска 1280 станков, перевыполнил план на 12,5%. Сколько станков он выпустил?

Обратная. Завод, перевыполнив план на 2,5%, выпустил сверх плана 54 станка. Каков был план выпуска?

4. Прямая. Из 740 листов бумаги изготовили 140 толстых и 100 тонких тетрадей. Сколько бумаги расходуется на толстые и тонкие тетради в отдельности, если на толстую тетрадь бумаги уходит на 1 лист больше, чем на тонкую?

Обратная. На 200 тетрадей израсходовано 620 листов бумаги. Тетради сделаны в $5\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$ листа. Сколько сделано тех и других тетрадей?

5. Прямая. Мать втрое старше дочери, спустя 10 лет она будет только вдвое старше ее. Каков возраст матери?

Обратная. Отцу 35, а сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

Б. Алгебраический тест.

1. Прямая. Сколько дней должен проработать рабочий, чтобы заработать b руб., если в день он получает c руб.?

Обратная. Сколько заработает рабочий в d дней, если в один день он зарабатывает a руб.?

2. Прямая. Расстояние между городами A и B — x км. Навстречу друг другу вышли два поезда. Один из них шел со скоростью a км в час, другой b км в час. Через сколько времени они встретятся?

Обратная. Расстояние между пунктами y км. Из них навстречу друг другу вышли два поезда, которые встретились

через n часов. Один поезд шел со скоростью 40 км в час. С какой скоростью шел второй поезд?

3. Прямая. Завод по плану должен дать m деталей за n дней. Перевыполнив план, завод изготовил на k деталей больше, закончив работу на t дней раньше срока. На сколько деталей в день завод давал больше, чем предполагалось по плану?

Обратная. Завод должен в определенный срок выпустить a станков и поэтому наметил изготовлять по b станков в день. Однако рабочие перевыполнили план и изготовляли ежедневно на m станков больше, чем было намечено. На сколько дней раньше срока завод выполнит заказ?

В. Алгебраический тест.

1. $(a-b)^2 =$

1а. $a^2 - 2ab + b^2 =$

2. $(2a^3 - n^4)^2 =$

2а. $9a^4 - 6a^2m^2 + m^4 =$

3. $\left(3x - \frac{1}{3}y^3\right)^2 =$

3а. $16x^2 - 4xy^2 + \frac{1}{4}y^4 =$

4. $(x^4 - y^n)^2 =$

4а. $2xy - x^2 - y^2 =$

5. $(a - x + y)^2 =$

5а. $b^2 + (x-a)^2 - 2b(x-a) =$

6. $(x+y)(x-y) =$

6а. $a^2 - b^2 =$

7. $(2a^3 - 3b)(2a^3 + 3b) =$

7а. $9x^4 - 4y^2 =$

8. $\left(\frac{1}{4}p^3 + \frac{1}{2}q^2\right)\left(\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}q^2\right) =$

8а. $\frac{1}{25}m^4 - 4n^2m^6 =$

9. $\left(0,6m^n - \frac{1}{4}n^m\right)\left(0,6m^n + \frac{1}{4}n^m\right) =$

9а. $-0,25y^2 + \frac{1}{9}x^2 =$

10. $(a+b-c)(a-b+c) =$

10а. $(x-y)^2 - 25y^3 =$

11. Разделить устно: $a^{64} - b^{64}$ на

$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32}).$

Примечание. Задачи предъявляются в следующем порядке:

1, 1а, 2а, 2, 3, 3а, 4а, 4, 5, 5а и т. д.

Г. Геометрический тест.

1. Прямая. Сколько градусов содержит $\frac{1}{24}$ часть развернутого угла?

Обратная. Какую часть окружности составляет дуга в $22^\circ 30'$?

2. Прямая. Вычислить сумму внутренних углов выпуклого семиугольника.

Обратная. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника 1800° . Сколько углов имеет этот многоугольник?

3. Теорема. Если две наклонные, проведенные к прямой из одной и той же точки, равны, то равны и их проекции.

Обратная теорема. Если две наклонные, проведенные к прямой из одной и той же точки, имеют равные проекции, то они равны между собой.

4. Теорема. Если из одной и той же точки проведены к прямой две наклонные, то та из них больше, которая имеет большую проекцию на эту прямую.

Обратная теорема. Если из одной и той же точки проведены к прямой две наклонные, то большая наклонная имеет и большую проекцию на эту прямую.

5. Теорема. Прямая, перпендикулярная к радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, является касательной к окружности.

Обратная теорема. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

6. Теорема. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и стягиваемые дуги пополам.

Обратная теорема. Диаметр, проведенный через середину хорды, не проходящей через центр, перпендикулярен к ней.

XVIII. Эвристические задания

Как отмечалось выше, о способностях учащихся следует судить не по тому, что они знают и умеют, а по тому, как легко и быстро, каким путем они приобрели соответствующие знания и умения.

Задания этой серии и рассчитаны на исследование того, как учащиеся овладевают новым для них материалом, как эвристически открывают неизвестные им закономерности, самостоятельно устанавливают отношения и функциональные зависимости, производят самостоятельные обобщения. Анализируется процесс рассуждения. Более детальные пояснения даются к каждому тесту в отдельности.

А. Арифметический тест¹.

Учащиеся должны самостоятельно вывести правило сокращенного вычисления квадрата двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 5. Учащимся ставится соответствующее задание-установка и предъявляются примеры: $15^2 =$; $25^2 =$; $35^2 =$; $45^2 =$; $55^2 =$; $65^2 =$; $75^2 =$; $85^2 =$; $95^2 =$. Производя соответствующие вычисления, учащиеся должны попытаться построить

¹ Идея этого теста принадлежит С. И. Шапиро [435].

простейший алгоритм для быстрого и легкого возведения в квадрат подобных чисел. Это не так трудно сделать, если представить все подобные числа в общей форме: $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$. На каком примере учащиеся обнаруживают закономерность? Каким путем они приходят к ней?

Б. Алгебраический тест.

Учащимся, незнакомым с формулами сокращенного умножения, предоставляется самостоятельно вывести последовательно формулы $(a+b)(a-b)=$; $(a+b)^2=$; $(a+b)^3=$.

Для этого (сначала без какого-то ни было указания на возможность сокращенного умножения) учащимся предлагается решать один за другим ряд соответствующих примеров:

$$1. (a+b)(a-b)=$$

$$2. (x+y)(x-y)=$$

$$3. (2m+n)(2m-n)=$$

$$4. (3a^2+b^3)(3a^2-b^3)=$$

$$5. \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right) =$$

$$6. (b^n - c^n)(b^n + c^n) =$$

$$1a. (a+b)^2 =$$

$$2a. (x+y)^2 =$$

$$3a. (2m+n)^2 =$$

$$4a. (3a^2+b^3)^2 =$$

$$5a. \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2 =$$

$$6a. (b^n + c^n)^2 =$$

$$1б. (a+b)^3 =$$

$$2б. (x+y)^3 =$$

$$3б. (2m+n)^3 =$$

$$4б. (3a^2+b^3)^3 =$$

$$5б. \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^3 =$$

$$6б. (b^n + c^n)^3 =$$

Если учащиеся после решения всех 6 примеров самостоятельно не обнаружат возможности сокращенного умножения (не сформулируют правила и не выведут формулы), то экспериментатор дает соответствующее задание-установку и просит вторично рассмотреть каждое решение. На каком примере учащийся перейдет к сокращенному умножению по выведенной им формуле? (Вторичное рассмотрение примеров в последнем случае считается за решение очередного примера. Например, если ученик после указания экспериментатора лишь на вторичном решении третьего примера «откроет» формулу, то считается, что ему для этого понадобилось решить $6+3$, т. е. 9 примеров.)

В. Геометрический тест.

Учащимся, еще незнакомым с зависимостью между величинами сторон треугольника (сумма любых двух сторон всегда

больше третьей), предоставляется самостоятельно установить эту зависимость¹.

Учащимся давался набор тонких палочек длиной от 1 до 20 см, по три палочки каждого размера (всего 60 шт.). Предлагался вопрос: из любых ли трех палочек можно построить треугольник? Учащиеся (самостоятельно или с помощью экспериментатора) практически убеждались, что не из любых трех данных палочек можно составить эту фигуру. В одних случаях это удается, в других нет. Учащимся предлагалось выяснить, в каком отношении должна быть длина сторон треугольника, и сформулировать в общем виде соответствующее правило. Отмечается, на какой «пробе» (и сколько затратив времени) учащийся обнаружит закономерную зависимость между сторонами треугольника. В качестве контрольного задания даются тройки чисел и предлагается решить, какие из них могут выражать величины сторон треугольника: 1) 3, 4, 5; 2) 7, 11, 3; 3) 8, 7, 7; 4) 3, 6, 3; 5) 19, 7, 11; 6) 8, 4, 5.

Г. Геометрический тест.

Учащимся, только что познакомившимся с зависимостью между углами треугольника (сумма внутренних углов треугольника равна $2d$), предлагается самостоятельно вывести формулу суммы внутренних углов всякого выпуклого многоугольника: $2d(n-2)$. Если испытуемый не справляется с этим, экспериментатор дает указание: «Попробуй взять простейшие фигуры — четырехугольник, пятиугольник и диагоналями, исходящими из одной вершины, раздели их на треугольники».

XIX. Задачи на соображение, логическое рассуждение

Два теста этой серии состоят из задач, для решения которых не требуется никаких специальных знаний, но нужно умение логически рассуждать, проявляя при этом известную изобретательность. Одни из этих задач носят математический характер, другие являются логическими. Если исходить из современного понимания математики, то выделение группы задач, названных нами логическими, в отличие от группы математических задач очень условно. Однако если иметь в виду школьную математику, то опыт показывает, что задачи логического теста воспринимаются школьниками, скорее, как логические, чем математические. Это в известной мере и послужило основанием для принятого нами деления.

Задачи, подобные задачам XIX серии, по общему мнению, являются хорошим индикатором наличия математических спо-

¹ Такую методику использовал и С. И. Шапиро, но в несколько своеобразной и усложненной форме [435].

способностей именно потому, что они не требуют, по сути дела, никаких математических знаний и навыков, кроме элементарных. В. В. Зябловский подчеркивает, что наибольшие затруднения у учащихся различных возрастов вызывают задачи логического характера, задачи, где требуется лишь сообразительность и смекалка, но такие задачи, замечает В. В. Зябловский, являются редкими гостями на уроках математики [134, стр. 74].

Задачи указанного типа хорошо раскрывают «лабораторию мысли» испытуемого, показывают, насколько он владеет способностью рассуждать, выводить одно из другого. Анализ процесса рассуждения может помочь понять некоторые моменты, связанные с возникновением «озарения», догадки.

На задачах XIX серии изучается также, насколько свернутым является процесс рассуждения. Для этого сопоставляется реальный процесс рассуждения школьника с максимально развернутым (по просьбе экспериментатора) его рассуждением. Сравнивается количество и характер «звеньев» в том и другом случае, они сопоставляются с количеством и характером звеньев действительно развернутой структуры. Выявляется, какие звенья при этом выпадают, какую «смысловую нагрузку» они несли и как в связи с этим перестраивается структура рассуждения. Наконец, серия позволяет выявить некоторые особенности запоминания, сохранения и воспроизведения математического и логического материала. Для этого испытуемым предлагалось воспроизвести задачу и ход рассуждения через месяц и три месяца после эксперимента. Отмечалось, как испытуемый помнит фактическое содержание задачи, ее логическую структуру, ход рассуждения.

Ниже приводятся задачи рассматриваемой серии.

А. Общематематический тест.

1. Почему квадрат многозначного числа оканчивается на ту же цифру, что и квадрат единиц этого числа?

2. Докажите, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 руб.

3. Для нумерации страниц энциклопедического словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц заключал в себе этот словарь?

4. На школьной олимпиаде было предложено решить 10 задач. За каждую правильно решенную задачу участнику засчитывалось 5 очков, за каждую нерешенную списывалось 3 очка. Сколько задач было правильно решено учащимися, которые получили при окончательном подсчете 34 очка; 10 очков?

5. Два ученика хотели купить по линейке. Когда узнали ее цену, то оказалось, что у первого не хватает 24 коп., а у другого 2 коп. Тогда ученики решили сложить свои деньги, чтобы купить хотя бы одну линейку. Но оказалось, что и в этом случае

денег все равно не хватает. Узнать цену линейки и определить, сколько денег было у каждого мальчика.

6. Колхозница первому покупателю продала половину имеющихся у нее яиц и еще пол-яйца, второму — половину оставшихся яиц и еще пол-яйца, третьему — половину остатка и еще пол-яйца, после чего у нее яиц не осталось. Сколько яиц у нее было? (Менее способным учащимся можно пояснить, что речь, разумеется, может идти о продаже лишь целого числа яиц.)

7. Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1955 месте?

8. Четыре брата купили вместе телевизор. Первый внес $\frac{1}{2}$ суммы, вносимой остальными, второй $\frac{1}{3}$ суммы, вносимой остальными, третий $\frac{1}{4}$ суммы, вносимой остальными, а четвертый внес 45,5 руб. Сколько стоил телевизор?

9. Пишут все числа от 1 до 99 999. Сколько раз будет написана цифра 1?

10. Найти наименьшее число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 6 дает в остатке 4.

11. Найти четырехзначное число по следующим условиям: произведение крайних цифр равно 40, произведение средних 28; цифра тысяч на столько меньше цифры единиц, на сколько цифра сотен меньше цифры десятков. Если к искомому числу прибавить 3267, то получится число обратимое.

12. Имеются 2 сосуда. В первом находится 1 л воды, а другой пустой. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т. д. Найти количество воды, оказавшейся в первом сосуде после 1965 переливаний.

Б. Логический тест.

1. Старинная задача: двугривенный весит вдвое больше, чем гривенник, серебра в нем вдвое больше и стоит он вдвое дороже. Что же дороже — 1 кг гривенников или $\frac{1}{2}$ кг двугривенных?

2. Большой пруд зарастает зеленью. Каждый день заросшая площадь увеличивалась вдвое. На 8-й день она уже покрыла половину пруда. На какой день она покроет пруд полностью?

3. В коробке лежат 16 шариков — черных, белых и красных. Красных шариков в 7 раз меньше, чем белых. Сколько в коробке черных шариков? (Доказать, что это единственный вариант.)

4. В 500 ящиках лежат яблоки. Известно, что ящик не может вместить более 240 яблок. Доказать, что по крайней мере 3 ящика содержат по одинаковому числу яблок.

5. Из пруда сетью выловили 40 рыб, каждую пометили и опять выпустили в пруд. На другой день выловили сетью 60 рыб, и среди них оказалось 4 меченых. Как приблизительно оценить количество рыб в пруду?

6. Есть сосуды емкостью в 7 и 11 л. Как с помощью их отмерить 13 л?

7. Три товарища посещают библиотеку в разные дни: первый — один раз в три дня, второй — в четыре дня, а третий — один раз в пять дней. В последний раз они вместе были в библиотеке во вторник. Через сколько дней они снова будут вместе в библиотеке и какой это будет день недели?

8. Зашифровывая слово «азнат», мы пишем «бикбу». Как таким же шифром написать слово «европеец»?

9. Из 9 совершенно одинаковых по внешнему виду подшипников один бракованный. Он несколько легче остальных. Найти его не более чем двумя взвешиваниями на обычных двухчашечных весах без гирь.

10. На кольцевой автомобильной дороге стоят 20 одинаковых автомашин. Общее количество бензина у всех этих автомашин достаточно лишь для того, чтобы одна из них смогла проехать по всей кольцевой дороге. Доказать, что хотя бы одна из указанных автомашин сможет, забирая по пути бензин у остальных 19 автомашин, проехать по всей кольцевой дороге.

11. Старинная задача. Шли 12 человек и несли дюжину хлебов. Каждый мужчина нес по 2 хлеба, каждая женщина по полхлеба, а каждый ребенок по четверти хлеба. Сколько шло мужчин, женщин и детей?

12. В турнире участвовало 5 шахматистов. Определить результаты всех партий, если известно, что каждый сыграл с каждым по одной партии и все набрали разное число очков, причем:

- а) занявший первое место не сделал ни одной ничьей;
- б) занявший второе место не проиграл ни одной партии;
- в) занявший четвертое место не выиграл ни одной партии.

Примечание. В шахматных турнирах выигравшему зачисляется 1 очко, проигравшему 0 очков. При ничьей каждый получает по $\frac{1}{2}$ очка.

XX. Ряды

Серия состоит из двух тестов. Первый представляет собой числовые ряды, каждый из которых имеет в основе определенную закономерность. Испытуемый получает задание найти правило, в соответствии с которым составлен каждый ряд чисел, и соответственно продолжить его, написав следующее число в каждом ряду. Второй тест, условно названный «фигурным», представляет собой ряды изображений, также составленных на осно-

ве определенной закономерности, но эта закономерность касается уже пространственного расположения элементов.

Как и в предыдущей серии, здесь также исследовался характер логического рассуждения. Выявлялись некоторые особенности аналитико-синтетического восприятия числового материала (уловить закономерность ряда можно только в том случае, если воспринимаешь совокупность чисел как целое, не упуская в то же время из виду отдельных элементов чисел ряда). Наконец, тесты направлены на выявление некоторых типологических особенностей математического мышления, связанных с различным соотношением словесно-логических и наглядно-образных компонентов (при сравнении процесса нахождения одним и тем же испытуемым закономерности изменения числовой характеристики величин и закономерности изменения пространственного расположения элементов).

Со строго математической точки зрения задачи указанных ниже тестов могут решаться многозначно. Закономерность, которая имеется в виду, является простейшей, но не единственной (можно допустить, например, периодическую повторяемость типа 2, 4, 6, 2, 4, 6 и т. д.). Опыт показывает, что уровень математического развития даже наиболее способных учащихся V—VII классов не дает им возможности усмотреть иные закономерности, которые лежат в основе данных рядов. Однако при проведении эксперимента надо считаться и с такой возможностью. Если учащийся V—VIII классов самостоятельно приходит к мысли, что в основе данных рядов могут лежать различные закономерности, и указывает на некоторые из возможных вариантов, то это должно оцениваться как показатель весьма высокого уровня его математического мышления.

А. Числовой тест.

2;	4;	6;	8;	10;	...	(12)
19;	16;	13;	10;	7;	...	(4)
3;	9;	27;	81;	243;	...	(729)
1;	4;	9;	16;	25;	...	(36)
1;	2;	4;	7;	11;	...	(16)
10;	8;	11;	9;	12;	...	(10)
2;	3;	4;	9;	16;	...	(81)
1;	2;	6;	24;	120;	...	(720)
2;	4;	10;	28;	82;	...	(244)
1;	5;	14;	33;	72;	...	(151)

Примечание. В скобках даны числа, которые в тесте не фигурируют, но которые испытуемый должен найти и продолжить ими ряд. Искомая закономерность для наиболее трудных рядов: 8-й ряд — каждое последующее число образуется от умножения предыдущего на 2; 3; 4; 5 и т. д.; 9-й ряд — каждое последующее число образуется из предыдущего путем умножения

на 3 и вычитания 2; 10-й ряд — предыдущее число удваивается и прибавляется 3; 4; 5; 6 и т. д.

Б. Фигурный тест.

1. Зачеркнуть ту фигуру, которая выпадает из ряда.

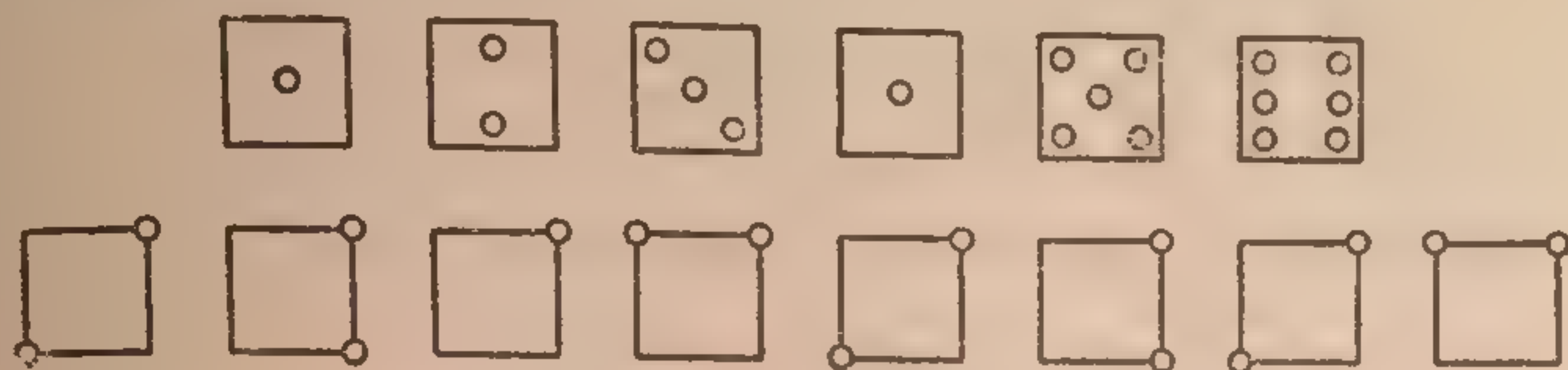


Рис. 20.

2. Слева 4 или 5 фигур, образующие ряд. Справа 5 фигур. Найти среди них ту, которая подходит в левый ряд пятой (или шестой).

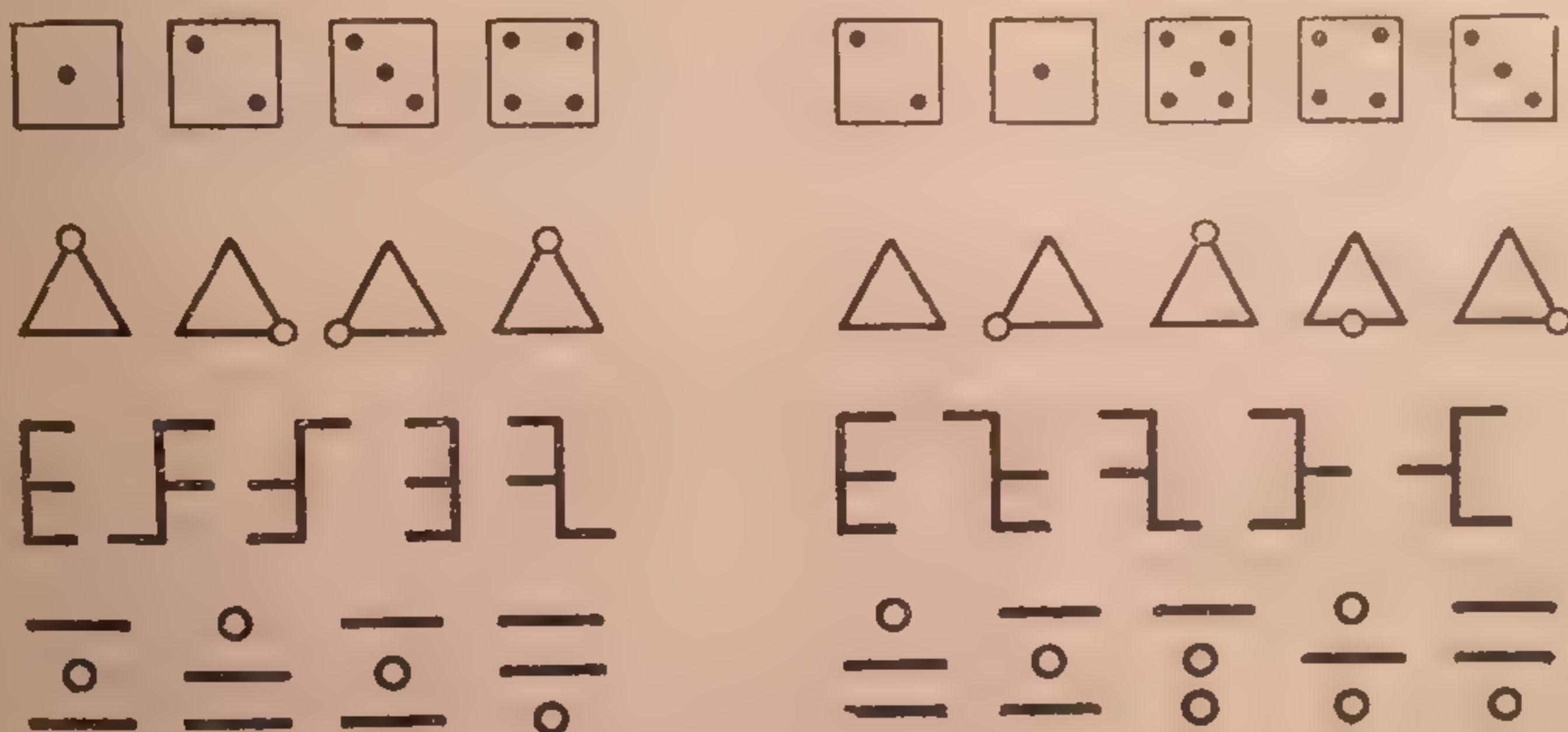


Рис. 21.

3. Необходимо найти фигуру в правой части, которая так относилась бы к третьей фигуре слева, как вторая относится к первой.



Рис. 22.

XXI. Математические софизмы

Для математика важна способность критически оценивать каждое звено рассуждения в соответствии с усвоенными принципами логики и математики, отыскивать ошибку в кажущемся на первый взгляд безупречном рассуждении. Все 7 задач этой серии, сведенные в 4 небольших теста, представляют собой софизмы (главным образом, математические), их отличает явно неверный результат рассуждения при хорошо замаскированной ошибке в рассуждении. Школьник должен обнаружить ошибку и доказать, что это действительно ошибка.

Логический тест предъясняется первым. На его примере ученикам объясняется характер задания.

Помимо критичности математического мышления, задачи этой серии направлены и на исследование его гибкости. С этой точки зрения трактовать софизм можно следующим образом: задается определенная схема рассуждения, или, другими словами, устанавливается определенный путь мысли, который действует, по сути дела, как шаблон. Насколько «навязчиво» его действие? Сумеет ли испытуемый «вырваться из тисков» этого строго логичного на первый взгляд пути, разорвать цепь умозаключений в том самом звене, которое является ошибочным и делает ошибочным все дальнейшее рассуждение?

А. Арифметический тест.

1. $1 \text{ руб.} = 100 \text{ коп.};$
 $a \text{ руб.} = 100a \text{ коп.}$

Всякие два равенства можно перемножать почленно:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 \text{ руб.} &= 100a \cdot 100 \text{ коп.}; \\ a \text{ руб.} &= 10\,000 a \text{ коп.}; \\ 1 \text{ руб.} &= 100 \text{ руб.} \end{aligned}$$

2. У колхозника было 2 корзины с грушами разного сорта, в каждой по 150 штук. Цена на груши: I сорт — 1 руб. за десяток; II сорт 1 руб. за $1\frac{1}{2}$ десятка. Таким образом, за все груши I сорта надо было получить $150 : 10 = 15$ руб., за все груши II сорта $150 : 15 = 10$ руб. Итого 25 руб. Колхозник рассудил, что, взяв 10 груш I сорта и 15 груш II сорта, он должен их продать за 2 руб. Поэтому он смешал груши вместе и продавал все 300 груш по 2 руб. за 25 штук. Однако выручил он 24 руб., т. е. на 1 руб. меньше, чем должен был получить. Куда делся 1 руб.?

Б. Алгебраический тест.

1. Дано уравнение $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$.

Преобразуем его:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}; \quad \frac{-4x+40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{-4x-40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}; \quad \frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$7-x = 13-x;$$

$$7 = 13.$$

2. Сумма двух произвольных и не равных нулю одинаковых чисел равна нулю. Докажем это.

Возьмем произвольное, не равное нулю число a . Напишем равенство:

$$a = x.$$

Умножим обе части на $(-4a)$ и преобразуем его:

$$-4a^2 = -4ax;$$

$$0 = -4ax + 4a^2.$$

Прибавим по x^2 в обе части равенства:

$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a^2;$$

$$x^2 = (x - 2a)^2; \quad x = x - 2a,$$

но $x = a$ (по условию), следовательно:

$$a = a - 2a;$$

$$a = -a; \quad 2a = 0.$$

В. Геометрический тест.

1. На плане с масштабом 1:10 000 изображен прямоугольник, имеющий на плане стороны 2 см и 3 см. Исчисляя площадь этого прямоугольника в натуре, ученик рассуждал так:

$$\text{Площадь} = 3 \times 2 = 6 \text{ см}^2;$$

$$6 \times 10\,000 = 60\,000 \text{ см}^2 = 6 \text{ м}^2.$$

Верно ли он рассуждал?

2. В данной точке на прямой можно восставить два перпендикуляра к этой прямой.

Дано: прямая MN и точка A на ней. Восставим к ней перпендикуляр AK . Начертим окружность произвольного радиуса, проходящую через точку A . Обозначим буквой B вторую точку пересечения окружности и прямой. Проведем диаметр BC . Соединим точку C с A . $\angle BAC$ вписанный, опирается на диаметр и равен поэтому 90° . Следовательно, $AC \perp MN$. Таким образом, в

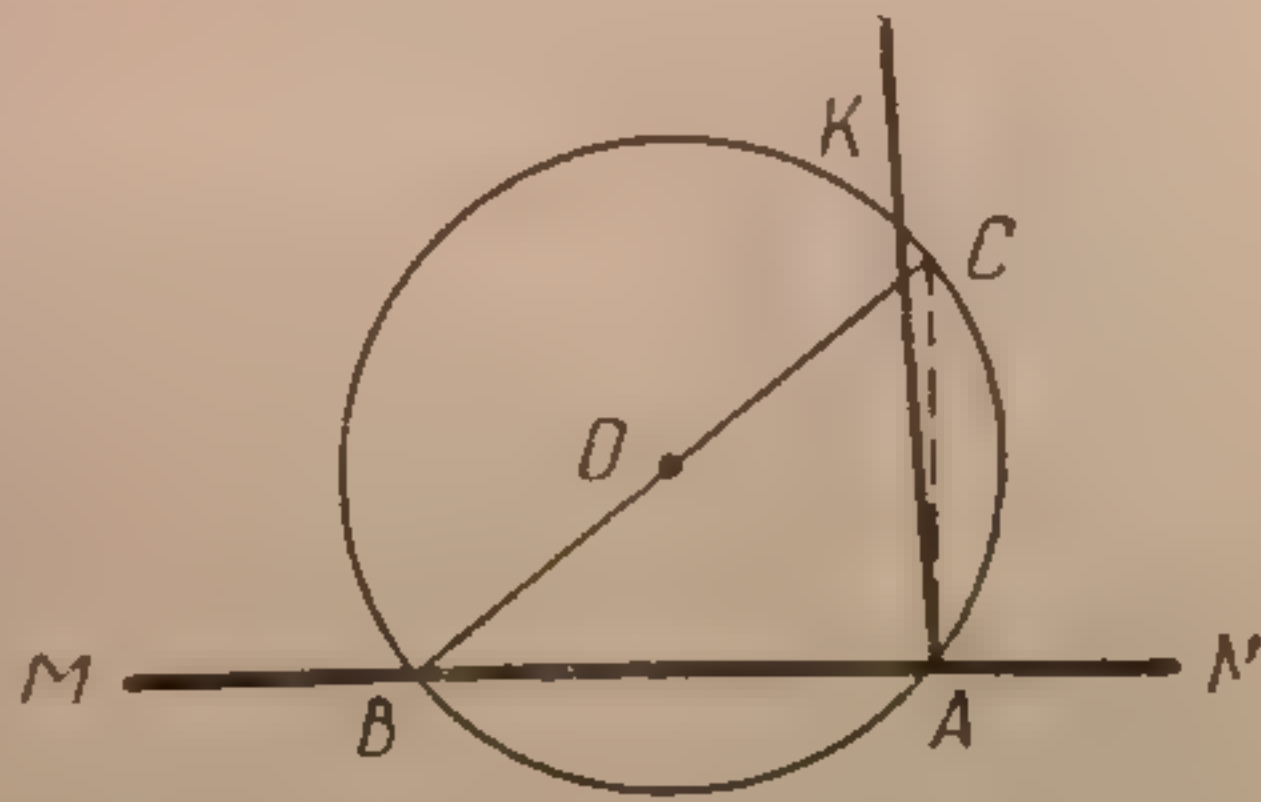


Рис. 23.

точке А к прямой MN восставлены 2 перпендикуляра: АК и АС. Где ошибка?

Г. Логический тест.

1. Имеются две семьи — Ивановых и Петровых. Каждая состоит из 3 человек — отца, матери и сына. Отец Иванов не знает отца Петрова. Мать Иванова не знает матери Петровой. Единственный сын Ивановых не знает единственного сына Петровых. Вывод: ни один член семьи Ивановых не знает ни одного члена семьи Петровых. Верно ли это?

XXII. Задачи со сложным для запоминания условием

Под сложностью здесь понимается либо большое количество цифровых данных, либо сложность непосредственно данных в задаче отношений, либо «запутанное» условие. Эта сложность введена нарочито, чтобы не дать возможности испытуемому запомнить всю задачу после одного чтения. Но если испытуемый не запоминает всего, то что же именно он запоминает в задаче — ее структуру, отношения или конкретные данные? Испытуемый не предупреждается заранее о том, что ему придется воспроизвести задачу. Его просят лишь внимательно и вдумчиво прочитать условие задачи. После однократного прочтения карточка с задачей отбирается. Выясняется, как испытуемый может воспроизвести задачу непосредственно после однократного прочтения, на что он обращает внимание в первую очередь. Естественно, что при таких условиях эксперимента выясняются не только особенности мнемической функции, но и некоторые особенности восприятия и обобщения.

А. Арифметический тест.

1. В первый день со склада отгрузили $\frac{2}{11}$ находящегося там картофеля, во второй день вдвое больше, в третий день $\frac{1}{5}$ остатка, после чего осталось 48 т. Сколько картофеля было на складе?

2. Продано 40 билетов 1-го и 2-го классов. Билет 1-го класса стоил 8 руб., а билет 2-го класса 5 руб. Сколько было продано билетов 1-го класса, если их общая стоимость превышала стоимость проданных билетов 2-го класса на 190 руб.?

3. То да это, да половина того да этого. Сколько это будет процентов от трех четвертей того да этого?

4. Число 80 разделить на 2 неравные части так, чтобы половина большей части была на 10 больше меньшей части.

5. В бассейн проведено 4 трубы. Когда открыты 1, 2, 3-я трубы, бассейн наполняется за 12 мин.; когда открыты 2, 3 и 4-я тру-

бы — за 15 мин.; когда открыты только 1-я и 4-я трубы — за 20 мин. За какое время наполнится бассейн, если открыты все 4 трубы?

6. Заводу заказано определенное количество культиваторов и установлен определенный срок для их изготовления. Если завод будет выпускать 240 культиваторов в день, то к сроку будет готово на 400 штук меньше, чем заказано. Если же завод будет выпускать ежедневно 280 культиваторов, то к сроку будет готово на 200 штук больше, чем заказано. Сколько культиваторов заказано и каков установлен срок их изготовления?

Б. Алгебраический тест.

1. Вычислить в уме: $64 \cdot 27 + 27 \cdot 27 + 9 \cdot 27 =$

2. $\left(\frac{1}{3} x^2 y^n + 4xyz^2\right)^2 =$

3. Каким числом будет дробь $n \frac{(n-1)}{2}$, где n — любое натуральное число, большее 1, — целым, дробным или равным нулю?

4. Теперь мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь. Когда Вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам вместе будет 63 года. Сколько лет каждому из нас?

В. Геометрический тест.

1. Один угол треугольника равен $\frac{28}{45} d$. Разность двух других его углов равна 18° . Определить эти углы.

2. В прямоугольном треугольнике один из острых углов делится отрезком прямой на 2 угла, из которых один в 5 раз больше другого. Большой из углов равен 45° . Чему равен внешний угол, построенный у другого острого угла?

3. В четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны. Разность двух противоположных углов равна 15° , а их отношение равно $7:8$. Определить все 4 угла.

4. Даны 2 прямоугольника. Основание одного равно 5 см, другого 4 см. Сумма их площадей равна 42 см^2 . Если, не изменяя высоты каждого прямоугольника, увеличить основание первого вдвое, а второго на 1 см, то сумма их площадей будет на 33 см^2 больше, чем раньше. Определить высоту каждого прямоугольника.

XXIII. Задачи с различной степенью наглядности решения

Задачи этой серии разбиты на группы (тесты) в зависимости от степени наглядности, от той роли, которую играют наглядно-образные и словесно-логические компоненты мышления в их решении.

Задачи группы Н («наглядные») ¹, если можно так выразиться, «оптимальны» для применения наглядных средств. Они сравнительно просто решаются наглядно-образными средствами, если выразить наглядно соотношение данных элементов задачи. Эти задачи «наталкивают» на применение графических схем. Задачи этой группы можно решить и без опоры на какие-либо наглядные представления и схемы, решить рассуждением, словесно-логическими средствами, но путь этот значительно труднее.

Задачи группы C_1 и C_2 («средние») представляют примерно равные возможности для решения, условно говоря, и первосигнальными и второсигнальными средствами.

Задачи группы M_1 и M_2 («мыслительные») не требуют опоры на наглядные представления и решаются чисто мыслительным путем. Конечно, и эти задачи можно решить с привлечением первосигнальных средств, но такой путь сложнее, так как эти задачи сравнительно трудно перевести на язык наглядных образов.

В каждой группе по 6 задач, расположенных в порядке усложнения от наиболее легкой (№ 1) до самой сложной (№ 6). Таким образом, условный индекс задачи указывает на степень ее трудности и степень ее «наглядности» ².

Задачи всех пяти тестов расположены в специальной сетке. По степени наглядности решения эти задачи расположены в сетке слева направо, а по степени трудности — сверху вниз (см. табл. 2).

Обычно в экспериментах с малоспособными учащимися использовались первые четыре ряда (остальные задачи оказывались трудны), в экспериментах со способными — последние четыре ряда (задачи первых двух рядов были для них очень легкими).

Порядок предъявления задач этой серии таков: сначала предъявлялись задачи первого ряда, затем второго и т. д. В каждом ряду испытуемому давались две крайние задачи (H и M_2) и предлагалось решить ту, которую он (после некоторого обдумывания) предпочтет. После этого последовательно предлагались другие задачи этой группы (двигаясь по сетке направо или налево от исходной — M_2 , M_1 , C_2 , C_1 , H или H , C_1 , C_2 , M_1 , M_2). Отмечалось, какой путь решения избирает испытуемый, есть ли у него потребность опереться на наглядные образы и какие именно, или он обходится без них (и что их заменяет в этом).

¹ Этот и другие подобные термины, конечно, условны и имеют только чисто служебное, вспомогательное значение.

² В некоторых случаях могут быть расхождения в оценке задач с точки зрения их наглядности. Мы учитывали здесь мнение учителей, а также опыт пробного их решения школьниками, не участвовавшими в основных экспериментах.

Таблица 2

Варианты Степень трудности	Н	C ₁	C ₂	M ₁	M ₂
1	Н—1	C ₁ —1	C ₂ —1	M ₁ —1	M ₂ —1
2	Н—2	C ₁ —2	C ₂ —2	M ₁ —2	M ₂ —2
3	Н—3	C ₁ —3	C ₂ —3	M ₁ —3	M ₂ —3
4	Н—4	C ₁ —4	C ₂ —4	M ₁ —4	M ₂ —4
5	Н—5	C ₁ —5	C ₂ —5	M ₁ —5	M ₂ —5
6	Н—6	C ₁ —6	C ₂ —6	M ₁ —6	M ₂ —6

случае), на какой задаче он отказывается от излюбленного способа решения. Особый интерес в этой связи представляет решение задач C₁ и C₂. Предполагалось, что учащиеся с преобладанием наглядно-образной стороны мышления будут решать задачи C₁ и C₂ иначе, чем учащиеся с преобладанием словесно-логических компонентов мышления. После того как устанавливалось, какой путь решения для испытуемого является естественным, экспериментатор побуждал испытуемого применить и другой способ решения — наглядно-схематически представить условия и отношения задачи (или соответственно попытаться решить задачу в чисто мыслительном плане, без опоры на наглядные образы). Результаты этой серии по каждому испытуемому представлялись в виде «индивидуальной сетки» (построенной аналогично вышеприведенной сетке и заполненной значками: (+) — решил, (—) — не решил, (Н) — решал с использованием наглядных средств, (М) — решал без использования этих средств, (Н) (М) — решал и тем и другим путем).

При анализе решения задач XXIII серии надо иметь в виду относительный характер выражения «наглядное решение». Графическая схема как выражение непосредственных отношений является абстрагированным и обобщенным выражением математических зависимостей. Но в то же время она является определенным видом наглядности, переводящей до известной степени решение задач в конкретный, наглядный план. На это правильно

указывала и М. Э. Боцманова, говоря о схематизации наглядного образа в графическом решении, о том, что графическая схема есть своеобразная абстрактная форма наглядности [54], [55].

Геометрический (Г) тест XXIII серии представляет собой 6 задач, расположенных от № 1 до № 6 не в порядке усложнения, а в зависимости от того, насколько при их решении необходимы наглядные опоры (№ 1 в наибольшей степени требует такой опоры, № 6 — в наименьшей степени). Конечно, геометрические задачи в отличие от арифметических всегда решаются с помощью наглядных схем, но отобранные задачи могут быть решены и без помощи чертежа (реального или воображаемого в уме). Испытуемому предоставлялась свобода решения, после чего (и в случае решения и в случае неудачной попытки) экспериментатор побуждал испытуемого применить и другой способ решения («А теперь постарайся наглядно представить это на чертеже, чтобы «увидеть» решение»; «Попробуй решить эту задачу путем рассуждений, не прибегая к помощи чертежа»).

Н. Арифметический тест.

Н₁. Пассажир, просхав полпути, заснул. Когда он проснулся, ему осталось ехать еще половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть всего пути он проспал?

Н₂. Сколько весит кирпич, если он весит один килограмм плюс полкирпича?

Н₃. 10 слив весят столько, сколько весят 3 яблока и 1 груша. 6 слив и одно яблоко по весу равны груше. Сколько слив уравнивают одну грушу?

Н₄. Пионеры ходили в театр и кино. Каждый ходил либо в театр, либо в кино, но многие ходили и в театр, и в кино. В театре было 89% пионеров, в кино 78%. Сколько пионеров было и в театре, и в кино?

Н₅. Который теперь час, если время, прошедшее от полудня, составляет третью часть того времени, которое осталось до полуночи?

Н₆. Перед началом математической олимпиады между 12 и 13 часами школьник посмотрел на часы. Кончив работу между 17 и 18 часами, он заметил, что стрелки поменялись местами. Сколько было времени, когда он начал и кончил работу?

С₁. Арифметический тест.

С₁—1. Два мальчика играли в шашки. Пустых клеток на доске было втрое больше, чем занятых шашками, и у одного игрока было двумя шашками больше, чем у его противника. Сколько шашек было у каждого на доске?

С₁—2. Бригада лесорубов заготовила за 3 дня 184 м³ дров. В первый день бригада перевыполнила дневной план на 14 м³, во второй недовыполнила план на 2 м³, а в третий перевыполнила план на 16 м³. Каков был дневной план бригады?

C_1 —3. Три хозяйки, живущие в одной квартире, договорились заготовить поровну дрова для кухонной печки. Первая заготовила $2,5 \text{ м}^3$ дров, вторая $3,5 \text{ м}^3$, а третья внесла вместо своей доли 6 руб. Как поделить эти деньги между первыми двумя хозяйками?

C_1 —4. Два грузовика в одно время выехали из пункта A в пункт B и обратно (без остановки). Первый грузовик двигался все время с одной и той же скоростью, а второй туда двигался со скоростью вдвое меньшей, чем первый, но зато обратно со скоростью вдвое большей, чем первый. Какой грузовик раньше вернется в пункт A ?

C_1 —5. Путь, который турист проехал поездом, на 150 км больше пути, который он проехал на пароходе, и на 750 км больше пути, пройденного им пешком. Определить длину всего пути, если известно, что пешком он прошел в 3 раза меньше, чем проехал на пароходе.

C_1 —6. На расстоянии 5 м друг от друга в один ряд посажено 16 молодых деревьев. Рядом с крайним деревом расположен колодец. Для полива двух деревьев нужно ведро воды. Какой длины путь придется сделать, чтобы полить все деревья, пользуясь только одним ведром?

C_2 . Арифметический тест.

C_2 —1. Банка с керосином весит 8 кг. Из нее вылили половину керосина, после чего банка стала весить 4,5 кг. Определить вес банки.

C_2 —3. Старший брат сказал младшему: «Дай мне 8 орехов, тогда у меня будет вдвое больше орехов, чем у тебя». А младший сказал старшему: «Ты дай мне 8 орехов, тогда у нас будет поровну». Сколько было орехов у каждого?

C_2 —4. Поезд проходит мимо телеграфного столба за $\frac{1}{4}$ мин., а за $\frac{3}{4}$ мин. проходит тоннель длиной 540 м. Какова скорость поезда и его длина?

C_2 —5. Для ремонта наняли нескольких рабочих, которые должны были выполнить работу в определенное число дней. Если их будет на 3 человека меньше, то срок работы увеличится на 6 дней, если же на 2 человека больше, то они выполнят работу на 2 дня раньше срока. Сколько рабочих было нанято?

C_2 —6. После того как пешеход прошел 1 км и половину оставшегося пути, ему еще осталось пройти $\frac{1}{3}$ всего пути и

1 км. Чему равен весь путь?

M_1 . Арифметический тест.

M_1 —1. Из Москвы на Дальний Восток вышел поезд, идущий со скоростью 40 км в час. На день позже в том же направлении со скоростью 45 км в час. Через

сколько дней второй поезд догонит первый, если поезда идут с равномерной скоростью и без остановок?

M_1 —2. В одном бидоне вдвое больше молока, чем в другом. Когда из обоих бидонов отлили по 20 л молока, то в первом бидоне оказалось втрое больше молока, чем во втором. Сколько молока было первоначально в каждом бидоне?

M_1 —3. Дочери 8 лет, матери 38 лет. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?

M_1 —4. Старинная задача. Некто нанялся на работу за плату в год 12 руб. плюс кафтан. Проработав 7 месяцев, он ушел, с ним расплатились правильно, дав ему кафтан и 5 руб. Какова цена кафтана?

M_1 —5. Турист рассчитывал пробыть в дороге 25 дней и израсходовать определенную сумму денег. Он пробыл на 5 дней больше и тратил в день на 40 коп. больше и поэтому израсходовал на 30 руб. больше, чем предполагал. Сколько денег он предполагал израсходовать?

M_1 —6. В одном котловане было 720 м^3 воды, в другом 840 м^3 . В 6 час. утра начали качку воды из первого котлована при помощи насоса производительностью 48 м^3 в час, а в 8 час. из второго котлована насосом производительностью 72 м^3 в час. В котором часу в обоих котлованах будет воды поровну?

M_2 . Арифметический тест.

M_2 —1. Собака погналась за лисцей, которая находилась от нее на расстоянии 30 м. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы 1 м. В то время как лисица делает 3 скачка, собака делает 2 скачка. Какое расстояние должна пробежать собака, чтобы догнать лисицу?

M_2 —2. Я иду от дома до школы 30 мин., а мой брат 40 мин. Брат вышел на 5 мин. раньше меня. Через сколько минут я догоню брата?

M_2 —3. По дороге в одном направлении идут два мальчика. Один догоняет другого, находящегося от него на расстоянии 2 км. Впереди идущий идет со скоростью 4 км в час, второй догоняет его со скоростью 5 км в час. С начала движения между ними безостановочно бегают собака — от одного к другому и обратно (с постоянной скоростью 8 км в час). Какое расстояние пробежит собака, прежде чем мальчики встретятся?

M_2 —4. В магазине было 100 кг ягод. Анализ показал, что в ягодах 99% влажности. Требуется определить, каков стал общий вес ягод, если при последующем анализе влажность уменьшилась на 1% и составила 98%¹.

M_2 —5. Человек поднимается в гору со скоростью 2 км в час, а с горы спускается со скоростью 6 км в час. Найти среднюю скорость.

¹ Трудно поверить, что правильный ответ — 50 кг.

М₂—6. Самолет летел из Москвы в Ленинград. В какую погоду самолет быстрее долетит туда и обратно: в тихую погоду или при наличии ветра, который все время будет дуть в одном направлении (скажем, в направлении от Ленинграда на Москву) и с одинаковой силой?

Г. Геометрический тест.

1. В равнобедренном треугольнике одна из медиан делит его периметр на две части: 12 см и 9 см. Определить стороны треугольника.

2. Дан острый угол и его биссектриса. Из вершины угла к биссектрисе восставлен перпендикуляр. Перпендикуляр образует со сторонами острого угла два угла, из которых один тупой, а второй острый. Тупой угол вдвое больше острого. Определить данный острый угол.

3. Каждую сторону квадрата увеличили на 3 см, и поэтому площадь его увеличилась на 39 см². Определить сторону получившегося квадрата.

4. Отрезок в 20 см длиной разделен на два отрезка, и на каждом из них построен квадрат. Найти длины этих отрезков, если известно, что разность площадей получившихся квадратов равна 40 см².

5. Периметр треугольника 35 см. Одна из сторон в 4 раза больше второй стороны и на 1 см больше третьей стороны. Какова величина его сторон?

6. Каковы должны быть размеры квадрата, чтобы его периметр численно равнялся его площади?

XXIV. Задачи в словесном и наглядном оформлении

Идея задач этой серии заключается в том, чтобы дать материал для суждения о том, как испытуемые воспринимают и соотносят конкретно-наглядный и словесно-отвлеченный планы задачи. Серия состоит из трех тестов. Пояснения даются по каждому тесту в отдельности.

А. Алгебраический тест.

1. Скажи, что такое коэффициент. Укажи затем коэффициенты в данных алгебраических выражениях:

$$3a^2; m; b \cdot 4; 3b \cdot 2; \frac{3}{7} \cdot x^3;$$

$$4ab^n(3+2); \frac{4}{5} ab \cdot \frac{5}{4} \cdot 2y^n.$$

2. Каковы в данных алгебраических выражениях показатели степени каждой из входящих в эти выражения букв? Затем дай соответствующую формулировку.

$$2a^3; b^2; -3x^2y^2; 7xy^6; \frac{1}{2}mn; z; \frac{c}{4}.$$

3. Запиши данные алгебраические выражения так, чтобы коэффициенты равнялись 1.

$$3abc; 4m^2n^3; 7xy^3z.$$

Дай все необходимые пояснения, как выполнять подобное задание.

4. Запиши данные алгебраические выражения так, чтобы показатели степеней равнялись 1.

$$2m^2n^2; xy^4; a^3bc; 7c^4d^3.$$

Дай все необходимые пояснения, как выполнять подобное задание.

5. Возведи в квадрат выражение $2a$. Результат удвой. Утрой выражение $2x^2$. Результат возведи в куб. Сложи оба полученных выражения.

Примечание. На простом алгебраическом материале исследуется способность переходить от конкретно-наглядного к словесно-отвлеченному плану и наоборот. Выясняется, как легко ученик переходит от словесной формулировки к соответствующему конкретному действию и наоборот, что легче дается ученику — словесные формулировки правил или операции, соответствующие правилу, в какой из этих областей он действует увереннее. Тест не отличается трудностью и применяется в основном для работы с малоспособными школьниками.

Б. Геометрический тест.

Суть задач, сведенных в этот тест, заключается в своеобразном расхождении словесной формулировки и соответствующего чертежа. Чертеж дан в таком виде, что он наталкивает на неправомерное ограничение, которое в словесной формулировке отсутствует. Задачи предъявляются испытуемому в словесной формулировке совместно с чертежом. Выясняется, на что больше ориентируется испытуемый — на словесную формулировку или на наглядный образ (чертеж). Наличие ошибки обычно свидетельствует, что школьник больше ориентируется на чертеж, наглядный образ. Подобного типа задачи с успехом использовались Э. Ш. Басировой, исследовавшей успешность в математике в зависимости от типологического соотношения сигнальных систем [36], [37].

Экспериментатор не делает никаких замечаний испытуемому до тех пор, пока не будут получены его ответы на все вопросы (чтобы испытуемый по первой же задаче не понял, чего следует ожидать от других задач). После этого он показывает школьнику (в случае, если он сделал ошибку) другие варианты чертежей или дает пояснения словесного характера. II здесь выяв-

ляется, что лучше помогает школьнику уяснить характер его ошибки — наглядный образ или словесное пояснение. Причем экспериментатор начинает со словесного пояснения. Если школьник при этом не понимает существа сделанной им ошибки, опять-таки демонстрируя тем самым, что он больше ориентируется на чертеж (прежний), чем на словесные формулировки, то вводится другой чертеж, поясняющий суть дела.

Задачи рассматриваемого теста расположены не в порядке возрастания трудностей, так как это в данном случае не имеет значения.

Ниже приводятся задачи теста. Под номерами 1а, 2а, 3а и т. д. даются словесные пояснения и вторые варианты чертежей.

1. Даны две фигуры, у которых основания равны и высоты равны. Равны ли их площади?

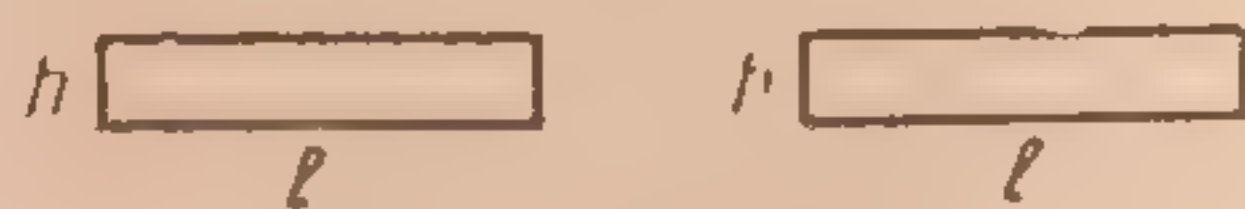


Рис. 24.

1а. Но фигуры-то могут быть разные.



Рис. 25.

2. Даны два равных острых угла. Будут ли они вертикальными?



Рис. 26.

2а. Разве только вертикальные углы равны?



Рис. 27.

3. Оцени правильность утверждения, что перпендикуляр короче любой наклонной.

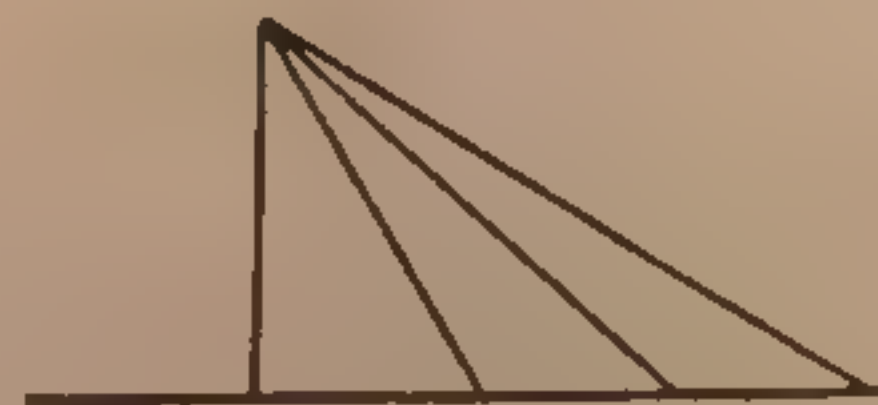


Рис. 28.

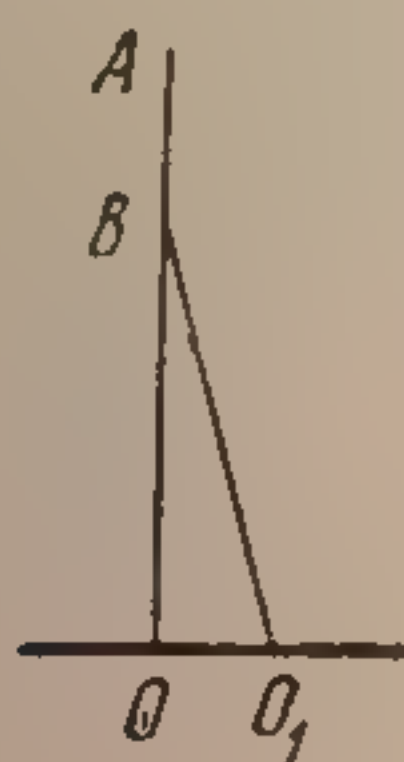


Рис. 29.

3а. Но ведь перпендикуляр и наклонная могут быть проведены не из одной и той же точки.



Рис. 30.

4. Оцени правильность утверждения, что против равных углов лежат равные стороны.



Рис. 31.

4а. А если равные углы входят в состав различных фигур?



Рис. 32.

5. Можно ли в некоторых случаях одну и ту же часть круга одновременно называть и сектором, и сегментом?

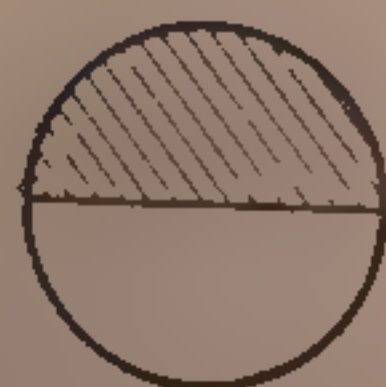


Рис. 33.

5а. А как ты назовешь с этой точки зрения полукруг?

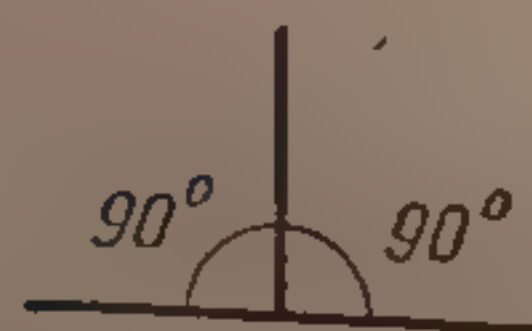


Рис. 34.

6. Даны два угла. Каждый из них равен 90° . Будут ли они смежными?

6а. Разве прямые углы всегда смежные?

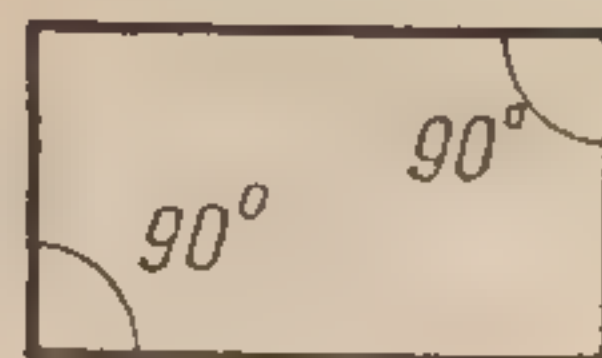


Рис. 35.

7. Оцени правильность утверждения, что всякая хорда короче диаметра этой же окружности.



Рис. 36.

7а. А если хорда проходит через центр?

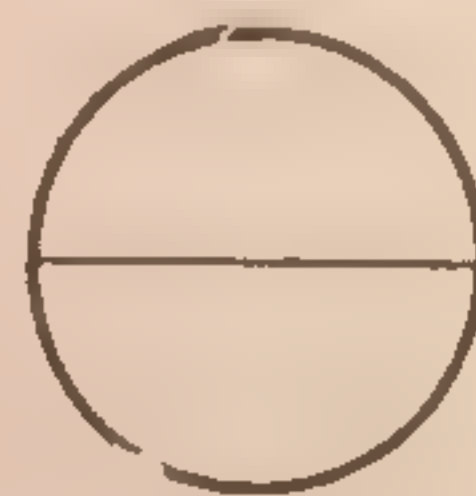


Рис. 37.

8. Дана замкнутая кривая линия, все точки которой равноудалены от одной, называемой центром. Будет ли она окружностью?



Рис. 38.

8а. Все точки замкнутой кривой линии, проведенной на поверхности шара, тоже равноудалены от одной точки — центра шара. (Учитель демонстрирует это на глобусе или любом другом шарообразном предмете).

В. Геометрический тест.

Этот тест представляет собой модификацию методики, предложенной в свое время И. С. Якиманской [469], [470], [471] и разработанную нами применительно к целям данного исследования.

Тест состоит из 6 геометрических задач примерно равной трудности, которые даны в двух вариантах: словесном (а) и наглядном — в чертеже (б). Каждая задача представляется либо в варианте «а», либо в варианте «б». При последовательном предъявлении варианты задач чередуются. Порядок предъявления: 1а, 2б, 3а, 4б, 5а, 6б. Задачи не очень сложны, так как в очень сложных задачах трудно разобраться без опоры на чертеж.

Выясняется, с каким вариантом предпочитает иметь дело испытуемый, какие операции ему даются легче — связанные с анализом словесно выраженных понятий или связанные с анализом чертежа. Будет ли испытуемый переводить задачу, данную ему в наглядном варианте, в общий, абстрактный словесный план и как он это будет делать? Будет ли он строить чертеж при решении задачи, данной в словесном варианте, и сумеет ли наглядно выразить отношения, данные в словесной форме? После решения испытуемому предлагается дать словесную формулировку и словесное решение в тех случаях, когда он решал наглядный вариант, и дать решение в чертеже в тех случаях, когда он решал словесный вариант.

Эта же серия дает возможность выявить и некоторые особенности памяти — помнит испытуемый задачу в конкретной или наглядной форме. Для этого испытуемого на следующий день просят вспомнить, какие геометрические задачи он решал накануне.

Задачи теста.

1а. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине перпендикулярна к отрезку, проведенному через вершину треугольника параллельно основанию. Доказать.

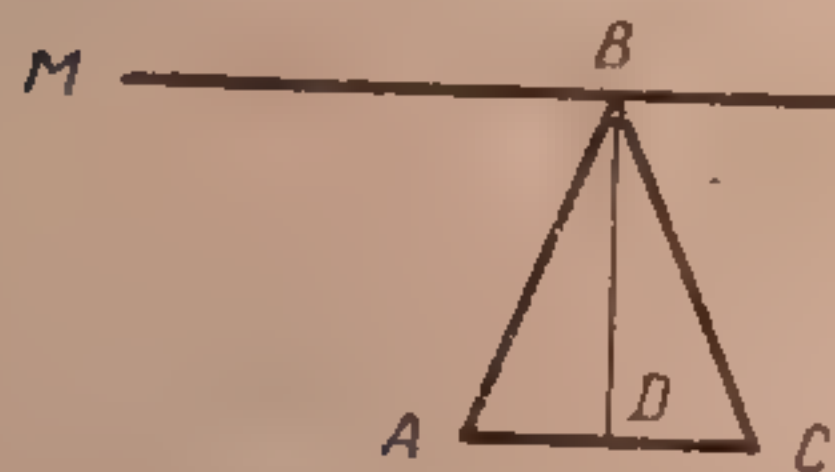


Рис. 39.

1б. Дано: $AB = BC$;
 BD — биссектриса $\angle ABC$;
 $MN \parallel AC$.
 Доказать: $MN \perp BD$.

2а. В равнобедренном треугольнике на боковых сторонах взяты точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от вершины. Эти точки соединены отрезками прямой с серединой основания. Доказать, что эти отрезки равны.

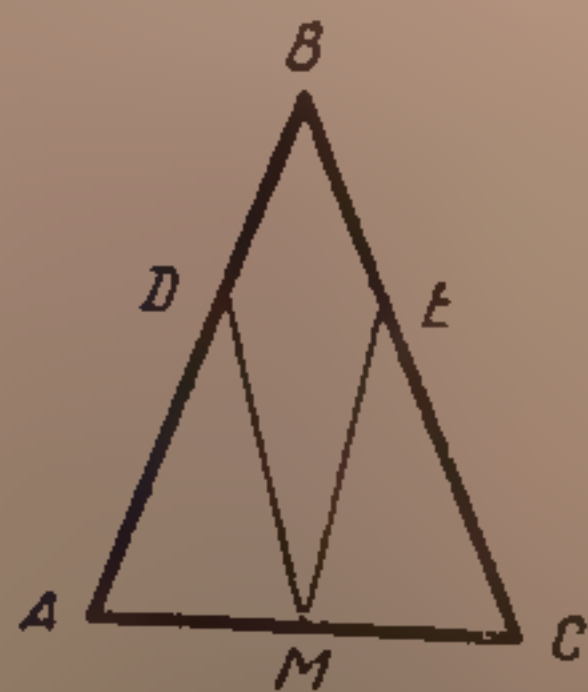


Рис. 40.

2б. Дано: M — середина AC ;
 $AB = BC$;
 $BD = CE$.
 Доказать: $DM = EM$.

3а. Чему равен угол между биссектрисами смежных углов?

36. Дано: $\angle BOD = \angle DOC$;
 $\angle AOE = \angle EOB$.
 Найти: $\angle EOD = ?$

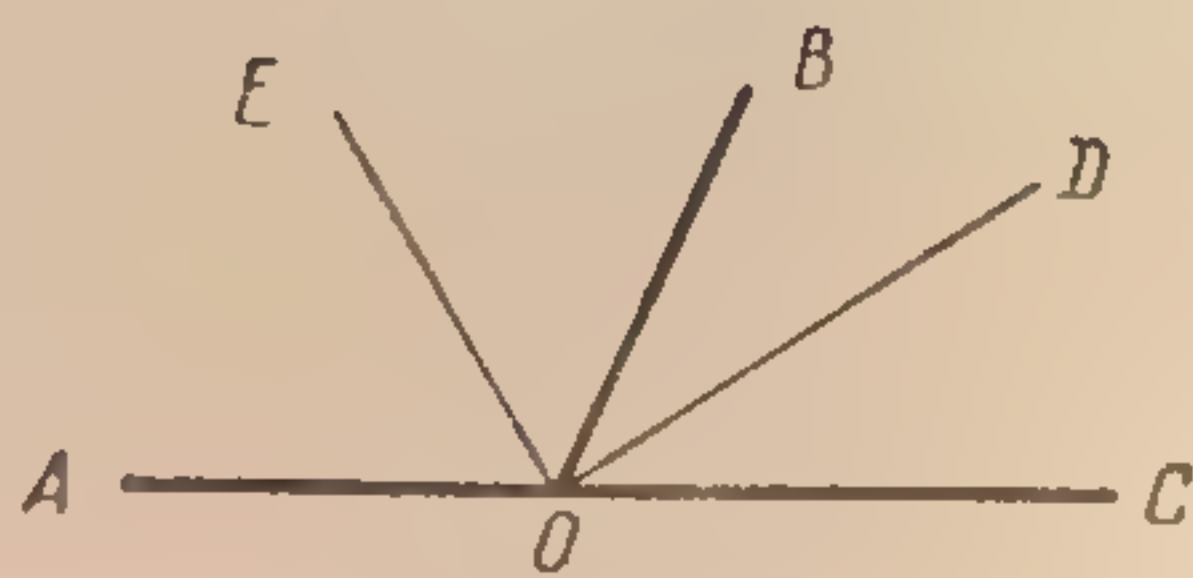


Рис. 41.

4а. В равнобедренном треугольнике через вершину проведена прямая, параллельная основанию. Доказать, что она является биссектрисой внешнего угла, построенного у вершины.

46. Дано: $AB = BC$;
 $BD \parallel AC$.
 Доказать: $\angle EBD = \angle DBC$.

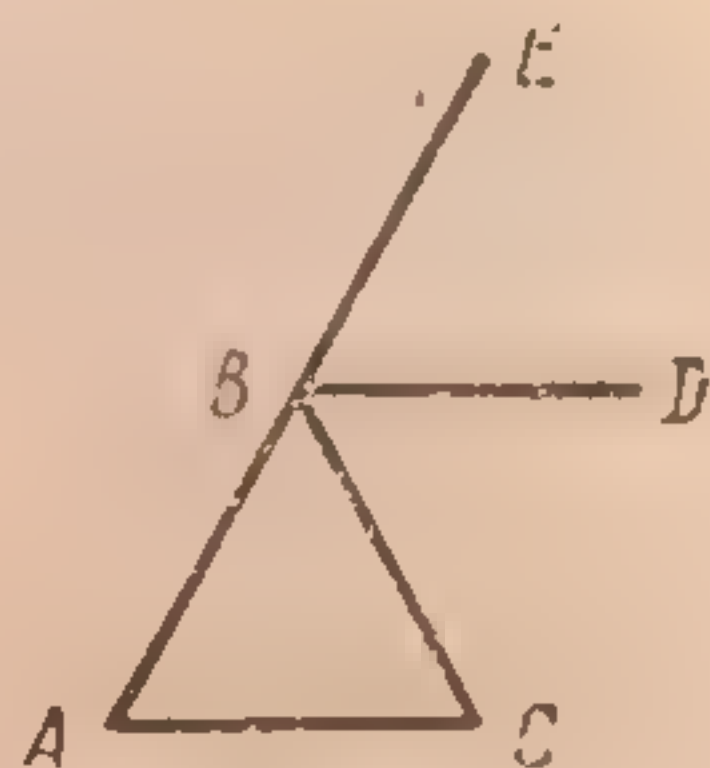


Рис. 42.

5а. Две параллельные прямые пересечены третьей. Чему равен угол, образованный пересечением биссектрис двух внутренних односторонних углов?

56. Дано: $AB \parallel CD$;
 $\angle BEO = \angle OEF$;
 $\angle EFO = \angle OFD$.
 Найти: $\angle EOF = ?$

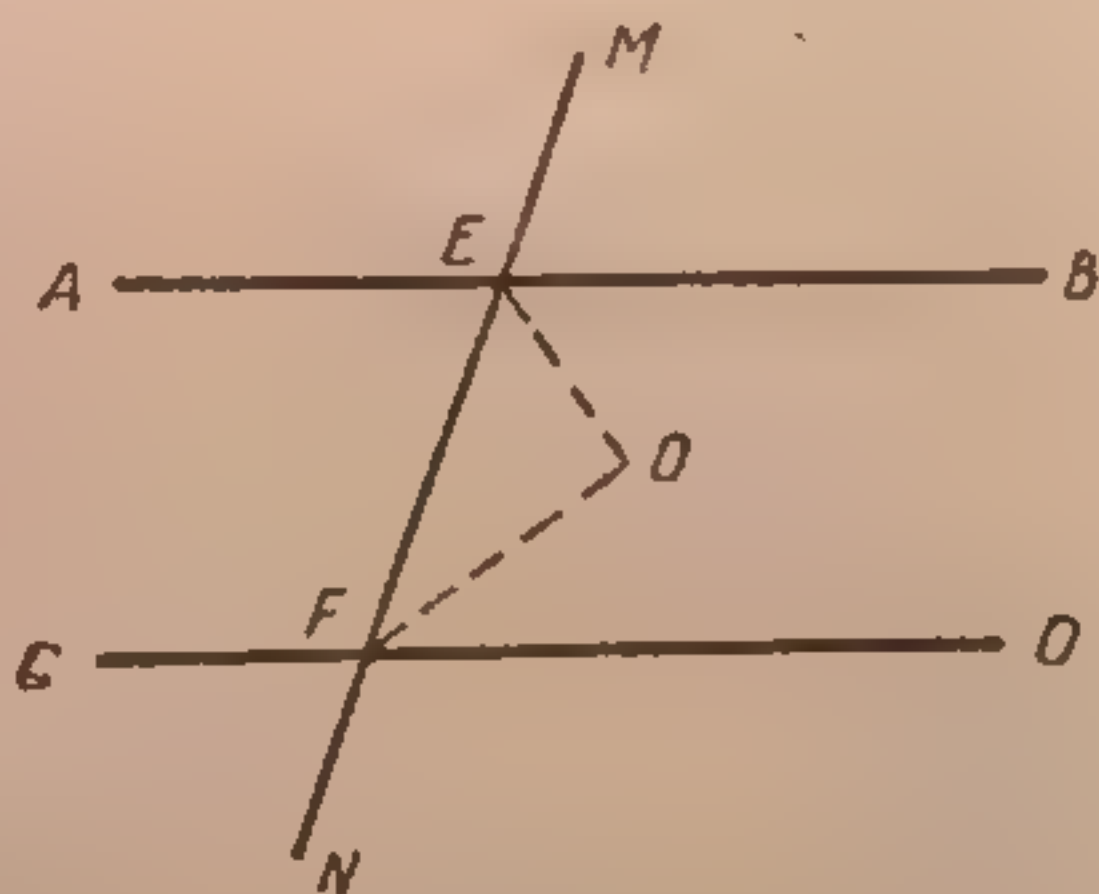


Рис. 43.

6а. В прямоугольном треугольнике величина одного острого угла равна $\frac{1}{3}d$. Из вершины прямого угла на гипотенузу проведена высота и биссектриса. Определить угол между высотой и биссектрисой.

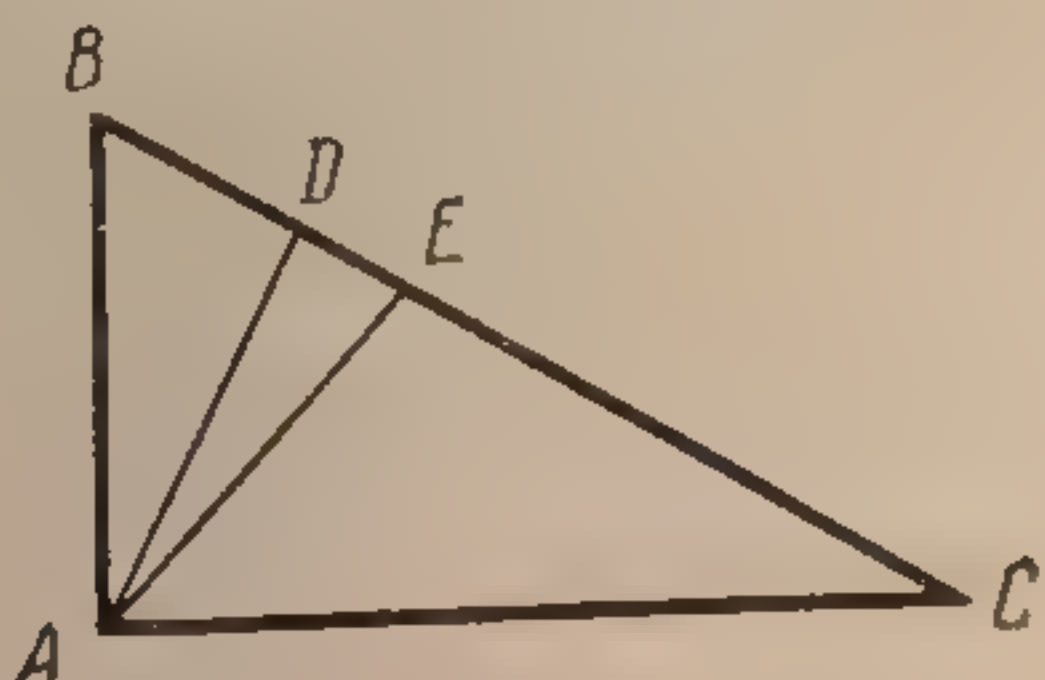


Рис. 44.

66. Дано: $AB \perp AC$;

$$\angle C = \frac{1}{3} \angle A$$

$$AD \perp BC$$

$$\angle BAE = \angle EAC$$

Найти: $\angle DAE = ?$

XXV. Задачи, связанные с пространственными представлениями

Тесты этой серии составлены из различных типов задач, которые испытуемый должен решать в уме, без помощи карандаша и бумаги, без опоры на соответствующие фигуры или тела. Решение этих задач требует наличия пространственных представлений. Имеются в виду пространственные представления как в двух измерениях (на плоскости), так и в трех измерениях (в пространстве). Задачи в большинстве своем не очень трудные, вся трудность заключается в необходимости «увидеть» мысленно фигуры, тела, пространственные соотношения и т. д. Выясняется, решает ли испытуемый эти задачи в уме и как именно. Если испытуемый не решает в уме предложенные ему задачи, но решает их легко при опоре на чертеж или реальные тела и фигуры, то это, по-видимому, свидетельствует о слабости его пространственных представлений. Если испытуемый решает такие задачи в уме, то в подавляющем большинстве случаев он опирается на пространственные представления. Значительно реже он решает их рассуждением (и это выясняется с помощью анализа самого процесса решения).

А. Геометрический тест (задачи на плоскости).

1. Диаметр окружности равен 17 см. Имеет ли данная прямая общие точки с окружностью, если расстояние прямой от центра окружности равно: а) 6 см; б) 8,5 см; в) 10 см.

2. Есть две окружности, радиусы которых равны 2 см и 3 см. Расстояние между их центрами равно 4 см. Пересекаются ли они?

3. Какой угол опишет часовая стрелка за 2 часа; за 20 мин., а минутная стрелка за 10 мин.; за 20 мин.?

4. Прямая находится от центра окружности, радиус которой равен 4 см, на расстоянии 8 см. Определить максимальное и минимальное расстояние прямой до точек окружности. (Примечание. Учащимся напоминает, что расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, опущенным из точки на прямую.)

5. Даны окружность и вне ее точка. Из этой точки проведены касательная и секущая. Что больше, касательная до

точки касания или ближайший к точке внешний отрезок секущей?

6. Дан квадрат. Середина каждой его стороны соединена с серединами соседних сторон. Какая фигура получится при этом построении? Какую часть площади данного квадрата составляет площадь построенной фигуры?

7. Участок земли, имеющий форму прямоугольника, огорожен изгородью с периметром 128 м. Длина в 3 раза больше ширины. Какова длина и ширина участка?

8. Спортплощадка, ширина которой в 5 раз меньше длины, окружена со всех сторон беговой дорожкой одной ширины. Наружная граница дорожки на 24 м длиннее ее внутренней границы, а площадь дорожки равна 468 м^2 . Определить площадь спортплощадки.

Б. Геометрический тест (геометрия в пространстве).

Задачи этого теста сначала разбиты на типы, а внутри типов — в порядке усложнения.

1. Сколько вершин, ребер и граней имеет куб? Сколько ребер исходит из каждой вершины куба? Сколько диагоналей находится на поверхности куба?

2. Через точку вне плоскости сколько можно провести прямых, параллельных этой плоскости?

3. Карандаш закреплен одним концом, а другой принимает всевозможные положения в пространстве. Какую поверхность опишет этот конец?

4. Квадрат вращается вокруг стороны. Определить вид тела вращения.

5. Какую поверхность образует прямоугольный треугольник при вращении около катета? А около гипотенузы?

6. Какое тело получится от вращения прямоугольного треугольника около оси, параллельной одному из катетов?

7. Правильный шестиугольник вращается около стороны. Каково тело вращения? А если он вращается около прямой, соединяющей середины параллельных сторон?

8. Какую форму имеет сечение куба, проведенное параллельно боковой грани? Какую форму имеет диагональное сечение куба?

9. Какую форму имеет сечение цилиндра, параллельное оси?

10. Представь тело типа кольца (спасательный круг, автомобильную шину). Это тело пересекается четырьмя плоскостями сечения, проходящими: а) через ось кольца; б) через середину внутреннего радиуса кольца; в) через конец внутреннего радиуса кольца и г) посередине между концами внутреннего и внешнего радиуса. Изобрази (хотя бы приблизительно) форму каждого сечения.

Примечание. В школе это тело вращения (тор) не изучают.

Если учащимся трудно представить ситуацию, то дается чертеж (см. рис. 45.)

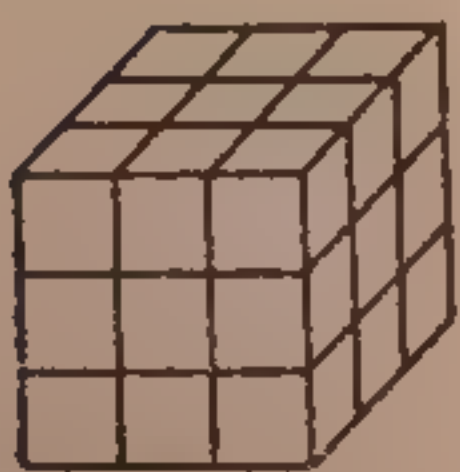


Рис. 45.

11. Представь себе куб, в который вписан шар (соприкасающийся, следовательно, с серединами сторон куба) и вокруг которого описан шар (касающийся его углов). Нарисовать форму сечения, которое проходит параллельно двум сторонам куба через центр внутреннего шара.

12. Как расположен в пространстве отрезок относительно плоскости проекции, если: а) он проецируется в точку; б) его проекция равна самому отрезку; в) его проекция меньше самого отрезка?

13. Как расположены в пространстве два отрезка, если они проецируются: а) в одну точку; б) в один отрезок; в) в две точки; г) в отрезок и точку вне его?



1



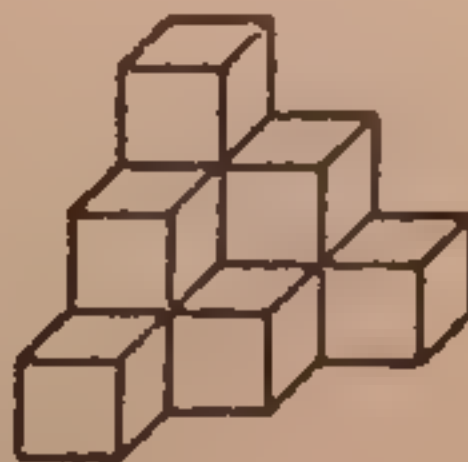
2



3



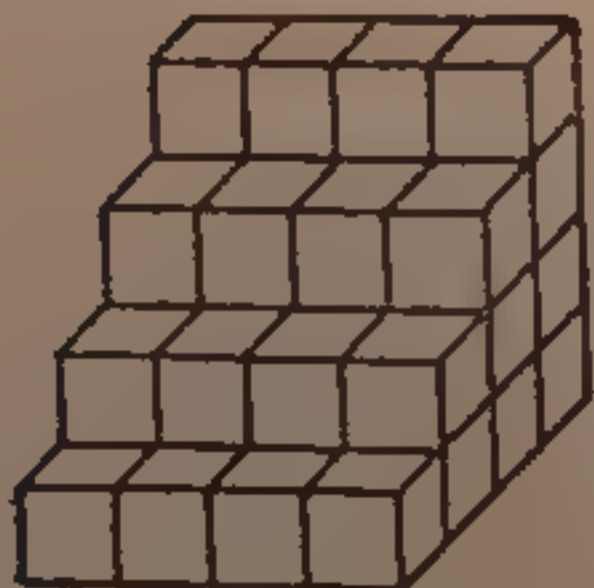
4



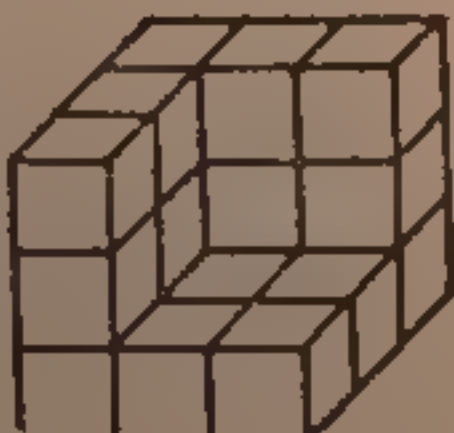
5



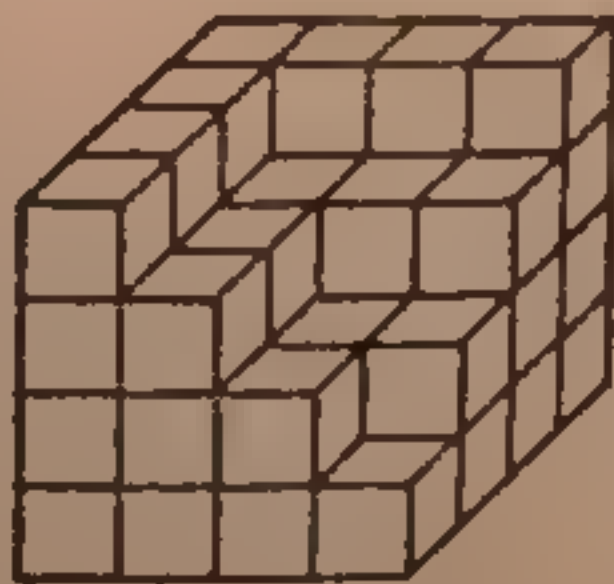
6



7



8



9



10

Рис. 46.

14. Как расположен в пространстве прямоугольный треугольник относительно плоскости проекции, если он проецируется: а) в отрезок прямой; б) в прямоугольный треугольник; в) в тупоугольный треугольник?

15. Деревянный окрашенный куб с ребром в 10 см распилили на кубики с ребром в 1 см. Сколько получится кубиков с одной окрашенной гранью; с двумя; с тремя; без окрашенных граней?

16. Аэростат сначала поднялся на 200 м, потом пролетел на 1000 м прямо на северо-запад, спустился на 100 м и пролетел 500 м на северо-восток. Потом повернул, пролетел 1000 м на юго-восток. Затем опустился на 100 м. Как далеко находится аэростат от места старта?

В. Фигурный тест.

1. Сосчитайте, сколько кубиков изображено (см. рис. 46).

Г. Фигурный тест.



Рис. 47.

1. Не поворачивая головы и не вращая бумаги, отметь положение крестика на фигурах 2, 3 и 4 (рис. 47).

2. Какие из фигур справа являются той же фигурой, что изображена крайней слева? (см. рис. 48.)

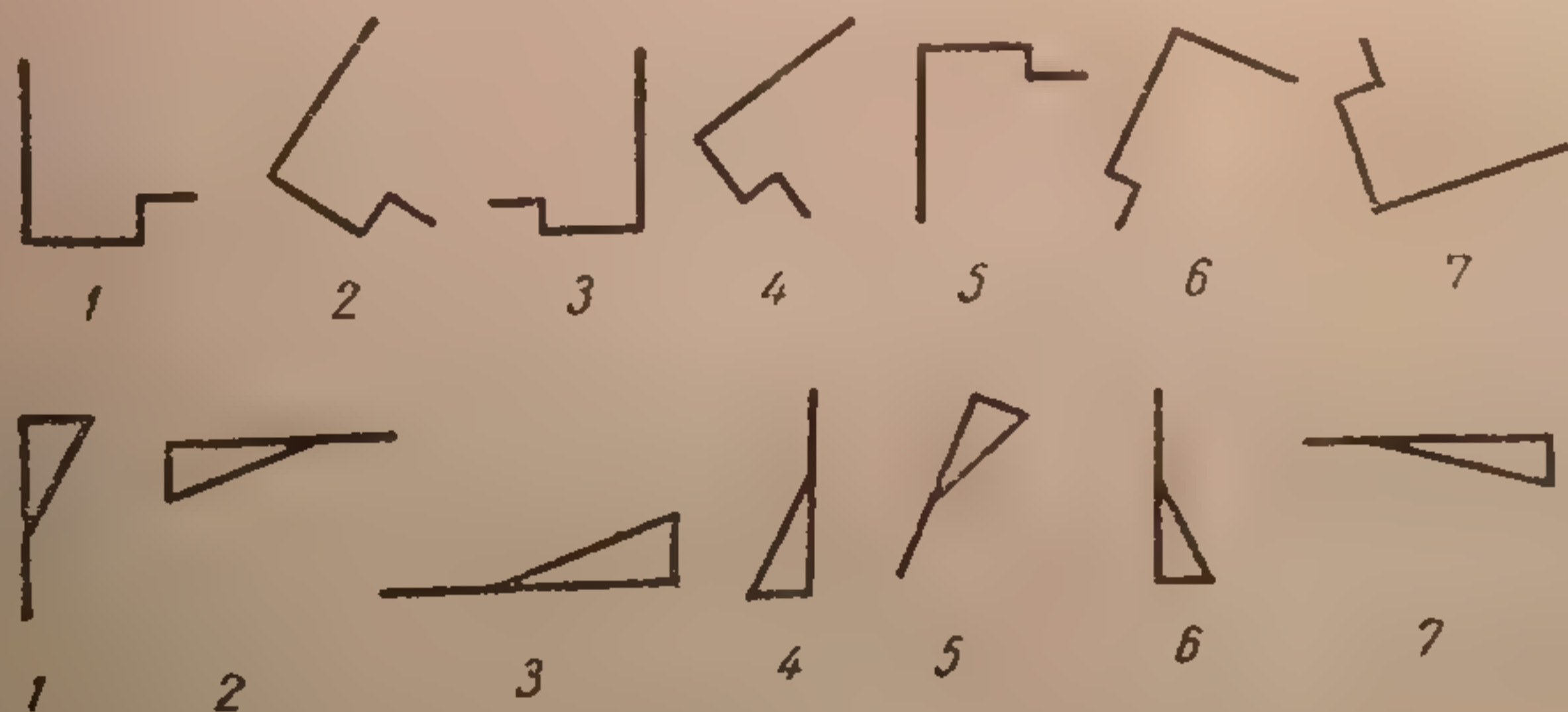


Рис. 48.

3. Изображен (см. рис. 49) один и тот же куб с гранями, обозначенными цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Обозначить цифрами невидимые грани на всех трех изображениях.

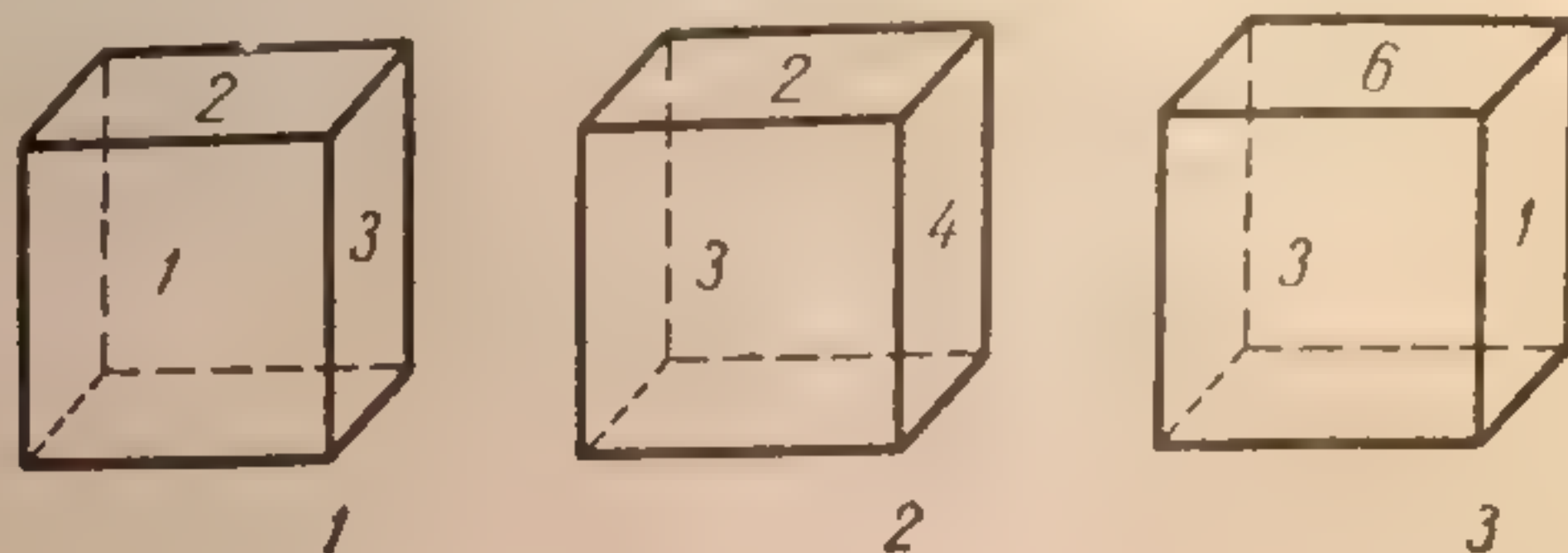


Рис. 49.

XXVI. Задачи на выявление соотношения наглядно-образных и словесно-логических компонентов интеллектуальной деятельности

В исследовании применялась разработанная М. Н. Борисовой методика выявления соотношения наглядно-образных и словесно-логических компонентов в условиях зрительного запоминания [53]. Методика эта состоит из двух тестов. Первый тест построен в расчете на преобладающую деятельность наглядно-образных компонентов (узнавание зрительного образа), второй — на преобладающую деятельность словесно-логических компонентов (описание зрительно воспринятого образа). Испытуемый имеет дело с двумя наборами контурных изображений листьев. В первой части опыта он должен после краткой экспозиции образца (3 сек.) узнать его среди 10 предъявленных ему весьма сходных изображений. Таких задач 5. Эти задачи едва ли возможно в условиях данного опыта решить на основе словесно-мыслительной деятельности, но легко решить на основе наглядно-образного запечатления. Во второй части опыта испытуемый после 10-секундной экспозиции образца, который предъявляется вместе с другими изображениями, должен настолько точно описать его признаки, чтобы можно было на основании этого описания выделить образец из 10 сходных изображений. Это уже типично словесно-логическая деятельность. Успех решения задач каждой части опыта оценивался баллом, показывающим, какое количество задач испытуемый решил из 5 возможных, так как всего предъявлялось 5 наборов карточек. Оценка результатов варьировала от 0 (при отсутствии правильных решений) до 5 (при правильном решении всех задач). Соотношение баллов, полученных по обеим частям опыта, ориентировочно характеризовало соотношение наглядно-образных и словесно-логических компонентов в данной интеллектуальной деятельности каждого испытуемого.

В заключение главы приведем общую сводку назначения серий экспериментальных задач (см. табл. 3).

Таблица 3

№ п/п	Компоненты структуры	Основной материал в сериях №	Дополнительный материал в сериях №
1	Восприятие задачи	I, II, III, IV, VI, VIII, X, XI	V, VII, XX, XXII, XXIV
2	Обобщение	V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XVIII	XXII, XXIII, XXIV
3	Логичность рассуждения	IX, X, XVIII, XIX, XX, XXI	Все остальные серии
4	Свернутость процесса рассуждения	VI, IX, X, XIX	XVIII, XXIII, XXIV
5	Гибкость мышления	XIII, XIV, XV, XVI	VI, X, XXI, XXIII и некоторые другие серии
6	Стремление к изяществу решения	XIII	VI, XIX, XXIII
7	Обратимость мыслительного процесса	XVII	
8	Математическая память	VI, XI, XIX, XXII	VII, XIII, XXIII, XXIV
9	Типы математических способностей	XXIII, XXIV, XXV, XXVI	IV, IX, XV, XX, XXI
10	Специфика компонентов математических способностей	XII, XV, XIX, XX	VIII, IX, XVI, XXVI

Модификации описанной методики были разработаны применительно к младшему (И. В. Дубровиной) и старшему (С. И. Шапиро) школьным возрастам [122], [435].

Глава V

ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Проблема способностей — это проблема индивидуальных различий, поэтому изучать способности можно, только исследуя индивидуальные различия в соответствующей деятельности. По-видимому, самый естественный путь изучения способностей — это сравнение тех, кто успешно, творчески осуществляет определенную деятельность (кого называют способными), и тех, кто неуспешно осуществляет эту деятельность (кого вследствие этого считают неспособными или малоспособными).

Для выяснения того, что такое математические способности, важно знать не только то, что есть у всех способных к математике школьников, какие индивидуально-психологические особенности свойственны им всем, но и то, чего нет у всех неспособных к математике, какие индивидуально-психологические качества у них развиты слабо и тем самым обуславливают относительную неспособность данных учащихся к математике.

Если все способные обладают какими-либо определенными психическими особенностями, которые к тому же отсутствуют у всех неспособных, то значит, что эти качества и играют важную роль в структуре математических способностей.

Соответственно этому положению экспериментальному исследованию подвергались учащиеся с разным уровнем развития способностей к математике (условно относящиеся к категориям способных, средних и малоспособных к математике), которые сравнивались между собой в отношении индивидуально-психологических особенностей.

Как производилась предварительная оценка способностей учащихся? Вывод о способностях учащихся делался опытными учителями в результате сравнительно длительного наблюдения за ходом математического развития школьников. Дополнительно к этому с отобранными учениками проводились пробные эксперименты обучающего характера.

Опытные учителя различают понятия «способный ученик» и «хорошо успевающий ученик». Чаще всего, по их мнению, эти понятия совпадают (способный ученик учится отлично), но в целом ряде случаев здесь имеется расхождение. И малоспособные, и неспособные ученики (по квалификации учителей) в ряде случаев имели оценки по математике «3» и даже «4», в то время как некоторые из способных имели оценку «4» и в отдельных случаях даже «3». Когда мы просили выделить способных и малоспособных учеников, то многие учителя сопровождали это такими замечаниями: «Этого не отношу к разряду способных, хотя он и имеет пятерку. Бесцветно учится»; «Очень способен, но ленив — учится чаще всего на «4» и даже на «3». «Пятерочники, — отмечают учителя, — не всегда способны к математике. Иные из них, быстро и легко решая стандартные задачи, становятся втупик при решении задач, требующих самостоятельности мышления». В статье О. Битова «От поиска к открытию» приводится мнение математиков по поводу некоторых учащихся, кандидатов в Новосибирскую математическую школу: «Учатся они на «5», легко и быстро решают задачи, отвечающие известным им образцам. Натренированность их на «5+», способности — нуль и близко к тому» [41].

В общем, как утверждает опытный методист А. А. Бударный, «на основе изучения учащихся почти в каждом классе всегда

можно выделить три различные по уровню развития способностей к учению группы учащихся: с высоким, средним и относительно низким уровнем развития способностей» [63].

Итак, для исследования были выделены группы способных, средних и относительно неспособных в области математики учащихся. Особо отметим, что критерии отбора испытуемых лежали вне тех конкретных психологических особенностей, которые гипотетически намечались для изучения. Испытуемых отбирали по признаку успешности и неуспешности в математике (эти категории понимались в более широком плане — как успешность в самостоятельном и творческом овладении математикой) с целью изучить, чем это определяется.

К способным были отнесены учащиеся, быстро и легко усваивающие математический материал и приобретающие навыки выполнения математических операций, самостоятельно и в известной степени творчески мыслящие при изучении нового материала, демонстрирующие оригинальное решение нестандартных задач.

К группе средних по способностям учащихся были отнесены те школьники, успешная работа которых в области математики требует большей, по сравнению со способными учениками, затраты времени и труда. Как отмечает опытный преподаватель математики С. И. Шапиро, наибольшие трудности эти школьники испытывают при переходе к решению задач нового типа. Но, овладев методами их решения, они в дальнейшем неплохо справляются с аналогичными заданиями. «Их знания носят скорее подражательный, чем творческий характер» [435].

Что же касается неспособных учащихся, то еще раз подчеркнем, что речь идет об относительной неспособности школьников к математике. Абсолютной неспособности к изучению математики, своего рода «математической слепоты» не существует¹. Каждый нормальный и здоровый в психическом отношении школьник способен при правильном обучении более или менее успешно овладеть школьным курсом математики, приобрести знания и умения в объеме программы средней школы. Относительная же неспособность к математике выражается в том, что изучение математики дается таким учащимся с большим трудом, несмотря на их старание и усердие; они не могут рассчитывать на большой успех в математической деятельности как в смысле быстроты продвижения, так и в смысле уровня достижений. Низкая успеваемость далеко не всегда может свидетельствовать о малых способностях. Известно, что нередко имеет место минимая неспособность, объясняемая существен-

¹ См. по этому вопросу заметки «Математическая слепота?» И. Х. Джонсон («Литературная газета», 24 сентября 1960 г.) и «Бывает ли математическая слепота» Н. Бескина (там же, 22 октября 1960 г.).

В это время
судились).
судились с
каждой каж
Таким
которым в
ценные ус
об одном
собный» в
ый» (име
логике дел
касается с
тоже относ
Итак, г
изложений
собный к
неспособн
Начина
лось в раз
282, 665, 3
школы №

Эксперимент	
Крутецкий I	
Крутецкий II	
Крутецкий III	
Крутецкий IV	
Шалиро С	
Дубровин	
Общий и	
При те дети,	

Эксперимент
Крутецкий I
Крутецкий II
Крутецкий III
Крутецкий IV
Шалиро С
Дубровин
Общий и
При те дети.

Эксперимент
Крутецкий I
Крутецкий II
Крутецкий III
Крутецкий IV
Шалиро С
Дубровин
Общий и
При те дети.

Эксперимент
Крутецкий I
Крутецкий II
Крутецкий III
Крутецкий IV
Шалиро С
Дубровин
Общий и
При те дети.

В эту группу включались дети разного возраста (от 6 лет и старше), проживающие в Москве и других городах (этим последним обстоятельством определялась различная полнота изучения каждого ребенка).

Таким образом, исследовались четыре группы учащихся, которым в дальнейшем будут даваться соответствующие сокращенные условные обозначения. Но перед этим надо договориться об одном обстоятельстве. Вместо термина «относительно неспособный» в дальнейшем будет употребляться термин «неспособный» (имея при этом в виду все сделанные выше оговорки). По логике дела — раз есть способные, то есть и неспособные. А что касается относительного значения, то и способные — это ведь тоже относительно способные.

Итак, представителям четырех групп даются в последующем изложении следующие условные обозначения: ОСП — очень способный к математике; СП — способный; СР — средний; НСП — неспособный (см. табл. 4).

Начиная с 1956 г. экспериментальное исследование проводилось в разные годы с учениками ряда московских школ (№ 649, 282, 665, 328, 358, 80, 434, 440, 91), школы-интерната № 12 и школы № 6 г. Курска (где исследование вел С. И. Шапиро). Ис-

Таблица 4

Экспериментатор	Годы	Классы (или возраст)	Всего ис- следова- лось человек	В том числе			
				ОСП	СП	СР	НСП
Крутецкий В. А. I этап	1956— 1958	VI, VII, VIII	19	—	9	6	4
Крутецкий В. А. II этап	1958— 1965	от 6 до 14 лет	16	16	—	—	—
Крутецкий В. А. III этап	1960— 1961	VI, VII	19	—	—	9	10
Крутецкий В. А. IV этап	1960— 1964	V, VI, VII, VIII	66	—	36	22	8
Шапиро С. И.	1962— 1964	IX, X	30	11	8	11	—
Дубровина И. В.	1963— 1965	II, III, IV	42	7	14	9	12
Общий итог	1956— 1965	со II по X класс	192	34	67	57	34

Примечание. Из группы очень способных здесь указываются только те дети, с которыми проводились эксперименты.

следовались и отдельные ученики многих других школ. Всего было подвергнуто экспериментальному исследованию 192 человека.

Мальчиков и девочек в каждой группе было примерно поровну, за исключением группы ОСП, где явно преобладали мальчики (подробнее об этом будет сказано ниже).

В заключение несколько слов о непосредственной организации экспериментов.

Эксперименты проводились в естественных условиях, когда учащиеся не чувствовали себя «подопытными». Во всяком случае, им не сообщались цели эксперимента (говорилось, что изучается процесс решения, чтобы получить материал для создания новых задачник). Эксперимент проводился в индивидуальном порядке (в редких случаях — одновременно с двумя испытуемыми, если это позволяли условия опыта), во внеурочное время (за исключением исследования С. И. Шапиро, которое проводилось и на уроках), после хорошего отдыха. Эксперимент продолжался не более двух часов. Тщательно прослеживалось, чтобы на решении задач не сказывались различные привходящие моменты. Недомогание, усталость, психическая угнетенность, отсутствие интереса к решению экспериментальных задач были достаточными поводами к тому, чтобы отменять эксперименты или вовсе прекращать их.

Раздел III

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ

Как уже отмечалось, подлинно научный подход к исследованию сложного явления, сложного психологического образования требует прежде всего анализа его структуры, выделения составляющих его компонентов.

Перед нами стоит задача вычленить и изучить своеобразие компонентов, занимающих существенное место в структуре такого интегрального свойства ума, каким являются математические способности (или в принятой выше терминологии математическая одаренность). При этом мы будем говорить о своеобразии организации умственной деятельности способных к математике школьников в процессе решения ими математических задач (в широком смысле слова).

Рассматривая соответствующий процесс как особый вид целостной умственной деятельности, мы тем не менее в целях научного анализа разложим эту деятельность на ее основные звенья (этапы, стадии) и будем давать характеристику особенностей умственной деятельности на каждом этапе решения математических задач.

По-видимому, в решении любой задачи (от элементарной до самой сложной) можно всегда наметить три звена или три стадии.

Решение любой задачи начинается, очевидно, с получения исходных данных, исходных сведений о задаче, при всестороннем обдумывании, осмысливании и овладении ими. Затем следует стадия собственно решения, как стадия переработки, преобразования полученных данных с целью получения искомого результата. И наконец, и процесс, и результат решения всегда оставляют какой-то след в памяти, чем-то обогащают опыт человека.

Возникает терминологическая проблема: как обозначить эти стадии или звенья? Можно, согласно рекомендации Г. С. Костюка [194], обозначить их как перцептивное, интеллектуальное и мнемическое звено умственной деятельности. Но это, пожалуй, подчеркнуло и закрепило бы их функциональную ограниченность

и независимость друг от друга. На самом деле и перцептивные, и интеллектуальные, и мнемические компоненты в процессе решения математических задач не только связаны друг с другом, но и «пронизывают» друг друга, и подчеркнутое обособление их кажется несколько искусственным.

Какую терминологию в подобных случаях употребляют другие авторы? В последнее время все чаще при анализе учебной деятельности употребляется понятие информации. Например, охотно употребляет этот термин Л. Б. Ительсон [146]. В его работе дается интерпретация учебного процесса в терминах информации. («Ученик принимает информацию от учителя», «учитель передает ученику информацию», «объем информации, содержащийся в учебной программе» и т. д.) Л. Б. Ительсон пишет, что «объяснение учебного материала можно описать как процесс передачи определенной информации от учителя к ученику» [146, стр. 320].

Употребляет соответствующую терминологию и Е. И. Машбиц: «в условии задачи содержится информация», «сущность решения — преобразование информации, содержащейся в условии» [285], [286]. Решение задач связывают с приемом и переработкой (преобразованием) информации и А. В. Захаров [130, стр. 47], Ф. Н. Шемякин [449]. То же самое можно сказать и о некоторых зарубежных авторах — Брунере [480, стр. 46] и Гильфорде [593]. Подчеркиваем, что во всех этих работах речь идет только об интерпретации учебного процесса в терминах информации. И это, по нашему мнению, вполне оправдано, так как термин «информация» применяется здесь во вполне допустимом значении, в каком употреблял его, в частности, и сам Н. Винер, т. е. как обозначение всего того содержания, которое получает человек из внешнего мира¹.

Точно в таком же значении употребляют его, например, З. Ровенский, А. Уемов, Е. Уемова в книге «Машина и мысль»: «Информацией являются все те данные о внешнем мире, которые мы получаем как путем непосредственного воздействия на наши органы чувств окружающих предметов и явлений, так и опосредованным путем» [347, стр. 63].

Еще проще формулирует эту мысль В. Успенский: информация — это «фиксированные в той или иной форме сведения» [422, стр. 53].

Не претендуя на оригинальность, мы также будем в дальнейшем пользоваться термином «информация», характеризуя отдельные звенья умственной деятельности при решении математических задач, употребляя его без всяких претензий и строго в том значении, которое было указано выше.

¹ Н. Винер. Кибернетика и общество. М., «Иностранная литература», 1958, стр. 34.

Итак, мы будем различать три основные стадии умственной деятельности в процессе решения математических задач:

1. Получение информации о задаче (связанное с первичной ориентировкой в ее условиях, осмысливанием ее).
2. Переработка (преобразование) полученной информации с целью решения задачи, получения искомого результата.
3. Хранение информации о задаче.

Глава I

АНАЛИЗ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ О КОМПОНЕНТАХ СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ

Проанализируем высказывания ученых-математиков и преподавателей математики средних школ относительно сущности и структуры математических способностей. Эрудиция и опыт научно-исследовательской работы первых, опыт преподавания и наблюдения за математическим развитием многих сотен школьников вторых позволяют им высказать весьма ценные соображения по интересующему нас вопросу.

Вначале рассмотрим результаты устного опроса первой группы учителей математики в количестве 62 человек, проведенного в 1958—1960 гг.

Что же учителя понимают под математическими способностями и по каким критериям судят о наличии или отсутствии таковых? Разумеется, от учителей нельзя требовать того, чтобы они во всех случаях умели вскрыть психологическую сущность тех или иных категорий и признаков, о которых они упоминают (хотя они и побуждались к тому, чтобы максимально «расшифровывать» свои положения). Но и полученный материал достаточно психологически выразителен. Представим его в виде систематизированной сводки. Дополнительно привлекаются высказывания преподавателей и методистов-математиков по этому вопросу, опубликованные в печати.

Критерии и признаки способностей по высказываниям учителей-математиков

1. Относительно быстрое овладение математическими знаниями, умениями и навыками. Быстрота понимания объяснений учителя (95%)¹. Некоторые учителя имеют при этом в виду индивидуальный темп

¹ В скобках указывается округленный до целых чисел процент учителей, указавших данный признак.

работы. Бóльшая же часть учителей полагает, что быстрота сама по себе не играет особой роли, речь может идти о быстроте качественных сдвигов. «Конечно, одно из существенных отличий — быстрота усвоения. Одному пять раз повторишь — и все мало, а другому — не закончил и одного объяснения, а он уже «схватил суть» (П. Г., стаж 8 лет); «Быстрота работы не имеет значения. У меня есть способный ученик — медлительный до крайности. Он решит две задачи, а другой за это время — пять. Зато новый материал, новый тип решения он усвоит с полуслова учителя» (А. С., стаж 16 лет).

2. Логичность и самостоятельность мышления (82%). «Умение самостоятельно доказывать, рассуждать, не повторяя чужих мыслей» (О. У., стаж 4 года); «Способного ученика всегда отличает организованность и последовательность мысли. Испытываешь своеобразное удовольствие, наблюдая, как четко «развертывается» его мысль» (Я. К.); «Умение понимать, что одно вытекает из другого, и видеть, что оно действительно вытекает. Неспособный же не понимает доказательства и просто «верит на слово» — верит авторитету» (Д. Ж.); «Малоспособный ученик не умеет самостоятельно думать. Доказательства и рассуждения он просто заучивает» (В. К., стаж 7 лет).

3. Находчивость и сообразительность при изучении математики (67%). «У более способных хорошо развито математическое соображение. Они более свободны от сковывающего влияния шаблонов и закрепленных способов решения, находчивы в попытках разнообразить решение. Менее способные самостоятельно не выходят за пределы шаблона» (Е. С., стаж 15 лет); «Лучшие ученики способны к умственному комбинированию, умственной ориентировке» (Ф. Г., стаж 22 года). А. С. Цесюлевич [430] указывает на способность находить наиболее экономные пути решения задач. Я. А. Шор [455] отмечает такие важные качества, необходимые в математике, как способность к обобщению, сообразительность. Поиски различных способов решения задач способствуют развитию мышления учащихся в указанном направлении.

4. Быстрое и прочное запоминание математического материала (50%). «Способный обычно быстро «схватывает» математический материал и прочно хранит его в памяти. Но это не механическая память, а память на смысловые конструкции, на план и основные линии доказательства» (А. В., стаж 19 лет); «Ученик, способный к математике, как правило, хорошо запоминает схему рассуждения, доказательства. Помнить факты, конкретные данные ему не всегда обязательно» (В. Р.); «Неспособные к математике отличаются нередко удивительно «дырявой» памятью. Вот мой ученик Ш. Любую формулу или теорему забудет или перепутает через два часа после заучивания. И это только в математике. По другим предметам

(я специально интересовался) дело обстоит гораздо лучше» (Я. З.).

5. Высокая степень развития способности к обобщению, анализу и синтезу математического материала (50%). «Никогда не путается в мелочах и частностях. Всегда умеет выделить главное, основное» (В. Р.); «Ясно представляет соотношение элементов задачи» (К. К.); «Быстро ориентируется в материале. Умеет выделить форму и содержание: одни задачи по форме сходные, по содержанию различные, другие наоборот» (С. Я., стаж 9 лет); «Умеет «нащупать» линии связи нового со старым, соотнести то и другое, применить знания в новых условиях» (Р. Б.); «Способные быстро овладевают навыком анализа математического материала, что дает возможность отвлечься от частных, видеть общие элементы в разнообразном, выделять группы и типы» (Н. Л., стаж 21 год). М. Д. Брейтерман [58], П. М. Эрдниев [465] указывают, что развитие математического мышления связано со способностью к абстрагированию и обобщению.

6. Пониженная утомляемость при занятиях математикой (3%). «Способные к математике отличаются удивительной способностью не утомляться даже после продолжительных занятий математикой. Я это постоянно замечал. А для некоторых из них занятия математикой — это отдых. Вероятно, это связано с тем, что способный очень мало тратит энергии на то, над чем неспособные трудятся до изнеможения» (Я. Д., стаж 18 лет).

7. Способность быстро переключаться с прямого на обратный ход мысли (1,5%). «Мысль способного легко в случае нужды уклоняется от прямолинейного хода, способному легко перейти с прямого на обратный ход мысли, что представляет трудность для средних учеников. От обычного доказательства к доказательству от противного, от прямой — к обратной теореме — такие переходы осуществляются способными учениками без труда» (Е. О., стаж 14 лет). П. М. Эрдниев [462], [463] отмечает, что «обратные» задачи, вопросы представляют известную трудность для учащихся, но что они имеют большое значение для развития активного, самостоятельного и творческого мышления, так как формируют способность переключаться с прямых на обратные операции.

Вторая группа учителей математики — 56 человек — была опрошена письменно в 1965 г. с помощью специальных анкет. По сравнению с первым опросом этот опрос носил несколько иной характер. За несколько дней до заполнения анкет с учителями были проведены лекции-беседы, посвященные психологии математических способностей школьников. Учителей просили оценить компоненты способностей, которые были им предложены для рассмотрения. Следствием этого было то, что высказывания

учителей носили более направленный и продуманный характер. Систематизируем эти высказывания (в том числе и отрицательные) и расположим их по количеству «поданных голосов».

1. **Способность к обобщению (98%).** «Способный ученик легко усматривает элементы общности в математическом материале»; «Видеть общее в частном, уметь подвести частный случай под общее понятие — необходимое условие успешного обучения математике»; «Способный ученик быстро обобщает не только математический материал, но и метод рассуждения, доказательства».

2. **Логика рассуждения (98%).** «Способный математик — это, прежде всего, человек с сильной логикой»; «Умение рассуждать на математических объектах — самая важная черта отличных математиков»; «Способности логически рассуждать отдаю первое место»; «Математика — лучший предмет для развития способности правильно рассуждать, а способность правильно рассуждать и есть один из главных признаков хорошего математического развития».

3. **Сообразительность и находчивость (88%).** «Только сообразительность и догадка, добавленные к хорошей памяти и усидчивости, и делают ученика способным к математике»; «Сообразительность — основное свойство мышления способного к математике ученика»; «Может быть, не так надо ценить знания, как ценить сообразительность в математике. Если ученик только знает, он может быть отличником, но считаться способным не будет»; «Надо ли как-то особенно выделять догадливость и смекалку? Способный ученик — это тот, кто хорошо знает и умеет применять свои знания».

4. **Математическая память (82%).** «Важна хорошая память на числа и формулы»; «Надо иметь хорошую память на основные вехи рассуждения»; «Хорошая память, по-моему, в основе всего. Проявить логику, находчивость — это значит извлечь что-то из «мозгового запоминающего устройства»; «Память — дело второстепенное. Слышал, что даже некоторые университетские профессора математики обладали плохой памятью на числа и формулы».

5. **Способность к абстрагированию (82%).** «Математика — абстрактнейшая из наук. Поэтому и способность к абстракции — самая важная»; «Способность абстрагироваться от числа и в то же время видеть в алгебраическом выражении не сочетание букв, а числа — вот что отличает способного ученика от формально усваивающего»; «Очень важной считаю способность отвлечения от конкретного — от числа, от данной фигуры, от данного отношения. И это связано с обобщением, о котором я уже говорила».

6. **Гибкость мышления (73%).** «Способные школьники могут быстро переходить от одного аспекта рассмотрения к

другому, от одного способа подхода к другому, от одного способа решения к другому»; «Удивительная подвижность мысли отличает моего способного ученика Г. Х. И так пробует и этак...»

7. **Опора на наглядность (63%).** «Способный к математике ученик очень изобретателен в наглядной интерпретации математических отношений»; «Мой способный ученик С. прямо мыслит графами». Интересны и высказывания противоположного характера, например: «Не думаю, чтобы способность делать все наглядным была важной в математике (в алгебре). Я бы сказал наоборот — надо быть способным мыслить без наглядных схем. Математика и есть отвлечение от всякой наглядности и переход в мир ненаглядных абстрактных категорий».

8. **Наличие пространственных представлений (57%).** «В геометрии без этого ни шагу не сделаешь»; «Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах. Первое можно изучать без воображения (имею в виду геометрическое воображение), второе — нельзя». Здесь также интересны соображения противоположного характера: «Пространственного воображения может и не иметь способный к математике ученик. Ему это заменит сильная способность к логическим рассуждениям»; «Я знаю одного ученика, имеющего хорошие пространственные представления, но успевающего неважно как раз по геометрии, так как у него слабо развита способность рассуждать. Уметь «видеть» — мало».

9. **Способность переходить с прямого на обратный ход мысли (52%).** «Способный математик умеет сделать и резкое переключение — мысль у него пойдет в обратном направлении. Но это, вероятно, частный случай гибкости мышления»; «Взаимообратные операции, переход от прямой к обратной теореме требуют ярко выраженной способности «ложиться на противоположный курс».

10. **Стремление к экономии умственных сил (48%).** «Важна способность идти к цели наиболее коротким, прямым, экономным путем»; «Математический ум — экономный ум. Он ищет наиболее простые пути к цели и испытывает эстетическое чувство в связи с этим»; «В математике есть понятие красочности решения и некрасивого решения, что связано с экономией или ненужной тратой умственных усилий. Способный стремится при меньшей затрате сил добиться лучшего результата».

11. **Свертывание процесса рассуждения (38%).** «Процесс рассуждения у способных учащихся сокращен и никогда не развернут до полной логической структуры. Это очень экономно, и в этом его значение»; «Я часто наблюдал, как мыслят способные ученики, — для учителя и класса это развернутый и последовательный во всех звеньях процесс, а для себя — это отрывочный, беглый, очень сокращенный, прямо стенограмма мысли». Интересны наряду с этим и такого рода высказывания:

«Не знаю, как оценить это,— в школе мы всегда упорно учим логически полному рассуждению и требуем этого от учащихся»; «Думаю, что математически способный ум — это ясный, неторопливый логический ум, и ему должны быть чужды всякие ускорения и сокращения. Логика есть логика, никуда от нее не уйдешь. А пропусти звено — и не будет логики».

12. Пониженная утомляемость в процессе занятий математикой (30%). «Первый признак способностей — объективно очень напряженный труд и малая трата нервной энергии, физических и умственных сил»; «Любой способный человек поразительно много может работать в соответствующей области и при этом мало устает»; «Я замечала это постоянно, только не знаю, что это значит,— возможно, способные меньше утомляются, потому что учебные занятия для них — легкое дело»; «Математические способности — это способности сосредоточенно трудиться и мало уставать при этом. После 6 уроков и домашних занятий способные ребята приходят вечером на занятия математического кружка — сидим по 3 часа, напряженно трудимся, а они свеженькие, как огурчики».

На вопрос о возможности выделить среди школьников представителей разных типов математической одаренности учителя ответили следующим образом: 47 человек из 56 указали на наличие двух типов — типа «алгебраиста» и типа «геометра». Эти типы, по мнению учителей, связаны с преимущественной склонностью мыслить и рассуждать в области количественных отношений или в области пространственных отношений. Первый тип характеризуется слабостью пространственных представлений, второй — яркостью и живостью их. Однако целый ряд учителей отметили, что они затруднились бы отнести многих учеников к одному из этих двух типов.

На возможность типологии способных к математике учащихся по признаку быстроты их мышления указали 22 человека из 56: «Одни ученики «схватывают» материал очень быстро и сразу раскрывают свои возможности, другие движутся медленно и постепенно, но в итоге достигают не меньших успехов».

Трое учителей ответили, что им не приходилось наблюдать отчетливых типологических различий в способностях у одаренных к математике учеников.

Как можно видеть, высказывания учителей представляют большой интерес. Правда, некоторые из этих высказываний носят слишком общий характер. Они недостаточно конкретизированы и недостаточно ясны. К сожалению, объективные условия не позволили дополнить эти письменные данные устными индивидуальными беседами.

Большую ценность представляют авторитетные мнения ученых-математиков. Ранее уже отмечалось, что 21 человек прислали ответ на посланные им вопросы. Рассмотрим эти материалы.

Материал, поступивший от ученых-математиков

Прежде всего, надо отметить, что математики, пытаясь раскрыть сущность математических способностей и указывая на отдельные психические свойства как условия успеха, выделяют две группы свойств: общие свойства личности и, если так можно выразиться, «свойства математического ума».

К личностным свойствам, являющимся условием проявления математических способностей, математики относят целеустремленность как своеобразный «рефлекс цели» (3)¹, сосредоточенность (4), трудолюбие (2), волевые качества — настойчивость, упорство (3). Указывается, далее, на «концентрированный интерес к математике», увлеченность ею, стремление к математическим знаниям, потребность заниматься математикой, своеобразную «любовь к числам» (6).

Далее, перечисляются собственно качества математического ума. Прежде всего указывается на способность и даже своеобразную «страсть» к обобщению, способность «видеть общее в разных явлениях», «устанавливать связь разнородных явлений», «умение выделить главное, сущность вопроса», «способность прийти от частного к общему» (12). Это качество связывается со способностью к абстракции, склонностью и интересом к отвлеченным рассуждениям, умением «отвлечься от несущественных деталей» (11).

Далее, указывается на логичность мышления, умение вывести логические следствия из данных предпосылок, точность, сжатость, четкость мышления (6), отмечается и своеобразная «способность к «нелогическим» рассуждениям» (судя по всему, имеется в виду то же самое, что имеют в виду физики, когда говорят: «Нам нужна сейчас какая-то совершенно сумасшедшая идея, выходящая за рамки всех привычных представлений»). Указывается на свойственную математикам «потребность искать наиболее изящное решение» (3), способность к математическому воображению, фантазии (3), комбинаторные способности (3), «способность быстро переключаться от одного плана мышления к другому» (3). Выделяется «способность быстро схватывать суть дела и проникать в глубины вопроса, минуя промежуточные стадии рассуждения», «способность мыслить, опуская многие звенья рассуждения» (3). Наконец, отмечается «способность хорошо помнить основные идеи, схемы и комбинации, основные ходы мысли при различной способности запоминать числа и формулы» (1), «умение создавать общую математическую схему решения» (1) и «характерная для школьного

¹ В скобках указывается количество человек, указавших на данное свойство.

возраста склонность производить формальные операции по определенным правилам» (1).

На вопрос о специфичности математических способностей математики ответили следующим образом: из 21 человека 16 отметили специфичность математических способностей, 3 отрицали какую бы то ни было специфичность и сводили все к общему интеллекту и 2 не высказали определенной точки зрения.

Противоположные точки зрения наиболее определенно были выражены в таких суждениях: «Если человек обладает способностью к логическому мышлению и приобретает в силу ряда причин интерес к математике, то он сможет с успехом в ней работать» — «совсем не верно было бы считать, что всякий человек с развитым интеллектом при подходящих условиях станет хорошим математиком». Но как высказался один из опрошенных математиков, «действительно выдающиеся результаты получаются, когда сильный специфический математический талант соединяется с общей интеллектуальной одаренностью, любознательностью, стремлением к овладению общечеловеческой культурой».

Разнообразные ответы были получены на вопрос о различных типах одаренности. Большинство ученых (19 чел.) высказали соображения в пользу наличия таких типов. Некоторые (2 чел.) считают, что нет оснований говорить о каких-либо типах математических способностей, а следует говорить о различных интересах, вкусах в области математики, о разном направлении работ.

Большое разнообразие мнений было высказано в связи с попытками содержательно определить типологические различия в математических способностях. В пользу наличия двух основных типов по признаку быстроты мышления высказалось 5 человек.

Позволим себе привести несколько наиболее интересных соображений на этот счет: «Разница между двумя типами математического ума — некоторые быстро схватывают и усваивают чужие идеи (из них вырастают эрудиты), другие мыслят более оригинально, но медленнее... Среди творчески одаренных математиков, и притом очень глубоких ученых, немало тугодумов: они не в состоянии быстро решить даже относительно простой вопрос, но зато умеют сосредоточенно и глубоко размышлять в течение длительного времени над очень трудными проблемами. Среди самых обещающих учеников математических классов есть ребята, которые систематически проваливаются на олимпиадах, где требуется решать трудные задачи за короткий срок. И в то же время они решают гораздо более трудные задачи, не будучи ограничены никаким жестким сроком». «Есть математики, удивительно быстро схватывающие суть дела и проникающие в глубины вопроса. Другие, среди которых встречаются весьма сильные математики, производят впечатление туподумов. Они

медленно строят свои рассуждения шаг за шагом, не допуская никакого полета мысли. Но, наблюдая за их работой, поражаешься, как звено за звеном выковывается стройная, необыкновенно убедительная и прочная математическая система».

Некоторые ученые указали на существование двух основных типов — «аналитика» и «геометра» (5 чел.). Три человека из этих пяти отметили, что эти типы связаны с наличием или отсутствием в математическом мышлении интуиции («яркая геометрическая интуиция при сравнительно слабой логике характеризует тип геометра, и наоборот»). Двое других подчеркнули, что интуиция проявляется не только в области геометрии, можно различать тип с преобладанием геометрической интуиции и тип с преобладанием интуиции числа и функциональной зависимости.

Намечены были и другие основания для типологического деления: логический и калькулятивный (вычисляющий) типы (2 чел.); синтетический и аналитический типы («первый способен скорее увидеть путь к решению трудных задач, второй — найти обоснование правильного решения; у первого больше элементов фантазии, у второго — элементов логики»); конкретный и абстрактный типы («первый умеет и любит решать задачи, второго тянет к общим рассуждениям»). Наметились и такие два типа: первому свойственна склонность к творчеству на основе общих понятий, второму — склонность к творчеству на основе формального математического аппарата.

Наконец, было высказано мнение о наличии «типа широкого математического ума, способного охватить огромный материал и привести его в систему и порядок, и узкого математического ума, увлекающегося изолированными проблемами, в решении которых проявляется иногда поразительная изобретательность».

Оценивая материал, полученный путем письменного опроса группы ученых-математиков, следует отметить его глубину и богатство мыслями.

Глава II

АНАЛИЗ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОДАРЕННОСТИ ДЕТЕЙ

Как уже упоминалось, мы исследовали на протяжении довольно длительного времени группу одаренных к математике детей, математические способности у которых стали проявляться, как правило, в раннем возрасте. Наблюдения за развитием этих детей, в сочетании с экспериментальным их исследованием, проводились в период 1958—1966 гг. Конкретной задачей этого исследования было изучение индивидуально-психологических особенностей этих детей, проявляющихся в основном в процессе занятий математикой.

Ниже приводятся несколько индивидуальных характеристик одаренных детей.

Соня Л. (рожд. 1950 г., Москва. Характеристика составлена в 1958—1959 гг.). Соне Л.—8 лет. Она учится во II классе 164 школы г. Москвы. В семье есть еще ребенок — мальчик, ученик VII класса. Брат не обнаруживает математических способностей, но он хорошо развит, музыкален. Ни мать, ни отец также не обнаруживают специальных математических способностей, но отец — крупный специалист в области технических наук. Какое-либо математические способности не наблюдались ни у кого из прямых родственников. Можно только отметить, что бабушка Сони (по матери) отличалась большой любовью к математике и уделяла немалое время этой науке в период учения в школе. Данных о наличии у нее математических способностей нет.

Соня очень маленькая ростом (на вид ей не более 6 лет), хрупкая, темноглазая девочка, с косичками, с тонкими чертами лица. Когда она занимается за столом, ей подкладывают на стул подушку или два толстых тома. Физически она развита нормально, весьма медлительна в движениях, у нее неторопливая (даже тягучая) речь, эмоции внешне выражаются слабо. Учится она по всем предметам (разумеется, кроме арифметики, где ее достижения очень велики) нормально, особых успехов не обнаруживает, пишет плоховато, читает не очень охотно (чтением Соня увлеклась впоследствии), да и учить урски не очень любит. К музыке не обнаруживает ни особых склонностей, ни особых способностей, обучение музыке давалось ей с большим трудом. Зато она любит рисовать и рисует (и особенно срисовывает) довольно хорошо для своего возраста.

Проведенные с Соней эксперименты по методике В. П. Ягупковой [468] показали интересные особенности ее письменной и устной речи — протокольную точность и ясность описаний, бедность образами, отсутствие в ее речи метафор, эпитетов, какой-либо эмоциональной окраски.

Соня очень работоспособна, не любит сидеть без дела, особенно любит решать замысловатые арифметические задачи. Во всех отношениях Соня самый обычный ребенок этого возраста — часами способна играть в куклы, любит бегать на лыжах, с увлечением принимает участие в школьных утренниках. На последнем школьном празднике новогодней елки она получила премию за свой костюм «Кот в сапогах», в котором выступала. Принимает Соня активное участие и в общественных делах класса. Есть у нее одна особенность, которая должна быть отмеченной. Соня отличается рассеянностью, когда занимается чересчур для нее легким делом. Именно поэтому она может порой допустить ошибку в сложении чисел в пределах десятка, может «забыть» поставить знак или скобку. При указании на ошибку она «спохватывается» и, конфузясь, немедленно исправляет ее.

Наряду с этим она способна к глубокому сосредоточению. Когда сосредоточивается, не сидит спокойно, а двигается, вертится (правда, все это происходит в характерном для нее замедленном темпе), иногда даже принимает неестественные позы. Однажды, в процессе решения трудной задачи (занимались мы у нее дома), она, к нашему удивлению, неожиданно встала, подошла к креслу, деловито перекувырнулась через голову и вновь возвратилась на свое место.

На математические способности Соны родители впервые обратили внимание тогда, когда ей было около четырех лет. Разумеется, до этого ее никто не обучал арифметике, она лишь имела возможность прислушиваться к тому, как ее брат — ученик II класса — учит вслух уроки по арифметике. Как-то незаметно для всех она научилась считать — сначала до 10, потом до 100. Родители однажды с удивлением обнаружили, что четырехлетняя Соня объясняет брату, как решать задачи на вычитание («27 — 14» — сначала надо отнять 10, получится 17, а потом отнять еще 4, получится 13»). Когда ей было $4\frac{1}{2}$ — 5 лет, она совершенно

самостоятельно, не зная теории, пришла к понятию дроби (простой). В возрасте 5—6 лет у нее появилось какое-то интуитивное представление об отрицательных числах. Брат ее ошибочно списал пример и растерялся, увидев, что приходится вычитать из меньшего числа большее. Но Соню это не смутило: «28 вычесть 36 — это будет на 8 меньше, чем ничего», — заявила она. Примерно к этому же времени Соня самостоятельно научилась операциям с дробями (в уме!). Совершенно неожиданно для родителей в $5\frac{1}{2}$ лет она продемонстрировала умение решать (разумеется, опять-таки в уме) довольно сложные задачи, рассчитанные на учеников IV класса. Она решила задачу, которая вызвала затруднения у ее брата, ученика IV класса, вычислила площадь стен, вычла площадь окон и двери и подсчитала, сколько надо уплатить за обои.

Надо отметить, что Соню специально никто и никогда не обучал математике. Наоборот, ее отец принципиально избегал давать ей какие-либо знания, так как считал, что в таком возрасте это приведет лишь к формальному их усвоению. Правда, родители уделяли ей внимание в том отношении, что они удовлетворяли ее склонность к решению задач, давали ей «посоображать». У нее и до сих пор нет почти никакой системы знаний — она оперирует с дробями, не зная, что такое числитель и знаменатель, не зная правила приведения к общему знаменателю. Все основано исключительно на соображении (и притом в уме — Соня только что научилась писать и еще не умеет вычислять письменно). Поэтому ее способы вычисления далеко не всегда экономны и иногда по-детски наивны (хотя и верны по существу).

Например, на вопрос: «Как построить угол в 1° ?» — она отвечает: «Надо разделить окружность на 360 частей, потом стереть 359 и оставшуюся часть по краям соединить с центром окружности». Вот как она делит дроби:

$$\frac{5}{8} : \frac{1}{2} = \frac{5}{8} : \frac{4}{8} = 1 \text{ и } \frac{1}{4} \text{ от } \frac{8}{8} = 1 \frac{2}{8}.$$

А вот как она делит целые числа: $600 : 240 = ; 600 : 120 = 5$. Но 120 — это половина от 240, т. е. получится 5 половин, или $2\frac{1}{2}$.

Конечно, такие вычисления, да еще в уме, требуют большого умственного напряжения. Поэтому Соня не любит длинных и сложных вычислений. Она любит именно соображать, находить пути решения задачи.

Что же умеет Соня в свои 8 лет? Дадим некоторое представление об уровне ее математического развития. Ее трудно «приравнять» (хотя бы условно) к уровню ученика того или иного класса (так как сказалось бы, что знает она значительно меньше, а соображает значительно лучше, чем многие ученики). Очень условно ее можно приравнять к хорошему, довольно развитому математически ученику VI класса, хотя некоторые задачи она решает и на более высоком уровне. Например, она решала отдельные задачи, рассчитанные на учеников VII—VIII классов (при условии, что эти задачи были «на соображение» и не требовали специальных знаний, например: «Какова длина и скорость поезда, если он мимо столба проходит за $\frac{1}{4}$ мин., а тоннель длиной 540 м проходит за 45 сек.». Легко решает она задачи такой степени трудности: «На дворе бегают куры и кролики. У них вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько тех и других?»; «Из 740 листов бумаги изготовили 140 толстых и 100 тонких тетрадей, причем на изготовление толстой тетради тратилось бумаги на 1 лист больше, чем на изготовление тонкой. Сколько бумагишло на изготовление каждой толстой и тонкой тетради?»).

Соня имеет представление о корнях, очень хорошо ориентируется в процентах, умеет производить действия с простыми дробями (десятичные дроби она рассматривает как вид простых), имеет представление об отрицательных величинах и действиях с ними, имеет весьма широкие (но далеко не систематизированные) знания по геометрии. Она легко самостоятельно находит доказательство простых геометрических теорем (например; о сумме внутренних углов треугольника, о величине внешнего угла треугольника) и решает геометрические задачи (например: «В прямоугольном треугольнике один из острых углов делится отрезком прямой на 2 угла, из которых один в пять раз больше другого. Бóльший из этих углов — 45° . Чему равен внешний угол, построенный у другого острого угла?»).

Первые же этапы изучения Сони Л. (на протяжении 1959 г.) выявили следующие особенности ее умственной деятельности в процессе решения математических задач.

Быстрота соображения, умственной ориентировки. Это одна из наиболее характерных для Сони черт. Как правило, Соня удивительно быстро находит пути решения доступных ей по трудности задач (практически время решения подобных задач определяется лишь временем, потраченным на вычисления). Например, она через несколько секунд нашла путь доказательства незнакомой ей еще теоремы о величине внешнего угла треугольника, очень быстро нашла схему решения упомянутой выше задачи о кроликах и курах. На вопрос: «Может ли в треугольнике быть два прямых угла?» — немедленно дает ответ: «Нет, так как тогда не должно быть третьего угла». Процесс рассуждения у нее иногда настолько свернут, что можно говорить о характеризующем ее своеобразном аналитико-синтетическом «видении» математического материала. В этих случаях она сразу находит путь решения, видит логику доказательства.

Логичность мышления, систематичность и последовательность мысли также одна из наиболее характерных черт Сони. Она хорошо понимает смысл теоремы, смысл доказательства, ее мысль легко переходит от посылок к следствиям. Она «видит», что из А следует, вытекает В, а не просто верит этому. Рассуждения ее логически очень собраны и убедительны. Она очень любит слово «следовательно» и употребляет его всегда к месту. Ни одно из имеющихся у нее математических понятий (о нуле, об отрицательном числе) не является формальным. Все без исключения найденные ею решения математических задач логически очень четко обоснованы.

Вот пример. Соне предложена задача:

«Один пастух говорит другому: «Дай мне 8 овец и у нас будет их поровну». Другой отвечает: «Нет, ты мне дай 8 овец и тогда у меня будет вдвое больше, чем у тебя». Решение: «Если один даст другому 8 овец и у них станет поровну, значит, разница у них в 16 овец. Если, наоборот, другой даст 8, то разница станет 32 (так как один потеряет 8, а другой выиграет 8 овец). И тогда получается, что у одного в 2 раза или на 32 овцы больше. Значит, будет 32 и 64, а до передачи было 40 и 56». Задача решена была за 40 сек.

Способность к математической абстракции и к быстрому и широкому обобщению математического материала. Соня быстро обобщает сходный в математическом отношении материал. Решенные задачи обыкновенно осмысливаются ею в абстрактном плане, решаются они как типовые задачи. Она без затруднений находит общие моменты в различных задачах (принадлежащих к одному типу). Перенос ею найденного способа решения на другие задачи этого же

типа происходит без труда. Соня очень мало нуждается в опоре на наглядные образы в процессе решения задач. Впечатление таково, что они ей даже мешают: при поиске доказательства теорем она часто смотрит не на чертеж, а в пространство. Еще пятилетней девочкой она без труда пришла к абстрактному понятию половины, не отталкиваясь при этом (как это происходит обычно) от конкретных образов (половина яблока, половина карандаша). Но все сказанное не означает, что Соня не может наглядно изобразить отношения, данные в задаче. Она это делает, если ее попросить об этом, и делает хорошо. По собственной же инициативе она почти никогда не обращается к наглядным образам, так как не испытывает в этом потребности. Понемногу нам удалось выяснить, в чем дело: Соня обычно продумывает схему решения в общем плане, а конкретно наглядные образы и чертежи сковывают ее, отбрасывая ее мысль снова в конкретный план. Показатель Сони по методике М. Н. Борисовой (см. описание XXVI серии задач, стр. 194) «3—5».

Приведем несколько примеров ее обобщений. Дана задача: «Имеются два смежных угла. Один из них равен 45° . Проведены биссектрисы этих смежных углов. Чему равен угол между биссектрисами?» Соня очень быстро дает правильный ответ (90°) и, чуть подумав, обобщает: «Это у всех смежных углов биссектрисы должны давать угол в 90° , так как в сумме смежные углы дают 180° , а половина этой суммы всегда будет 90° ».

Доказав, что сумма углов треугольника равна $2d$, Соня по просьбе экспериментатора очень легко доказывает, что сумма углов четырехугольника равна $4d$, а пятиугольника равна $6d$, делая следующие построения (см. рис. 50), а потом, подумав, говорит: «Это можно у любого угольника (т. е. многоугольника. — В. К.) найти: число треугольников всегда будет на два меньше числа сторон

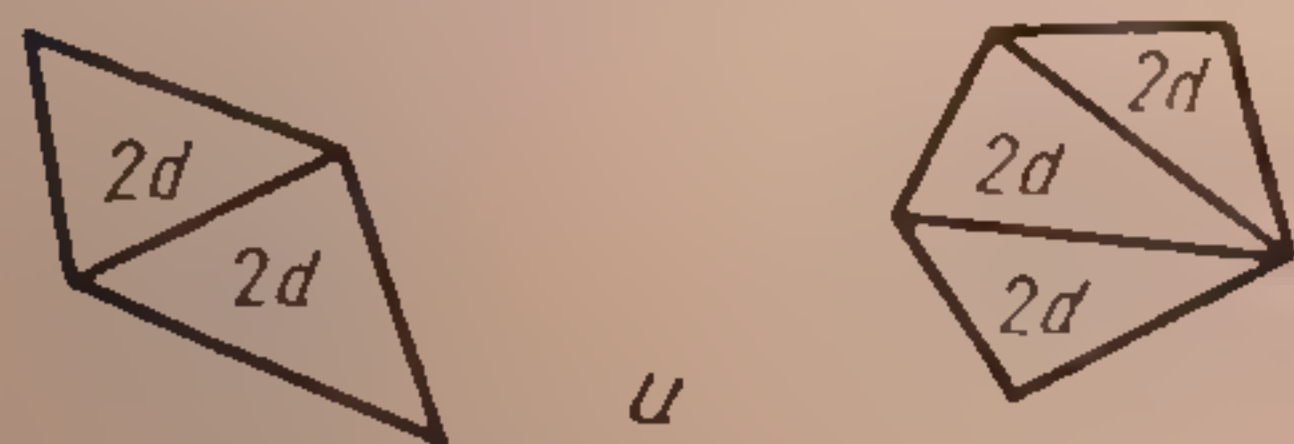


Рис. 50.

(так как на два крайних треугольника пойдет по две стороны, а на все остальные — по одной стороне). Чтобы найти сумму внутренних углов, надо из числа сторон отнять два и столько раз взять $2d$ ». Таким образом, путем обобщения Соня самостоятельно пришла к формуле $2d(n-2)$ (сумма углов всякого многоугольника). Тут же Соня за 2 сек. вычислила сумму внутренних углов 608-угольника.

Гибкость мышления. Соня в значительной мере свободна от сковывающего мышления влияния шаблонных и трафаретных способов решения задач. Она легко переключается от одной умственной операции к другой, от одного способа решения к другому. Ее отличает многообразие аспектов в подходе к ре-

шению задач (своего рода умственное комбинирование). Она, как правило, находит 2—3 пути решения задачи, причем делает это по собственной инициативе. Вот как решает Соня упомянутую выше задачу о курах и кроликах (этот пример иллюстрирует и логику мысли Сони): «Если было всего 35 голов, значит, всего кур и кроликов было 35. Если бы все были куры, то ног у них было бы 70. Значит, лишние 24 ноги потому, что вместо части кур бегают кролики. Каждый кролик имеет на 2 ноги больше, чем курица, значит, было 12 кроликов, а кур 23 штуки. А можно и так решить: имеется 94 ноги. Если бы все были куры, то их должно было бы быть 47. А голов всего 35, на 12 меньше. Значит, эти 12 голов имеют не по 2, а по 4 ноги. Значит, было 12 кроликов и 23 курицы».

Легкое и свободное переключение с прямого на обратный ход мысли. Подобное переключение, которое представляет известные трудности для средних учеников V—VII классов, для Сони не является трудным делом. Если, например, она усвоила, что вертикальные углы равны, то ей никакого труда не составит тут же сделать вывод: «Некоторые равные углы есть вертикальные углы». Легко Соня переходит и от решения прямой к решению обратной задачи.

Тенденция к быстрому сокращению, «свертыванию» рассуждений в процессе решения задач. Для Сони характерна тенденция мыслить сокращенными умозаключениями, «свернутыми» структурами, но эта тенденция приобретает особое развитие в процессе решения однотипных задач. Пример: «В двух кассах было вместе 140 руб. Если из одной переложить в другую 15 руб., денег там станет поровну. Сколько денег было в каждой кассе?» Решение (без пауз): «140 минус 30 — будет 110, да пополам — будет 55. 55 и 85 руб. Можно и так решить: поровну — это по 70, а до этого, значит, было 55 и 85 руб.» Второй способ решения она по просьбе экспериментатора развернула до следующей структуры: «Представим, что уже переложили и денег стало поровну. Если поровну, значит, по 70 руб. Но в одной до этого было на 15 руб. меньше (так как там стало 70, когда доложили 15), т. е. было $70 - 15 = 55$ руб. В другой до этого было на 15 руб. больше (так как там стало 70, когда взяли 15), т. е. было $70 + 15 = 85$ руб.»

Своеобразная тенденция к «экономии мысли». Соню отличает стремление находить наиболее экономные пути решения задач, стремление к ясности и простоте решения. Хотя Соне не всегда удается найти наиболее рациональное решение задачи, в большинстве случаев она избирает тот путь, который наиболее быстро и легко приводит к цели. Поэтому многие ее решения «изящны». Сказанное не относится к вычислениям (Соня, как сказано выше, с техникой вычислений не знакома). Не- сколько примеров. Задача: «Сколько весит рыба, если хвост ее

весит 4 кг, голова весит столько, сколько весят хвост и половина туловища, а туловище весит столько, сколько голова и хвост вместе?» Решение: «Туловище равно по весу голове и хвосту. Но голова равна по весу хвосту и половине туловища, а хвост весит 4 кг. Значит, туловище весит столько, сколько 2 хвоста и половина туловища, т. е. 8 кг и половина туловища. Значит, 8 кг составляют другую половину туловища, а все туловище — 16 кг». (Дальнейший ход решения опускаем. Задача фактически уже решена.) А вот как просто и ясно Соня самостоятельно доказала

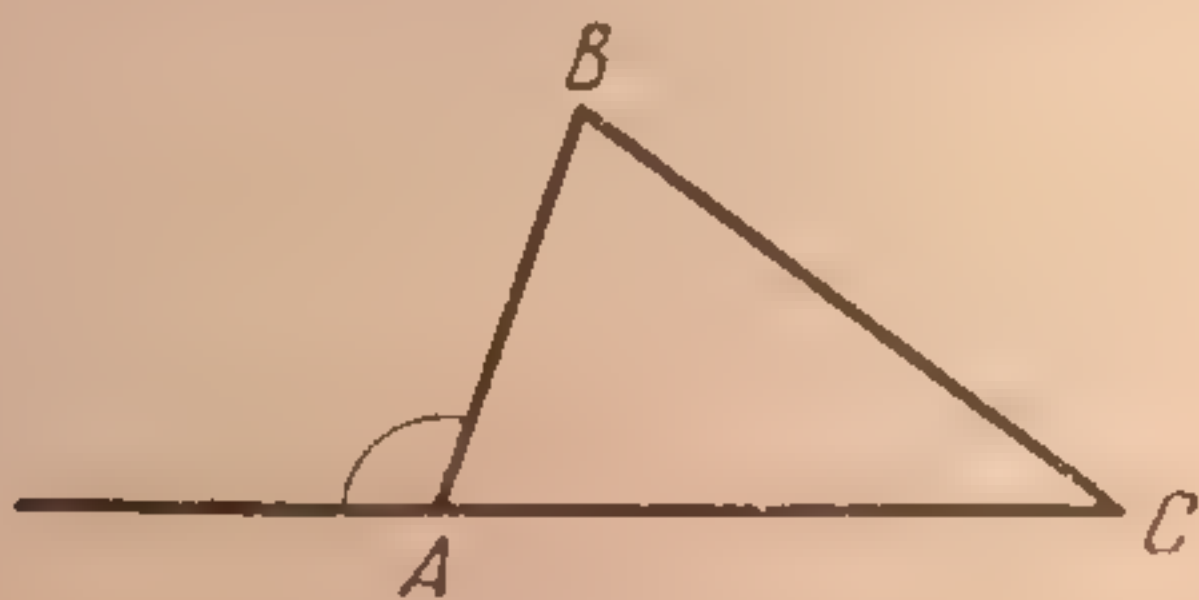


Рис. 51.

теорему о внешнем угле треугольника по данному чертежу (см. рис. 51). «Сумма внутренних углов треугольника $2d$. Угол BAC дает $2d$ либо в сумме с внешним углом (как смежные углы), либо в сумме с углами B и C (как внутренние). Значит, внешний угол равен сумме углов B и C ».

Быстрое и прочное запоминание математического материала. Как уже говорилось, Соня решает все задачи в уме. Она очень хорошо помнит условие задачи, все промежуточные действия и их результаты. Однако память на конкретные данные и числа носит у нее своеобразный характер: эти данные она хорошо помнит лишь на время решения задачи. В противоположность этому она прочно запоминает основные линии доказательства, типы задач и принципы решения их, основную схему рассуждения.

Следует отметить и характеризующую Соню пониженную утомляемость при занятиях математикой. Соня не только очень работоспособна и любит решать задачи «на рассуждение», но и сравнительно мало утомляется в процессе этих занятий (исключая сложные и длинные вычисления, которые она производит в уме). Ни подобные занятия дома, ни занятия с экспериментатором ни разу не заканчивались по ее инициативе. Даже продолжительные занятия (для ее возраста) не приводили к резкому утомлению. В экспериментальных целях мы несколько раз устраивали с нею $1\frac{1}{2}$ часовые занятия без перерыва (сдвоенные 45 минутные уроки!). И лишь в самом конце этого периода у маленькой восьмилетней девочки наблюдались

признаки утомления (ошибки, ослабление памяти). Занимаясь другими видами работы (музыкой, чтением, письмом), Соня утомляется нормально.

Наконец, можно высказать предварительные общие соображения о математической направленности ума Сони. До известной степени ее характеризует своеобразная склонность находить логический и математический смысл во многих явлениях действительности, осознавать их в плане логических и математических категорий. Иными словами, у нее уже в раннем возрасте (7—8 лет) наметилась тенденция воспринимать многие явления через призму логических и математических отношений. Например, Соня сравнительно плохо запоминает стихи, причем явно пытается уловить логический смысл расстановки слов в стихотворении. Смысл, тему стихотворений она помнит хорошо, но при воспроизведении стихотворений очень часто меняет расстановку слов, логически перестраивает стихотворение (брат ее, наоборот, очень быстро и точно запоминает стихотворения). Аналогичные факты имеют место и при обучении музыке (музыкальные способности у Сони не выражены, обучение музыке дается ей с трудом). И здесь у нее замечается тенденция математически осмыслить и заучить последовательность звуков, аккордов музыкального произведения, порядок работы пальцев во время исполнения. Во время рисования (Соня сравнительно неплохо рисует, точнее, срисовывает) она стремится математически осмыслить размеры, отношения, пропорции.

Следует отметить также, что описанные выше особенности умственной деятельности Сони Л. проявляются только в ее математической деятельности и в других видах деятельности не наблюдаются.

В последующие годы мы продолжали наблюдать за развитием Сони. Около полутора лет мы систематически занимались с Соней, обучая ее математике эвристическим методом. В процессе этих занятий Соня демонстрировала очень быстрое продвижение — за 60 экспериментальных уроков (плюс довольно интенсивные домашние задания) она прошла весь курс математики по программе V, VI и VII классов, решив почти все упражнения для соответствующих классов в задачниках по арифметике, алгебре и геометрии. Не преувеличивая, можно сказать, что Соня самостоятельно «открывала» для себя целые разделы геометрии, самостоятельно исследовала те или иные свойства фигур. Учась в IV классе, Соня успешно занималась математикой в кружке вместе с восьмиклассниками. В 1965 г. 15 лет Соня кончила школу с золотой медалью, причем трижды «перешагивала» через классы (после IV класса училась прямо в VI, после VI класса — в VIII и из IX класса перешла прямо в XI класс). В том же году пятнадцатилетняя Соня стала студенткой механико-математического факультета МГУ.

Володя Л. (рожд. 1949 г., Москва. Основная характеристика составлена в 1959—1960 гг.).

Отец и мать Володи — научные работники. Мать преподает в высшем учебном заведении, отец — видный специалист в области технических наук.

Десятилетний Володя физически развит вполне нормально. Это порывистый, несобранный, очень любознательный (и в силу этого даже несколько назойливый) мальчик. Даже с малознакомым человеком он мог обращаться свободно и непринужденно. С первых же минут знакомства проявлял своеобразный «утилитарный» подход к нему — старался извлечь из нового знакомства максимум полезного для удовлетворения своей любознательности. Наша первая встреча как раз и отличалась тем, что Володя «перехватил» инициативу и начал активно допрашивать нас: где мы работаем, что делаем, что знаем, чем интересуемся. Стоило больших трудов перевести разговор в другой план, но и тут Володя был больше склонен занимать позицию спрашивающего, а не отвечающего. Для Володи характерны быстрые переходы — удовлетворив свое любопытство, он сразу потерял всякий интерес к общению и занялся какой-то книгой.

Занявшись делом, Володя порой настолько концентрирует на нем свое внимание, что не видит и не слышит ничего — его можно окликнуть, дотронуться до него — он этого не услышит и не заметит. А так как он часто занят серьезным делом, то его облику свойственна какая-то отрешенность. Сказанное не означает, что Володя, обдумывая какой-нибудь сложный вопрос, застывает в неподвижной позе. Наоборот, в частности, при решении математических задач он вертится, ни минуты не проводит без движения, зачастую принимает искусственные и даже нелепые позы.

Володя очень работоспособен, его ум, по-видимому, нуждается в постоянной пище. Он очень глубоко и серьезно интересуется математикой, химией (впоследствии стал интересоваться физикой), периодически интересовался географией, зоологией. Порой его занятия кажутся мало полезными (так, например, заинтересовавшись географией Москвы, он изучил маршруты всех московских трамваев, троллейбусов и автобусов). Легко можно заметить, что «книжная» сторона любой науки интересует Володю гораздо больше, чем практическая. И вообще, как указывают родители, жизнь он знает мало и в жизненно практическом отношении значительно уступает своим сверстникам, проявляя в ряде случаев подлинную наивность. Володя не очень любит и не очень понимает серьезную литературу — он и в более старшем возрасте охотнее читал «Приключения Чиполлино», чем произведения Вальтера Скотта или Диккенса (читать которые его приходилось специально побуждать). Отличаясь довольно тонкой нервно-психической организацией, Володя в дальнейшем более тяжело, чем его сверстники, переносил особенности переходного возраста.

ста — быстро утомлялся, проявлял раздражительность, испытывал частые головные боли. Но при этом незаметно было появления специфических чувств и интересов.

Необходимо отметить две основные черты развития Володи. Во-первых, его способности стали проявляться на редкость рано и в очень выразительной форме и, во-вторых, он проявлял способности сразу в нескольких областях, переживая скачками периоды увлечения то одним, то другим. Как рассказали родители, в трехлетнем возрасте Володя научился читать. В это же время он начал увлекаться цифрами и числами, их начертанием и значением. Чтобы отвлечь мальчика от этого «вредного» занятия, его дедушка — большой любитель музыки и сам хороший музыкант — показал мальчику, когда ему было $3\frac{1}{2}$ года, ноты (еще раньше

он заметил у мальчика музыкальный слух). В 4 года с помощью дедушки Володя овладел нотной грамотой, используя с этой целью несложные книги по теории музыки. В 4 года 3 месяца он по собственной инициативе сделал попытку играть по нотам.

В $4\frac{1}{2}$ —5 лет Володя мог транспонировать услышанную мелодию

в другую тональность. В 7 лет Володя поступил учиться в Центральную музыкальную школу при Московской консерватории. В этом же возрасте Володя стал сочинять несложные музыкальные вещи. При этом Володю всегда больше интересовала теория музыки, ее своеобразная логика. Эмоциональная сторона музыки его захватывала мало.

Довольно рано у Володи возник интерес к химии. Химию он изучал с 7 лет по энциклопедическим словарям, бесконечно возился с формулами реакций, самостоятельно конструировал таблицу элементов Менделеева.

Наибольший интерес для нас представляло, естественно, математическое развитие Володи. Оно было безусловно незаурядным.

В возрасте $2\frac{1}{2}$ лет Володя научился считать до 100. Когда дошел

до 99, спросил: «А как же дальше?» В трехлетнем возрасте он легко освоил счет до 1000. В 4 года овладел операциями сложения и вычитания в пределах первой сотни с переходом через десяток. Мальчик очень увлекался этим — часто его можно было видеть чертящим палочкой на песке цифры и числа. В 5—6 лет у Володи начали быстро развиваться вычислительные способности. В этом возрасте он умел умножать (разумеется в уме) двузначные числа, самостоятельно составил таблицу квадратов чисел.

Надо сказать, что родители не только не содействовали такому раннему развитию, но, скорее, опасались этого и были бы рады, если бы Володя больше походил на обычных детей его возраста. А мальчик между тем по-прежнему увлеченно зани-

мался математикой. В шестилетнем возрасте он свободно оперировал дробями, извлекал квадратные корни из любого числа, из некоторых чисел извлекал и кубический корень. В этом же возрасте он познакомился (самостоятельно) с тригонометрическими функциями и сразу увлекся тригонометрией. Самостоятельно пришел к понятию средней геометрической. В 8 лет Володя усвоил двоичную систему, а вслед за нею и другие системы счисления.

Все, чем в эти годы интересовался Володя, приобретало у него математический аспект. Увлечение географией выразилось, в частности, в том, что шестилетний мальчик вычислил плотность населения во всех странах мира (используя справочники); увлечение (в 7—8 лет) астрономией — в составлении астрономических таблиц, в расчетах фаз луны на ближайшие 10 лет, в выделении закономерности, по которой можно определять, на какой день недели приходится любой день любого года (в пределах нескольких десятков лет назад и вперед); увлечение историей — в попытке познать восточную клинопись; увлечение языками (в 6 лет) — в интересе к различным словарям, принципам их составления. Тогда же он самостоятельно научился читать на немецком языке (путем сопоставления двух словарей — русско-немецкого и немецко-русского). Собственно, интерес к немецкому языку, как таковому, у него на этом и кончился.

Интересно, что брат Володи (моложе его на 7 лет) развивался как его своеобразная противоположность, хотя воспитывался в абсолютно тех же условиях. Это во всех отношениях обычный, «средний» ребенок. Отец как-то сказал о шестилетнем Андрюше: «Возьмите Володю, сделайте все наоборот — и будет Андрюша». Андрюша не чужд детских слабостей — ленив, неорганизован; он большой фантазер, любит читать о приключениях, практически лучше ориентируется в жизни, чем старший брат, имеет массу друзей, способностей особых не проявляет.

Эксперименты, проведенные с десятилетним Володей, позволили раскрыть некоторые характерные черты его математической одаренности. В каком-то отношении он и Соня Л. относятся к разным типам одаренности.

Прежде всего, обратила на себя внимание прекрасная память Володи. Наряду с тем, что он хорошо помнит (как и Соня) обобщенные схемы рассуждений, выводов и доказательств, он прекрасно запоминает и цифры, числа, долгое время сохраняет в памяти условия очень сложных и запутанных задач. Такая «цифровая» память была характерна для него и в раннем детстве. Например, в возрасте 5—7 лет он быстро и прочно запоминал номера случайно встретившихся автомашин, запомнил и мог воспроизвести количество страниц любой книги из 400 томов домашней библиотеки.

Далее, Володя в гораздо большей степени, чем Соня, является «вычислителем». Как выразился его отец, он «каждую свою

мысль проверяет вычислением». Многие задачи он решал не рассуждением, а необыкновенно быстрым перебором и опробованием многих сочетаний чисел. Это не значит, что Володя не умеет и не любит рассуждать логически. Это значит, что Володя настолько хорошо владеет техникой быстрых вычислений в уме, что для него перебор чисел является наиболее простым путем к решению.

Вот как Володя решал задачу о кроликах и курах (ту же, что решала Соня): «Кур примерно вдвое больше, чем кроликов, так как если все куры, то 70 ног, если все кролики, то 140 ног. 94 вдвое ближе к 70, чем к 140. Попробуем: 20 и 10; 21 и 11; 22 и 12; 23 и 12 ... 23 курицы и 12 кроликов». Решив задачу «перебором данных», Володя, по нашей просьбе, показал, как бы он объяснил эту задачу младшему товарищу: «Если все куры, то было бы 70 ног. А ног на самом деле 94. Примесь одного кролика дает «+2» ноги. Значит, было 12 таких примесей, т. е. 12 кроликов». Задачу: «Было 4 ящика печенья. Из каждого взяли по 9 кг, после чего во всех вместе осталось столько, сколько было вначале в каждом. Сколько печенья было в каждом ящике?» — Володя решил так: «Надо подобрать такое соотношение двух чисел, чтобы одно было в 4 раза и на 9 кг меньше другого: 1—10; 2—11; 3—12; было 12 кг». Это же касается и перебора различных вариантов решения. И Володя, и Соня тратили, примерно, одинаковое время на решение задач, и решали в одинаковом возрасте задачи, примерно, одинаковой сложности и трудности. Но если Соня мыслила неторопливо, но зато обычно сразу «нащупывала» верный путь, то Володя редко сразу находил верное решение, но за это время успевал произвести много разнообразных проб, быстро перестраиваясь и переключаясь с одной попытки на другую.

Процесс мышления у Володи при решении математических задач очень свернут и, по-видимому, это привычный для него способ мышления, так как развернуть решение до полной структуры, объяснить решение ему часто очень трудно. Некоторые свои правильные решения он объяснить не может, как ни пытается, и, видя, что его не понимают, беспомощно умолкает. Порой можно лишь догадываться о том, как он размышлял при решении задачи.

Например, он решает задачу: «Два брата живут вместе и работают на одном заводе. У Ивана путь занимает 30 мин., а у Петра 40 мин. Петр вышел на работу на 5 мин. раньше Ивана. На каком отрезке пути Иван догонит Петра?» Вот точная запись решения: «За 5 мин. пройдет $\frac{1}{8}$ расстояния, потом уже $\frac{1}{4}$, а потом только $\frac{1}{6}$, еще за 5 мин. $\frac{3}{8}$, а тот $\frac{1}{3}$. Еще за 5 мин. $\frac{4}{8}$ и $\frac{3}{6}$... Через 15 мин. на полдороге». Задачу Володя решил за 32 сек.

Объяснить решение, сделать его сколько-нибудь понятным он долго не мог. Лишь после долгих усилий удалось выяснить, что схема решения была такой: «За те 5 мин., что Петр шел один, он прошел $\frac{1}{8}$ расстояния. После истечения вторых 5 мин. он уже прошел всего $\frac{2}{8}$, а Иван за эти же 5 мин. прошел $\frac{1}{6}$ расстоя-

ния. По истечении следующих 5 мин. Петр прошел всего $\frac{3}{8}$, а Иван $\frac{2}{6}$. Еще через 5 мин. Петр прошел $\frac{4}{8}$, а Иван $\frac{3}{6}$ расстояния, т. е. каждый из них прошел половину расстояний. Это означает, что они встретились через три пятиминутки после начала движения Ивана, на полпути».

Еще пример. Задача: «Некто купил книги. Если он заплатит за них трехрублевыми билетами, то ему придется выдать восемью билетами больше, чем в том случае, если он заплатит пятирублевыми. Сколько стоит покупка?» Решение (за 38 сек.): «Должно делиться на 15 ... между ними разница 2. Восемь разделить на 2 и умножить на 15, получится 60 руб.» Это решение Володя так и не сумел объяснить. И видя безуспешность своих попыток, вышел из положения простым способом: «Ну я лучше по-другому решу. Вся плата должна делиться и на 3, и на 5, т. е. на 15. Это может быть 15, 30, 45, 60, 75, 90 руб. Будем подбирать, что подходит... Подойдет 60 ... А можно и так: лишних 8 трехрублевых — будет 24 руб., а каждая на 2 руб. меньше, значит, было 12 пятирублевых». Последнее решение тоже не сразу стало ясным, а имелось в виду вот что: заменим пятирублевые деньги трехрублевыми, на каждой такой замене потеряем 2 руб., и вот эти-то лишние 8 трехрублевых и компенсируют эту потерю. $24 : 2 = 12$ — это и есть число пятирублевых.

Характерной особенностью Володи является то, что он в отличие от Сони при решении задач охотно опирается на наглядные образы, схемы, умело пользуется графами различного вида. Решение почти любой задачи сопровождалось у него потребностью наглядно выразить данные соотношения.

Вот его чертеж к решению задачи о двух братьях (см. рис. 52).

А вот его графическое решение задачи: «Мальчик говорит сестре: «Если ты дашь мне 8 орехов, то у нас станет поровну». А она ему отвечает: «А если ты дашь мне 8 орехов, у меня будет вдвое больше». Сколько орехов имел каждый?» (см. рис. 53).

Показатель Володи по методике М. Н. Борисовой (XXVI серия) «4 — 4».

Как уже говорилось, у Володи с раннего возраста стало развиваться самостоятельное творческое мышление. Особенно это



Рис. 52.

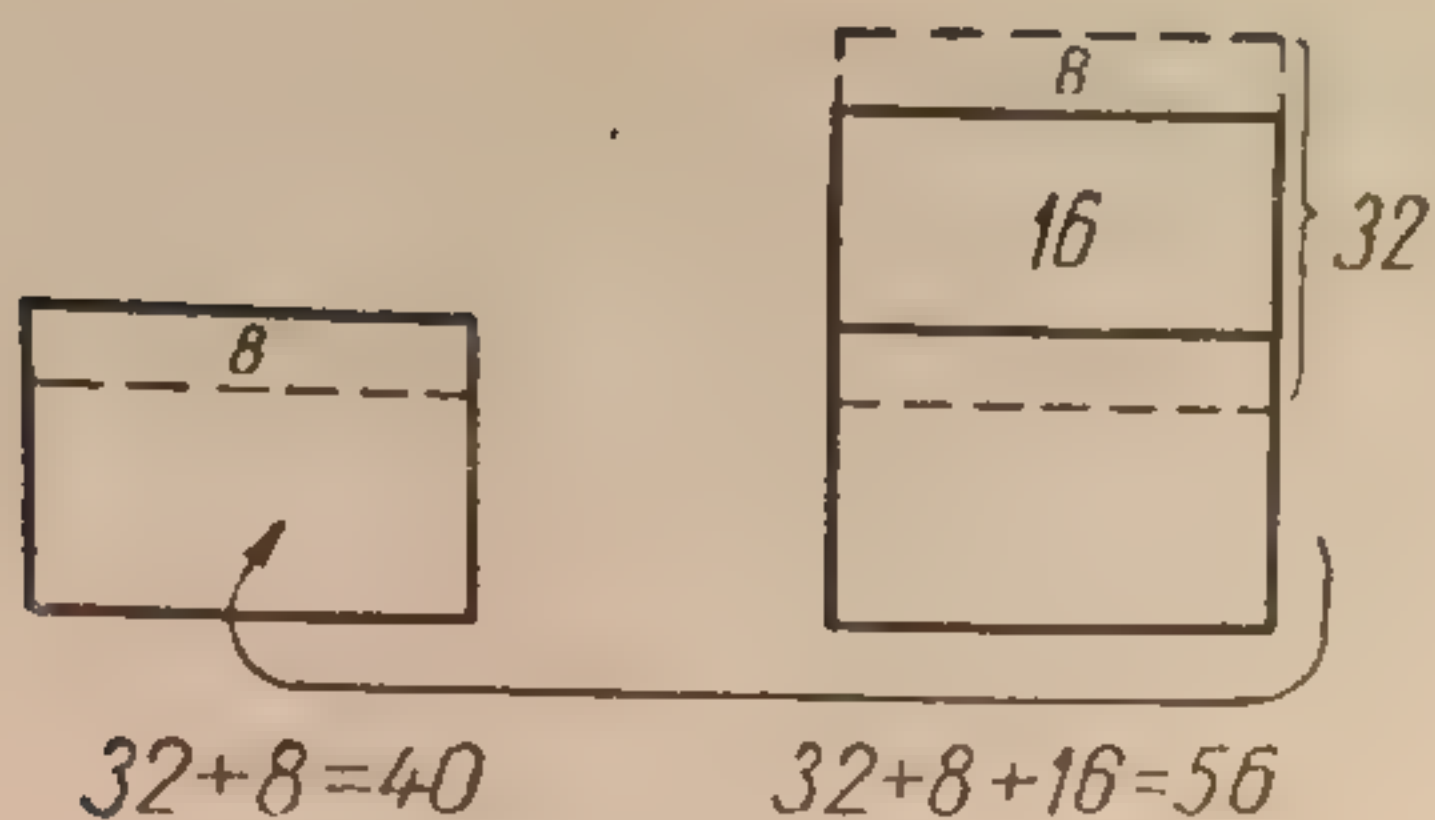


Рис. 53.

стало заметно в средних и старших классах школы. Он продолжал учиться в музыкальной школе, но уже становилось ясно, что его основное призвание не музыка. С каждым годом он все больше увлекался математикой, химией, физикой. Так как в этом отношении он значительно опередил своих сверстников, ему было разрешено не посещать занятий по ряду предметов, работать по индивидуальному графику и сдавать экзамены экстерном. При минимальном контроле со стороны родителей он, будучи учеником VII класса, подготовил и сдал все экзамены за VIII класс. Он изучил весь школьный курс химии (с VII по XI класс), экзамен по этому предмету на аттестат зрелости сдал отлично, не посетив ни одного (!) урока химии в школе. В последних классах он начал самостоятельно изучать целые разделы вузовских курсов математики, в частности познакомился с основами математического анализа, систематически занимался в математическом кружке при механико-математическом факультете МГУ. Его учителя и руководители кружка отмечали его способность обстоятельно, глубоко мыслить, его склонность к анализу, выявлению связей, к обобщениям. Отмечалось, что он формируется больше как «аналитик», чем как «геометр».

Это означало, что с возрастом происходила известная перестройка математического склада ума Володи. Словесно-логические компоненты его математического мышления приобретали все большее значение по сравнению с наглядно-образными.

В последних классах школы Володя заинтересовался критической литературой, увлекся Белинским, Добролюбовым. Его сочинения по литературе стали еще более содержательными, отличались обилием собственных мыслей, рассуждениями. В связи с курсом обществоведения Володя увлекся теорией диалектического материализма.

В 16 лет Володя кончил школу с золотой медалью, обогнав своих сверстников на 2 года за счет ускоренного прохождения курса.

Гиля Х. (рожд. 1953 г., Горьковская область. Характеристика составлена в 1965 г.).

Гиля живет с матерью (инженером одного из заводов) и бабушкой в одном из небольших городов Горьковской области. Его отец и некоторые из родственников проявляли математические способности, хотя математиками не стали.

С детства Гиля отличался прекрасной памятью — в возрасте 1 года и 2 месяцев он знал много стихотворений, прекрасно помнил некоторые даты. В возрасте 5 лет Гиля научился читать и вскоре читал уже очень хорошо. Домашние не поощряли его в этом отношении, тем более что Гиля не отличался крепким здоровьем. В возрасте 7 лет он поступил в школу. В I классе проучился всего неделю и был переведен во II. За время учения в начальных классах часто болел. Очень работоспособен — даже во время болезни старался чем-нибудь заняться, несмотря на протесты и запреты домашних. В частности, читал энциклопедию, усердно стараясь разобраться в непонятном. В детстве Гиля был очень впечатлительным и нервным, быстро утомлялся. Когда напряженно умственно работал, находился в движении — вертелся, крутился; нарушения режима переносил очень болезненно. Был очень обидчивым, легко ранимым, отличался негативизмом (особенно, если требования предъявлялись в резкой форме). С течением времени он стал несколько спокойнее, сдержаннее. Товарищей у Гиля нет. Впрочем, однажды был у него товарищ — старше его почти на 4 года.

Гиля любит музыку и учится параллельно в музыкальной школе. Его больше интересует теория музыки, чем собственно мелодическая и эмоциональная ее сторона. Очень быстро он научился читать с листа.

Гиля кончил без труда III класс, начал заниматься в IV, но со второй четверти был переведен сразу в V класс. Учась в VI классе, Гиля серьезно заболел (тяжелая форма ангины), школу не посещал и самостоятельно проходил программу VI класса дома. В возрасте 11 лет Гиля обучался в VII классе, опередив своих сверстников на 2 года. В настоящее время (1966 г.) тринадцатилетний Гиля кончает IX класс средней школы. Одновременно он учится в заочной математической школе при МГУ.

Математическая одаренность Гиля стала проявляться в очень раннем возрасте. Элементарному счету он научился, когда ему еще не было двух лет. Двухлетний малыш увлеченно считал ступеньки лестницы, пальцы на руках, пересчитывал предметы. Когда ему было 3 года, он уже считал весьма уверенно, пробовал писать цифры, выполнял простые операции на сложение. В первые же дни учения в I классе по собственной инициативе устно перерешал все примеры и задачи в задачнике по арифметике для этого класса. В школе его любимыми предметами всегда были арифметика, а потом — алгебра и геометрия. В математике Гилю увлекает все, но особенно ему нравятся задачи

на смекалку. Он мог вставать в 6 час. утра и сразу браться за научно-популярные книги и сборники задач на смекалку (а впоследствии за учебник и задачник по алгебре). Сверстники называли странного, не похожего на них мальчика «Архимедом».

Математику Гиля осваивал очень легко, многое проходил совершенно самостоятельно. В возрасте 8—9 лет он легко понял математическую символику (конечно, в ее элементарных формах), никаких трудностей в самостоятельном усвоении математики не испытывал. Например, легко разобрался сам в школьной теме «Уравнения первой степени с двумя неизвестными».

Гиля в 1963/64 учебном году заочно решил целую серию предложенных ему экспериментальных задач, а в начале 1965 г. приезжал в Москву, где с ним были проведены эксперименты.

Одиннадцатилетний Гиля оказался худощавым мальчиком, с очень умными, серьезными, внимательными глазами. Может быть, поэтому он выглядит немного старше своих лет. Произвел впечатление выдержанного, хорошо воспитанного, вежливого мальчика. Когда пришлось решать задачи, весь преобразился, стал собранным и сосредоточенным; забыв обо всем, погрузился в решение задач.

Оказалось, что он гораздо больше любит алгебру, чем геометрию (которую впрочем, любит тоже). Все предложенные ему экспериментальные задачи Гиля решил без особого труда. Очень заметна была его особенность — установка на решение задач в абстрактном, общем плане. Например, предложенную ему нереальную задачу: «Изобразить общий вид чисел, которые делятся на 5 и в остатке имеют 7» — Гиля решал так: «В общем, в этих случаях (в *этих* случаях! — В. К.) надо к данному числу брать множитель x и прибавлять остаток, чтобы делилось на y , а в остатке было z ... все числа будут: $xy + z$. В данном случае будет $x \cdot 5 + 7$ ». Ошибки он так и не заметил, так как решил задачу в общей форме и цифры подставил, как он выразился, «машинально».

Гиля прекрасно составляет (и решает) уравнения по условиям задач, очень хорошо разбирается в графиках.

У него проявляется своеобразная математическая направленность ума — он увлекается химией, но «практическая» сторона химии его не интересует, другое дело — химия формул и записей реакций! То же и в физике — его увлекает только математическая сторона физики. Экспериментом ни в физике, ни в химии он не интересуется. Не интересует его и техника. Его интересуют самые разнообразные таблицы, а также диаграммы, графики, особенно если они отражают функциональные зависимости.

Гиля — ярко выраженный «мыслительный» тип. Даже там, где задача наталкивает на использование наглядных образов и схем, он обходится без них. Ни одну из предложенных ему

экспериментальных задач он не решал с использованием наглядных схем. В связи с этим у него при решении задачи порой возникают затруднения, которых можно было бы избежать. Например, очень простую задачу: «Пассажир, проехав полпути, заснул. Когда он проснулся, ему осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть всего пути он проехал спящим?» — он решил так: «Осталось ему ехать одну треть (пауза — 8 сек.) от половины пути, или (пауза — 4 сек.) $\frac{1}{6}$ расстояния (пауза — 5 сек.), а проспал $\frac{5}{6}$ (пауза — 4 сек.), нет, проспал $\frac{2}{3}$ от этой половины (пауза — 12 сек.), т. е. треть всего пути».

Предложив ему решить задачу «Какой угол описывает часовая стрелка за 2 часа, а минутная за 20 мин.», мы нарочно, словно случайно, положили рядом с ним часы. Даже не взглянув на циферблат, Гиля начал рассуждать: «Часовая стрелка за 3 часа описывает прямой угол, а за 2 часа описывает $\frac{2}{3}$ этого угла, т. е. 60° . Минутная стрелка за час описывает полный угол, а за 20 мин. $\frac{1}{3}$ этого угла, т. е. 120° . Можно решить и другим способом: минутная стрелка движется в 12 раз быстрее, чем часовая. За 20 мин. любая стрелка пройдет в 6 раз меньше, чем за 2 часа. В итоге минутная стрелка за 20 мин. пройдет вдвое больше, чем часовая за 2 часа. Получатся те же 120 мин. Но этот путь труднее, первый гораздо проще и лучше».

Пространственные представления у Гиля развиты недостаточно. Даже простейшие задачи, легко решаемые пространственным представлением, он всегда решал с помощью рассуждения («Сколько ребер имеет куб? Сейчас соображу. В основании куба лежит квадрат — это четыре ребра будет. Верхнее основание тоже квадрат и тоже четыре ребра. И еще четыре ребра должны соединять верхнее и нижнее основание... Всего будет 12»).

Показатель Гиля по методике М. Н. Борисовой (XXVI серия) «2—4».

Способность логически рассуждать — сильная сторона мышления Гиля. При решении задач Гиля заметно «свертывает» процесс рассуждения, при этом чем легче для него задача, тем заметнее процесс сокращения промежуточных звеньев рассуждения. При желании Гиля может развернуть процесс рассуждения до полной, с его точки зрения, структуры.

Приведем пример. Гиле дана задача: «Отцу 35 лет, а сыну 2 года. Через сколько лет отец будет вчетверо старше сына?» Он решает ее так: «Старше на 33 года, значит, одна часть бу-

дет 11, а сыну надо еще 9 лет. Через 9 лет». А вот так он развертывает по просьбе экспериментатора это решение: «Если отцу 35 лет, а сыну 2 года, то отец старше сына на 33 года. Через сколько-то лет отец будет в 4 раза старше сына, но по-прежнему на 33 года. Тогда возраст отца будет составлять 4 части, а возраст сына 1 часть, а разница между ними 3 части. Эти 3 части равняются 33 годам. Значит, одна часть равна $33:3=11$. Эта одна часть и есть возраст сына. Сейчас ему два года. Через 9 лет отцу будет 44, а сыну 11 лет».

Кстати, Володя Л. решил эту же задачу графически (см. рис. 54), не рассуждая (он в это время рассказывал мне вслух о химических реакциях).

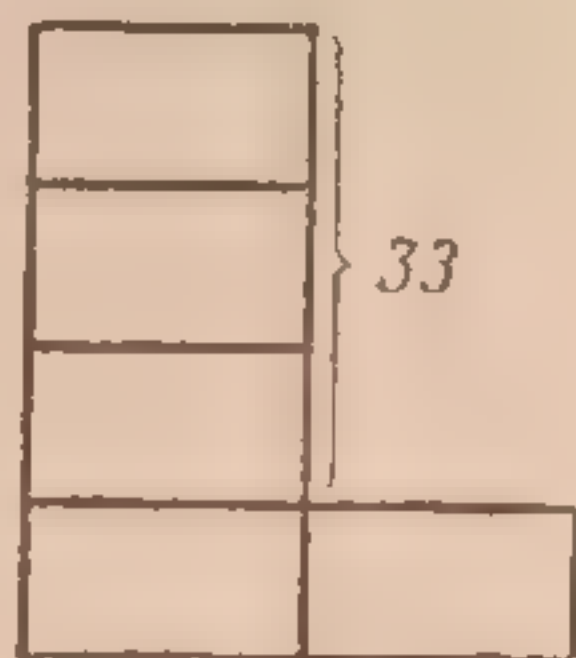


Рис. 54

Решая задачу «Поезд проходит тоннель длиной 450 м за $\frac{3}{4}$ мин., а мимо стрелочника про-

ходит за 15 сек. Какова длина поезда и скорость его?», Гиля без всякой опоры на наглядные образы (Володя Л. при этом повел «поезд» — карандаш через лист бумаги — «мост») разобрался в самом трудном моменте задачи — уяснил, что «пройти тоннель — это значит пройти его длину плюс длину поезда», что «расстояние, равное своей длине, он проходит за 15 сек.». Вот его решение (свернутое) этой задачи: «Пройти тоннель — это значит пройти его длину плюс длину поезда. Свою длину он проходит за 15 сек.: $450:30=15$ м/сек = 54 км в час. $15 \times 15 = 225$ м».

Ира С. (рожд. 1952 г., г. Курск) ¹.

Ира в 1965 г. окончила V класс. Ни отец, ни мать математического образования не имеют. Отец по специальности философ, доцент. Ее бабушка (по матери) считалась в свое время в гимназии очень способной ученицей по математике. Дядя Иры — крупный инженер, проявляющий интерес и известные способности к математике.

В школе Ира одинаково хорошо успевает по всем предметам. С домашними заданиями справляется очень быстро, даже незаметно, когда же она, собственно, делает уроки. Ира учится в музыкальной школе и спортшколе. К музыке относится без особого энтузиазма, но спорт очень любит. В школе Ира — активная общественница, председатель совета отряда. Она любит рисовать, пробует писать стихи, охотно читает.

Интерес к счету, к количественной оценке окружающих явлений (сколько прошло трамваев, какие у них номера, сколько окон в доме) появился у Иры в возрасте 5 лет. В школе уже в

¹ Эксперименты с Ирой и наблюдения над ней проводил по нашей просьбе С. И. Шапиро в 1964—1965 гг.

первых классах учительница обратила внимание на то, что Ира очень быстро решает задачи, опережая в этом отношении других учеников. Поэтому она получала на уроках арифметики индивидуальные задания — большее количество задач в основном повышенной трудности. Одно время Ира страдала головными болями, и учительница стала опасаться, не скажутся ли напряженные занятия на здоровье девочки. Но даже и в это время Ира субъективно не чувствовала никакой усталости от решения задач и очень охотно занималась этим делом. Со временем головные боли прошли. Интерес к математике у Иры укреплялся с каждым годом, хотя ее математическим образованием никто в семье специально не занимался. Математику она любит «за то, что думать надо. Это не то, что русский язык, где все делается по правилам». На возражение экспериментатора, что в математике тоже правила, ответила: «В математике правила помогают думать».

Ира охотно приняла участие в экспериментах. Интересно, что после напряженных двухчасовых занятий по решению задач она выглядела так же бодро и свежо, как и до начала работы, и, не отдохнув, приступала к выполнению домашних заданий.

Ира обладает хорошей памятью на математический материал. Через неделю после первого экспериментального занятия она вспомнила почти все 12 задач, которые решались ею на этом занятии. В большинстве случаев она помнит не только обобщенное содержание, но и числовые данные, быстро забывая отдельные «предметные детали». Кроме этого, она лучше помнит задачи, при решении которых испытывала затруднения.

С экспериментальными задачами Ира справлялась довольно легко. Например, из предложенных ей на первом занятии 12 задач 10 она решила сразу и лишь над двумя ей пришлось потрудиться. Однако с более сложными задачами она справлялась не столь успешно, здесь пужен был иногда намек, общее указание со стороны экспериментатора. Например, Ира решает задачу: «Если на каждую скамью посадить по 5 учеников, то четверо останутся без места. Если посадить по 6 учеников, то 2 места будут свободны. Сколько было скамеек и учеников?» Сначала ей не удается «схватить» основное отношение. Экспериментатор говорит: «Скольким ученикам негде сесть?» — и Ира сейчас же радостно подхватывает: «Поняла! Их посадили по одному на парту и еще можно было по одному двух посадить. Было 6 скамеек».

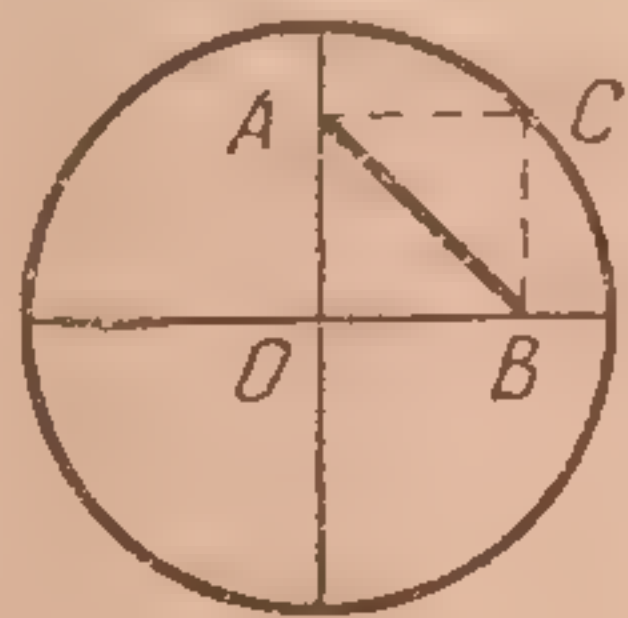
Яркая отличительная особенность Иры: если она решила задачу, то уже без труда решает все задачи данного типа. Первую же задачу она решает как типовую, самостоятельно находит алгоритм решения и свободно осуществляет перенос на другие

задачи этого же типа. При этом Ира удивительно легко, дифференцирует задачи. Ни внешнее предметное сходство, ни близость данной задачи к предшествующей не дезориентируют ее. Во всех случаях она ориентируется только на логико-математическую сторону задачи.

Ира демонстрирует способность рассуждать при решении даже таких задач, которые школьники ее возраста обычно решают перебором чисел. Типичная задача такого рода: «Имеются сосуды в 9 и 4 л. Как с их помощью отмерить 6 л воды?» Решение Иры: «6 л получится, если удастся от 9 отлить 3 л. Но для этого надо, чтобы в меньшем сосуде уже был 1 л. Теперь ясно: из большого сосуда надо отлить два раза по четыре литра и оставшийся литр перелить в меньший сосуд».

Решение Ирой задач XXIII и XXIV серий показало, что в ее мыслительном процессе при решении математических задач преобладает словесно-логический компонент. Указанные задачи она решала без опоры на наглядные схемы и образы, даже тогда, когда условие задачи наталкивало на использование наглядных средств. Например,

ей была предложена задача (см. рис. 55), которая решается очень просто, стоит только провести радиус OC . Ира же долго пыталась решить задачу аналитическим путем, пробуя разные варианты расположения линии AB (при которых точка C оказывалась то внутри круга, то вне его) и пытаясь «нащупать» определенную закономерность. В конце концов, она решила эту задачу, когда экспериментатор посоветовал ей провести радиус OC .



$$R=2$$

$$AC \parallel OB$$

$$BC \parallel OA$$

Найти AB

Рис. 55.

По просьбе экспериментатора она в отдельных случаях могла продемонстрировать и наглядно-образный путь решения (но только по отношению к более легким задачам и действовала при этом с меньшей уверенностью). Порой Ира прибегает к наглядным образам, когда она испытывает затруднения в решении задачи. Но характерно, что они в этом случае не очень помогают, и если задача ею не решена в «мыслительном плане», то не помогает и «образный план». Иначе говоря, наличие аналитического решения без особого труда приводит к образованию соответствующей наглядной интерпретации, но отсутствие аналитического решения не компенсируется наглядными средствами. Приведем пример. Ире было предложено наглядно, схематически решить задачу: «В 4 ящиках лежит по одинаковому количеству чая. Из каждого извлекли по 9 кг чая, после чего во всех ящиках осталось столько, сколько было раньше в каждом.

Сколько чая было в ящиках?» Несмотря на все попытки, Ире не удалось таким путем решить задачу. После этого ей предложили решить эту задачу размышлением, не опираясь на наглядные схемы. Ира решила задачу сразу. Тогда ее попросили дать интерпретацию задач наглядно-образными средствами. На этот раз Ира легко справилась с этим.

Дима Л. (рожд. 1956 г., Москва) ¹.

В 1965/66 учебном году Дима учился в III классе. Его отец — кандидат экономических наук, преподает в вузе. Мать — инженер-радиотехник.

С самого раннего детства Дима был очень впечатлительным, не по годам вдумчивым мальчиком. Однажды, когда Диме было три года, произошел такой случай. Он сидел молча на диване и сосредоточенно смотрел в одну точку. К нему с каким-то вопросом обратилась мама, и вдруг Дима заплакал и сквозь слезы произнес: «Мама, зачем ты меня отвлекла от дум». (Все это он произнес картавя, так как говорил еще довольно плохо.) Когда Диме было три с половиной года, он знал уже все буквы и начал понемногу читать, с четырех лет читал про себя. Никто дома специально его читать не учил, буквы он выучил сам, спрашивая у родителей: «А это какая буква? А какое это слово? Как это читается?»

Диме с самого раннего возраста свойственно задумываться над тем, что он видит и слышит. Дошкольники вообще часто задают вопрос «почему?» и обычно легко удовлетворяются любыми ответами взрослых. Дима же не переставал задавать этот вопрос до тех пор, пока ему не становилось действительно понятным данное явление.

Цифры до 100 Дима знал с четырехлетнего возраста, причем никто его цифрам специально не учил. Примерно с пяти лет началось его увлечение счетом. Он считал везде: дома, на улице, в гостях. Как-то летом, когда Диме было около пяти лет, его родители сняли дачу под Москвой. Однажды он разговаривал с хозяйкой и спросил, в каком году она родилась. Когда та ответила, Дима тут же сказал: «А вы на 13 с половиной лет старше моей мамы». Он очень любил составлять задачи и решать их. Задачи были самого различного содержания. Например: «В каком году моя прабабушка пошла во второй класс?» Дима знал только возраст прабабушки, он вычислил год ее рождения и решил свою задачу. Вычислительные способности его формировались очень заметно.

В детский сад Дима пошел шести лет. Воспитательницы всех групп пришли посмотреть на этого удивительного мальчика и развлекались, спрашивая его: «Димочка, сколько будет:

¹ Материалы получены совместно с И. В. Дубровиной.

279+567; 438 — 279? И т. п.» На свои вопросы они тут же получали правильные ответы.

Родителей пугало быстрое развитие сына. (Мать как-то выразилась: «Я хотела бы, чтобы он был более примитивный».) Они пытались задержать его развитие. Как-то около двух месяцев они не отвечали ни на один его вопрос, связанный с познанием какого-нибудь предмета, явления, пытались не давать ему читать «неподходящие» книги, но этим они не могли остановить развитие мальчика, он стал еще больше читать, пытаясь найти ответы на свои вопросы в книгах, несмотря на помехи со стороны старших.

В I класс Дима пошел семи лет. Знакомые советовали отдать его сразу во II класс, но родители не сделали этого по двум причинам. Во-первых, Дима не умел писать — никто этому его не учил. Во-вторых, родителям хотелось, чтобы сын их учился с детьми одинакового с ним возраста.

К первому сентября Диме сделали подарок — купили «Электроконструктор», предназначенный для учащихся седьмых классов, познакомившихся уже с физикой, основами электротехники. В инструкции было сказано, что из этих деталей можно собрать 100 различных моделей, и были приведены краткие их описания. Дима совершенно самостоятельно в течение месяца собрал все 100 моделей и еще 20, нигде не указанных. После этого «Конструктор» уже не представлял для него никакого интереса, и он его забросил.

Школу Дима воспринял равнодушно. Он понимает, что в школу надо ходить, и ходит, выполняя добросовестно свои обязанности, но интереса ко всему этому не проявляет. Он бывает очень рад, когда из-за болезни его оставляют дома и он целый день может заниматься тем, что ему нравится. Увлечение Димы другими предметами носило своеобразный характер. Так, в географии его интересовала сравнительная высота гор, сравнительная длина рек. Заинтересовавшись в семилетнем возрасте основами астрономии, он тщательно сравнивал расстояние от Земли до других планет.

У Димы широкий круг интересов. Он с увлечением изучает жизнь животных, растений, интересуется химией, физикой, очень любит математику. Самостоятельно в семилетнем возрасте познакомился с математическим понятием степени. Журнал «Наука и жизнь» читает регулярно и очень многое понимает, из газет предпочитает «Экономическую газету», которую выписывает отец. Дима много читает. Среди любимых книг много научно-популярных книг по математике. Из художественной литературы он любит фантастику. Родители пытались пробудить у него интерес к произведениям Гоголя, Пушкина, Чехова, но Дима остался к этим книгам равнодушен. Диму невозможно убедить в том, что та или иная книга интересная или неинтересная.

Он читает ее сам, и у него складывается самостоятельное суждение о книге. В доме очень много книг. Дима теперь сам выбирает себе книги для чтения.

Родители хотели развить в Диме любовь к музыке, водили его в консерваторию на детские концерты, но на Диму это не произвело никакого впечатления, он сказал, что музыку он не понимает и всем этим концертам предпочитает учебник по математике или механике. Музыкальных способностей у него совершенно нет — на слух он не может воспроизвести ни одной мелодии.

Родные отмечают, что у Димы тяжелый характер, он самолюбив, упрям, обидчив. У него нет друзей, общих интересов с другими детьми. К школьным товарищам он равнодушен. Он молчалив, чаще всего углублен в себя. Очень рассеян. Он может не помнить, обедал ли он сегодня или нет. Когда он идет на улицу, ему приходится напоминать, что нужно надеть шапку, шарф или еще что-нибудь. В то же время в голове у него множество всевозможных сведений, формул, доказательств, которые он никогда не забывает, не путает, сопоставляет друг с другом. Даже желая отдохнуть, Дима чертит сложные электросхемы, решает математические задачи.

Все рассуждения Димы, о чем бы они ни были, удивительно логичны. Вот, например, его ответ на вопрос экспериментатора, правилось ли ему в кружке «Умелые руки», куда он ходил в прошлом году. «Нет, мне не понравилось в этом кружке, неинтересно. Мы делали фигурки из пластилина, картона, а раскрашивали их какие-то другие ребята. Поэтому для нас занятия были бессмысленными — ведь мы не видели, что получается в результате».

Иногда Дима выходит из состояния постоянной задумчивости и превращается в обычного мальчика, например принимает живейшее участие в играх своего младшего брата (брат его — обычный ребенок, шмысленный, веселый, общительный, ничем особенно не выделяющийся. Словом, по мнению родителей, полная противоположность Диме).

Все задания, предложенные экспериментатором, Дима решал очень быстро.

Ему было дано такое задание: «Догадайся, по какому правилу составлены равенства. По найденному правилу составь сам еще одно такое же равенство: $12 \times 42 = 21 \times 24$; $13 \times 62 = 31 \times 26$ ». Дима быстро ответил: «Правило основано на том, что обращаются числа: обращаются и сами числа, и сумма чисел одной половины равенства». Он тут же быстро проверил правильность найденной закономерности и написал: $14 \times 82 = 41 \times 28$.

Все задания на обобщение математического материала по методике И. В. Дубровиной, рассчитанной на учащихся

III—IV классов, были выполнены им буквально за считанные секунды каждое и совершенно правильно. Математический материал он обобщает «с места».

При выполнении заданий на обобщение нематематического материала он тратит гораздо больше времени и выполняет их не всегда на высшем уровне.

Леня К. (рожд. 1957 г., Москва) ¹.

Отец Лени — кандидат физико-математических наук. Мать — учительница русского языка и литературы.

В возрасте пяти лет Леня самостоятельно научился читать. Специально его этому не учили. Он спрашивал у взрослых, как произносить отдельные буквы и вдруг как-то неожиданно для окружающих начал читать. К этому же времени Леня узнал цифры и начал понемногу считать. С шестилетнего возраста наблюдается его увлечение счетом. Он буквально замучил всех домашних, требуя, чтобы ему давали задачи для решения. Стал придумывать задачи и сам. Придумывал и решал везде: во время прогулки, за обедом. («Сегодня, когда в детском саду шли гулять, быстро оделись 15 человек. Сколько человек оделось не быстро? В группе 23 человека».)

Придя к нам на эксперимент (ему было тогда 6 лет и 2 месяца), он придумал задачу: «Бревно 16 м пилят на части. Сколько получится частей, если пилят на куски по 3, или по 2, или по 6, или по 1 м?» И тут же сам решил задачу во всех вариантах.

К семи годам Леня умел писать, считать и читать.

Семилетний Леня был очень подвижным мальчиком. Он не мог спокойно посидеть и пяти минут, вставал, бегал по комнате, вертелся, прыгал. Так же вертясь и непрерывно двигаясь, он решал задачи. Впечатление было такое, что ему это помогает. Его мать как-то в шутку заметила: «Я думаю, что если его связать, то он не сумеет решить ни одной задачи!» Леня — человек настроения. Однажды, когда ему было 7 лет, он пришел к нам на эксперимент и заявил: «Чувствую, что буду сегодня хорошо считать!»

За год Леня очень повзрослел, стал спокойнее, вежливее, выдержаннее. Его отдали сразу во II класс, так как в I классе ему, по мнению родителей, нечего было делать. Леня с трудом привыкал к школьному режиму, дисциплине. Но к середине учебного года Леня вполне освоился с новой обстановкой, у него появились друзья, в школу стал ходить с удовольствием. В III классе Леня совсем «остепенился», стал серьезнее, вдумчивее, но некоторая непоседливость, рассеянность остались у него и сейчас, что иногда мешает ему в работе.

¹ Материалы получены совместно с Н. В. Дубровиной.

Помимо школьных занятий, Леня три раза в неделю занимается музыкой. Музыку очень любит, занимается ею с удовольствием.

Читает довольно много, в основном детскую литературу, которую ему рекомендуют. Арифметику он любит больше других предметов, с удовольствием решает задачи. Пока он довольствуется различными задачами (занимательными, на сообразительность) в пределах курса арифметики начальных классов. В решении этих задач он проявляет явные способности. В задачах быстро «схватывает» их суть, основные отношения данных там величин. Задачи с недостающими или излишними данными не представляют для него труда. Он тут же обнаруживает, каких данных не хватает или какие данные лишние.

Девятилетний Леня хорошо справляется с обобщением математического материала в пределах программы III—IV классов. В одном из экспериментов, решив одну задачу, Леня должен был выбрать из ряда предложенных ему задач задачи, похожие на первую. Леня сказал: «Подобрать похожие задачи, — значит, такие, которые одинаково решаются». Быстро и правильно справился с заданием, объяснил, что и почему он сделал.

Ему было предложено вывести правило, исходя из следующих примеров: «Догадайся, по какому правилу составлены равенства. По найденному правилу составь еще одно такое равенство: $12 \times 42 = 21 \times 24$; $13 \times 62 = 31 \times 26$ ». Леня: «Тут перестановка цифр. Сумма чисел первой половины — 54, а второй половины — 45, значит, тоже перестановка. Понятно. Можно еще такое равенство придумать: $14 \times 82 = 41 \times 28$. Цифры переставлены. Сумма чисел первой половины — 96, а второй, наоборот, 69».

Еще одно задание на обобщение. Лене дается ряд отрезков (вырезанные из картона узкие полосы) различной длины, которая (в см) четко на них обозначена. Надо вывести правило, из каких отрезков можно построить треугольник. Леня после первых же проб сделал заключение: «Нужно, значит, чтобы две другие стороны были вместе больше, чем одна, а то ничего не получится».

Леня хорошо удерживает в памяти схемы решения задач, их типовые признаки, конкретные же данные быстро забывает. Например, в возрасте восьми лет он решал задачу: «Кирпич весит один килограмм и полкирпича. Сколько весит кирпич?» Леня самостоятельно эту задачу не решил, потребовалась помощь экспериментатора. Через 4 месяца ему была предложена такая задача: «Книга стоит 1 руб. и еще половину своей стоимости. Сколько стоит книга?» Вот его ответ: «И еще полкниги... значит, полкниги стоит 1 руб., вся книга стоит 2 руб. Я уже когда-то решал такие задачи... Была тоже половина, а нужно узнать было целое, забыл только про что».

Эта же способность Лени схватывать и удерживать в памяти самое существенное в задаче проявляется и при восприятии задач со сложным для запоминания условием. После одного прочтения он обычно запоминает все существенные отношения в задаче.

Леня любит искать различные пути решения одной и той же задачи и делает это по собственной инициативе.

Прекрасно обобщая арифметический материал, Леня проявил полную беспомощность при обобщении нематематического материала. Ему были даны картинки с изображением животных (диких и домашних), птиц (диких и домашних), рыб. Он должен был классифицировать их — разделить на группы. Сделал он это таким образом:

1. Все птицы. У них почти одинаковые клювы, оперение.
2. Медведь, кошка, собака, волк — это все животные. Шерсть у них одинаковая. Очень похожи они.
3. Лошадь с жеребенком. Это, наверное, мать со своим ребеночком.
4. Корова, козы — это все с рогами.
5. Рыбы.
6. Еж. Он колется, а больше никто не колется.

Как видно, Леня здесь обобщает по внешним, случайным признакам (хотя соответствующие знания у него имелись). Экспериментатор разъяснил ему его ошибки. Но следующее задание — такого же рода — он вновь выполнил на низком уровне.

Саша Л. (рожд. 1955 г., Москва. Характеристика составлена в 1965 г.).

В семье Саши никто не проявляет математических способностей. Отец и мать его — журналисты. У сестры (старше его на 18 лет), по отзывам родителей, «самое слабое место — математика». По профессии она — филолог. Дед Саши (по матери) был хорошим математиком. Математикой увлекался и отец в юношеском возрасте. С раннего возраста у Саши проявилась страсть к цифрам и числам. Когда ему было 2 года, он уже умел считать до 50 (у отца было 50 томов энциклопедии). В $2\frac{1}{2}$ — 3 года считал до 100 и обратно. В эти же годы он охотно играл в лото и никогда при этом не путал цифры и числа. Любил и другие настольные игры с числами.

Наблюдать Сашу мы стали с шестилетнего возраста. Это был очень подвижный мальчик с живыми глазами. Он оказался очень общительным и любознательным (сразу забросал вопросами: «Это что? А это зачем?»). При решении задач сосредоточенности внешне не обнаруживает, вертится, производит много хаотических движений.

В возрасте шести лет Саша хорошо читал, умел писать, занимался бесконечными упражнениями на сложение и вычитание

многозначных чисел (проделывая это с равным успехом и устно, и письменно). В этом же возрасте по собственной инициативе и самостоятельно начал изучать таблицу умножения («Сколько будет 5 сложить 7 раз? Это будет пять раз по 5—25, да еще две пятерки — будет 35»). Тогда же он начал делать первые самостоятельные обобщения в арифметике («Пожалуй, деление — это действие на обратное умножение»), разобрался в понятии отрицательных чисел. В 6 лет Саша свободно, без затруднений решал, например, такие задачи: «На севере нашей страны 12° мороза, в то же время на крайнем юге на 41° теплее. Какова температура на юге?»

Дробей Саша к этому времени еще не знал, но на первых же экспериментальных занятиях удивительно легко овладел самим понятием дроби и самостоятельно додумался до того, что «если знаменатель больше, то дробь меньше... Это потому, что делим на больше частей и части получаются поэтому мельче». Через год Саша сам додумался до того, как складывать простые дроби — находил общий знаменатель, делил его на данный знаменатель и... запутался в своем «открытии».

Родители, по их словам, «всегда побаивались преждевременного развития Саши и старались его притормаживать».

В возрасте $6-6\frac{1}{2}$ лет Саша очень полюбил шахматы. По всем данным, главный интерес для него представлял сам процесс игры, а чем она кончалась — победой или поражением, было не столь важно. Пробовал составлять простые шахматные задачи.

Примерно к семилетнему возрасту у Саши уже довольно отчетливо стали проявляться элементарные формы математической направленности ума. Свободное время он тратил на решение примеров и задач. В географии, которой он заинтересовался чуть позже, его тоже привлекали цифры — сравнительная длина рек, население городов; его очень заинтересовал масштаб — он без конца что-то измерял, вычислял, чертил карты, самостоятельно составил календарь на 5 лет вперед. Когда он некоторое время болел и ему не давали в руки задачник, Саша «от нечего делать» запомнил расписание пригородных поездов, отправляющихся с Киевского вокзала. От подобного рода занятий он устает очень мало.

Читать Саша не любил, к музыке способностей не обнаружил. Интересовался техникой, филателией, увлекался, как все мальчишки, футболом, хоккеем, немного позже стал интересоваться и политикой. В I класс Саша поступил $6\frac{1}{2}$ лет, причем начал учиться в конце учебного года (родители решили отдать его сразу во II класс, а в I «посадили» для того, чтобы он привык к школе).

В классе
много товари
щам. «Посади
предмету ст
Восьмиле
шал экспери
тую способн
тей решения
«Банка с кер
юся в ней ке
весить $4\frac{1}{2}$ к

половину кер

с половиной

а банка, зна

за 30 сек. На

рить, правил

но: «А зачем

Задачу «На д

и 94 ноги. С

режюгие и д

то было бы 7

и будет 12 ч

так решить:

140 ног, а но

по сравнению

23 кролика».

этих примера

тиванию пр

ствий.

Словесно

димому, пре

предложенн

разных сред

на это. Нап

меняются ме

хотя ему пр

нужно. (Воп

будут пок

«Значит, ма

будет време

кая — на 8?

показывали

большая сто

цифры. Есл

чуть-чуть м

В школе Саша быстро вошел в коллектив, у него появилось много товарищей. По арифметике он охотно помогал отстающим, «подтянул» по арифметике плохо успевающую по этому предмету одноклассницу.

Восьмилетний Саша, будучи учеником III класса, легко решал экспериментальные задачи, обнаруживая при этом развитую способность рассуждать и стремление найти несколько путей решения одной и той же задачи. Ему была дана задача: «Банка с керосином весит 8 кг. Из нее отлили половину имеющегося в ней керосина, после чего банка с остатком керосина стала весить $4\frac{1}{2}$ кг. Каков вес банки?» Решает он ее так: «Отлили

половину керосина, а это оказалось... (пишет: $8 - 4\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$). Три

с половиной килограмма. Значит, всего керосина было 7 кг. Ну, а банка, значит, весит 1 кг». (Задача решена вместе с записью за 30 сек. На вопрос экспериментатора: «А не хочешь ли проверить, правильно ли решил задачу?» — Саша ответил недоуменно: «А зачем проверять, если я знаю, что правильно решил?») Задачу «На дворе бегают куры и кролики. У них у всех 35 голов и 94 ноги. Сколько тех и других?» Саша решал так: «Тут четырехногие и двуногие бегают... Если бы бегали только двуногие, то было бы 70 ног... Лишние 24 ноги — по две прибавим каждому и будет 12 четырехногих. 12 кроликов и 23 курицы. А можно и так решить: если бы все были кролики, то у 35 голов было бы 140 ног, а ног не хватает... не хватает 46 ног. У каждой курицы по сравнению с кроликом не хватает 2 ноги. Опять получается 23 кролика». (Оба варианта заняли около минуты.) Кстати, на этих примерах видно, что у Саши имеет место тенденция к свертыванию процесса решения и системы соответствующих действий.

Словесно-логические компоненты мышления у Саши, по-видимому, преобладают над наглядно-образными. Ни одну из предложенных ему задач он не решал с помощью наглядно-образных средств, даже тогда, когда условия задачи наталкивали на это. Например, все предложенные ему задачи типа «стрелки меняются местами» он быстро и уверенно решал рассуждением, хотя ему предложено было нарисовать циферблат, если это ему нужно. (Вопрос: «Часы показывают 3 часа 40 мин. Сколько они будут показывать, если стрелки поменять местами?» Ответ: «Значит, маленькая где-то между 3 и 4, а большая на 8. Сколько будет времени, если большая будет стоять между 3 и 4, а маленькая — на 8? Восемнадцать минут девятого». Вопрос: «А если часы показывали, примерно, 7 час. 35 мин.?» Ответ: «Это значит, что большая стояла около цифры 7, а маленькая ... тоже около этой цифры. Если поменять местами, будет столько же времени или чуть-чуть меньше».)

После окончания летом 1964 г. III класса девятилетний Саша стал понемногу, с помощью старших, заниматься алгеброй. Элементарные понятия алгебры он воспринимает легко.

Володя Х. (рожд. 1956 г., Крымская обл.)¹.

В 1966 г. в областной математической олимпиаде для восьмиклассников первое место занял Володя Х. — десятилетний мальчик, учащийся VI класса. Исключительные способности Володи стали проявляться уже тогда, когда ему было около 4 лет. Учился в школе Володя только 4 года (в I, III, V, VI классах). Участь в I классе, Володя был «всеобщим консультантом для учеников I—IV классов» (А. П. Тиняков). После окончания V класса Володя участвовал в летнем сборе школьников Крыма, проявляющих способности к математике, и с успехом работал в группе восьмиклассников.

Володя одарен не только в области математики. Он очень успешно занимается английским языком, прекрасно успевает по русскому языку. По всем предметам у него отличная успеваемость. Володя любит читать и много читает, занимается спортом, очень подвижен. У него очень скромная самооценка в отношении своих способностей, он не пытается выделиться из среды сверстников, даже застенчив. У Володи исключительно хорошая математическая память. Он очень хорошо помнит схемы рассуждений и если порой и забывает формулу, то всегда может очень быстро ее вывести снова.

Длительные наблюдения А. П. Тинякова и проведенные им с Володей эксперименты показали, что у Володи очень развита способность к обобщениям в области математики. Обычно он обобщает сразу, после анализа первого же явления в ряду сходных явлений. Задачи, как правило, стремится осознать и решать в общем виде. «Индивидуальные варианты в этом отношении его меньше интересуют» (А. П. Тиняков).

С типологической точки зрения Володя скорее «алгебраист», чем «геометр». Конкретная ситуация его часто сковывает. Почти никогда не пытается наглядно-схематически интерпретировать задачу (так как это, по-видимому, приковывает его к частным, конкретным случаям и отвлекает от общего). Многие геометрические задачи он пытается решить алгебраически.

Мышление Володи свободно от сковывающего влияния традиционных или шаблонных способов подхода к задаче. Он всегда готов отойти от сложившегося и закрепившегося способа действия, если этого требуют обстоятельства. Ему также свойственна потребность искать наиболее простой, ясный и убедительный путь к решению.

¹ Сведения о Володе Х. сообщил нам зав. учебной частью и учитель А. П. Тиняков.

А. П. Тиняков обращает внимание на такую характерную особенность Володи: быстрота мышления ему не очень свойственна. Он думает не очень быстро, но основательно. Не свойственны ему и упорные попытки решить задачу, которая ему «не дается». В этих случаях Володя предпочитает оставить задачу и не возвращаться к ней некоторое время, потом снова попробовать (попробовать другой путь решения) и снова оставить, если и на этот раз задача не поддается его усилиям.

Обращает на себя внимание способность Володи напряженно (по 4—5 час.) работать по математике, не испытывая усталости.

Наконец, должна быть отмечена и своеобразная склонность Володи обращать внимание на «математическую сторону» многих явлений окружающего мира, видеть их «математическими глазами».

Учителя Володи, и в первую очередь А. П. Тиняков, предполагают, что 13 лет он кончит школу и будет вполне готов к поступлению в вуз.

Боря Г. (рожд. 1954 г., г. Макеевка. Характеристика составлена в 1965 г.).

Интерес к арифметике и проявление способностей в этой области учителя и родители заметили у Бори, когда он учился во II классе. Боря мог быстро, в уме, решить любую задачу, рассчитанную на учеников II и III классов, а также многие задачи для IV класса. Не успевала учительница записать на доске условия задач двух вариантов контрольных работ, как Боря уже давал правильные ответы на все задачи. Надо отметить, что, правильно решая и более сложные задачи, Боря порой не мог удовлетворительно объяснить, как он рассуждал при этом.

В дальнейшем Боря очень увлекся решением задач. Даже в каникулы он ежедневно по 2—3 часа сидел над задачами и примерами. Решениями задач исписал много тетрадей: в некоторых случаях давал план решения и решение, в других — только решение, в третьих — указывал только ход решения. В III классе он освоил проценты, действия с простыми дробями.

Посоветовавшись с учителем, родители решили, что Боря может подготовить и сдать экзамены за IV класс, с тем чтобы из III класса перейти прямо в V. Меньше чем за месяц с помощью родителей Боря подготовил русский язык, литературное чтение и арифметику и сдал на «пятерки» экзамены по этим предметам.

В V классе Боря учился отлично, по-прежнему очень увлекался арифметикой, особенно замысловатыми задачами. При этом он всегда старался найти самый короткий и ясный путь решения. Иногда с этой целью находил максимальное количество способов решения задачи и сопоставлял их. Решение трудных задач вызывает у Бори необыкновенный подъем чувств, — он буквально прыгает от радости, поет, счастливо смеется. Если же

он сталкивается с трудностями, то ни в коем случае не соглашается принять помощь.

Очень интересно его стремление использовать наглядно-образные средства решения, «увидеть» данные в задаче отношения. Особенно это заметно при решении задач незнакомого ему типа. Ему дана, например, задача: «Тракторист за первый день обработал $\frac{8}{21}$ всей площади участка, за второй $\frac{7}{13}$ оставшейся площади, после чего осталось $26\frac{2}{3}$ га. За сколько часов выполнит он всю работу, если в среднем за час обрабатывает $2\frac{2}{5}$ га?» Вот ход его решения. В тетради выделил полосочку в 21 клетку. Отделив 8 клеток (часть поля, обработанную за первый день), он принял оставшиеся 13 клеток за новое число. После этого он отделил 7 клеток, что у него составило $\frac{7}{13}$ нового числа. Осталось 6 клеток (или $\frac{6}{13}$ нового числа), которые равны $26\frac{2}{3}$ га. Затем он сравнил по величине 21 и 6 клеток, разделив 21 на 6, и получил $3\frac{1}{2}$. В следующем действии он умножил $26\frac{2}{3}$ на $3\frac{1}{2}$ и получил искомую величину площади всего участка и т. д.

В V классе Боря начал проходить курс алгебры (и прошел ее за курс VI класса), с нетерпением ждал «встречи» с геометрией.

Увлекается он и английским языком, начал заниматься музыкой. Музыкальных способностей не проявляет, но занимается с очень большим желанием и упорством.

В 1965/66 учебном году Боря учился в VII классе. По-прежнему решение задач для него — настоящий праздник. Каким бы трудным ни был его рабочий день, все равно он даже в 11 час. вечера принимается за математику. В специальных толстых тетрадях он с завидной аккуратностью записывает решение трудных и особо трудных задач, очень часто предлагая при этом несколько вариантов решений. Решил очень много задач из «Математической шкатулки», из сборников конкурсных и олимпиадных задач. Сейчас стоит вопрос о переводе Бори в математическую школу-интернат.

Всего мы наблюдали 26 одаренных детей, но данные об остальных приводиться не будут, так как наблюдение за ними начато сравнительно недавно и эксперименты с ними еще не проводились.

Об одаренных к математике детях имеются сведения и в литературных источниках. В «Ученых записках Московского университета» за 1834 г. было помещено очень интересное сообщение об «отроке Иване Петрове» — сыне крестьянина Костром-

ской губернии, мальчике, не умеющем ни читать, ни писать, но решающем в уме довольно сложные арифметические задачи [74]. Мальчика, разумеется, никто не обучал, да и не мог обучать в глухой костромской деревне 130 лет назад. По заявлению специалистов, заинтересовавшихся крестьянином-самородком, он за 1 час 17 мин. в уме правильно решил 12 задач следующего типа и степени трудности: 1) $40\ 004 - 30\ 005$. 2) За определенный промежуток времени 12 человек истратили на свое содержание 136 руб. Сколько издержат в то же время 69 человек? 3) Сколькими способами можно уплатить 78 руб., если имеются денежные билеты только трехрублевого и пятирублевого достоинства? (Мальчик нашел все 6 способов.) К сожалению, о дальнейшей судьбе талантливого мальчика ничего не известно.

В 1917 г. С. Я. Рабинович и А. М. Шуберт опубликовали «Два случая математической одаренности у детей» [343], описав семилетнего Володю Зубрицкого и десятилетнего Сашу В. Математическое дарование Володи открылось совершенно случайно — его старший брат решал задачи, и пятилетний Володя указал ему ошибки. По его словам, он давно уже присматривался к цифрам, потому что они ему нравились. Вскоре Володя уже выступал в цирках как «чудо-ребенок», перемножая в уме трехзначные и пятизначные числа. Но кроме вычислительных способностей, у Володи, видимо, при правильном воспитании могло сформироваться и математическое мышление, — он сразу овладел понятием квадратного корня, понял, в чем дело, и стал свободно извлекать корни из трехзначных чисел¹.

Саша В. представлял собой еще более интересное явление. У него формировались уже подлинно творческие способности (конечно, в сравнительно элементарных формах). В частности, он проявлял склонность находить закономерности данных ему рядов чисел. По мнению специалистов, некоторые из открытых им эмпирическим способом закономерностей могли быть объяснены только с использованием высшей математики. Память у Саши была логической — он, например, запоминал длинные ряды чисел путем отыскания в них какой-либо закономерности.

Н. С. Лейтес описал мальчика Эрика Б., который в возрасте 6 лет выполнял арифметические действия с многозначными числами, а 7 лет овладел основами алгебры, решал уравнения [252], [254]. И все это имело место без специального систематического обучения и даже вопреки желанию родных, которых все это пугало. Эрик поступил в школу сразу во II класс. Десятилетним мальчиком ученик IV класса Эрик умел выражать очень

¹ В «Неделе» № 50 за 1966 г. были опубликованы дополнительные данные о способностях Володи З. и рассказано о его дальнейшей судьбе. Он стал моряком, участвовал в Великой Отечественной войне. Сейчас он капитан III ранга в отставке.

сложные зависимости уравнениями, знал логарифмы, корни, увлекался бесконечными вычислениями, составлением таблиц (по географии, астрономии). Утомления он при этом не испытывал.

В 1964 г. психологами ГДР был описан случай ранней математической одаренности [654]. На способности С. Райнера родители впервые обратили внимание, когда ему было 5 лет. Он вдруг начал очень интересоваться операциями с числами, узнав возраст родителей, сказал им: «Вам вместе 72 года».

И здесь родители не только не способствовали математическому развитию мальчика, но всемерно препятствовали этому, так как боялись возможных отрицательных последствий, вплоть до того, что насильно удаляли его из комнаты, где его старшая сестра готовила уроки по арифметике. Экспериментаторы особо отмечают способность и склонность Райнера к математическим обобщениям (разумеется, в пределах доступного ему материала) — найденный способ решения он очень легко переносит на другие задачи этого же типа.

Шестилетний Райнер поступил сразу во II класс школы. Испытывает большие трудности в изучении языка, орфографии, но с арифметикой дело обстоит очень хорошо.

В советской периодической печати также приводились интересные случаи ранней математической одаренности детей. Женя Гутников, Алеша Толпыго, Женя Левич проявляли ранние яркие способности уже в дошкольном возрасте, в 14 лет окончили школу и поступили в физико-математические вузы. Способный математик Саша Дворак в возрасте 9 лет учился в VII классе¹.

Материалы наблюдений и экспериментального изучения одаренных в области математики детей позволяют сделать некоторые выводы. Прежде всего, приходится констатировать, что математические способности могут складываться в очень раннем возрасте и по преимуществу в форме вычислительных способностей, способностей к операциям с числами. Конечно, вычислительные способности — это еще не есть собственно математические способности, но на этой базе часто формируются впоследствии подлинно математические способности — способность к рассуждению, самостоятельному овладению математическим материалом, к доказательству.

Необходимо отметить, что далеко не всегда раннее формирование математических способностей связано с какими-либо особыми благоприятными условиями среды и воспитания. В большинстве изученных нами случаев родители не только не создавали таких условий своим детям, но, наоборот, озабоченные или даже встревоженные ранним развитием своих детей они чинили им

¹ «Литературная газета» от 17 сентября 1960 г., «Учительская газета» от 9 января 1962 г., от 23 февраля 1963 г. и от 2 декабря 1965 г.

препятствия, противодействовали, отвлекали их внимание, в отдельных случаях даже наказывали. Важно отметить также, что воспитывающиеся в этих же условиях братья и сестры одаренных к математике школьников в подавляющем большинстве случаев не проявляли никаких математических способностей.

Раннее формирование способностей неразрывно связано с формированием интересов к арифметике и склонностей заниматься ею, которые зачастую принимают форму неудержимого стремления к вычислениям, решению и составлению задач, связанного с возможностью длительной напряженной работы без видимых признаков утомления.

Наблюдения учителей, эксперименты показали, что у одаренных к математике детей уже в сравнительно раннем возрасте формируются такие особенности их умственной деятельности, как способность к обобщению математического материала (способность усматривать общее во внешне различном, единичном), гибкость мыслительных процессов (способность быстро переключаться с одной операции на другую, с одного хода мысли на другой), стремление находить наиболее простые, ясные и экономные пути решения задач, способность запоминать по преимуществу обобщенные отношения, схемы рассуждений, способы решения типовых задач. У способных к математике детей уже в раннем возрасте можно наблюдать свертывание процесса рассуждения, сокращение отдельных его звеньев. Наконец, у очень способных к математике детей заметно формирование элементарных форм особого «математического» восприятия окружающего мира, когда многие факты и явления словно преломляются сквозь призму математических отношений.

Наблюдения и эксперименты показали также, что у способных к математике детей уже в раннем возрасте намечаются типологические различия в плане соотношения наглядно-образных и словесно-логических компонентов мыслительной деятельности при решении математических задач. Некоторые из них не нуждаются в опоре на наглядные образы, фигурально выражаясь, «логичность» заменяет им «образность». Другие явно нуждаются в наглядной интерпретации математических отношений, предпочитают решать задачи с применением наглядно-образных средств.

У некоторых изученных нами детей математические способности развиваются на фоне общей одаренности и в известной связи с нею. Другие математически одаренные дети не отличаются общей одаренностью — во всех иных отношениях эти дети самые обычные, ничем не отличающиеся от своих сверстников.

Глава III

ОСОБЕННОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ЗАДАЧЕ (ПЕРВИЧНОЙ ОРИЕНТИРОВКИ В НЕЙ) СПОСОБНЫМИ В МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКАМИ

Основной материал, как и предполагалось, дали первые три серии — задачи с несформулированным вопросом, задачи с недостающими данными (с неполной информацией) и задачи с излишними данными (с избыточной информацией). Основную группу испытуемых составили 18 способных к математике семиклассников, которые в начале обучения в VII классе были проведены через все тесты указанных серий. Они сравнивались с группой из 14 средних учеников и группой из 8 неспособных учеников, которые также были проведены через эти серии, но на протяжении более длительного времени (и притом некоторые испытуемые этих групп решали не все задачи этих серий). Кроме того, отдельные тесты указанных трех серий предъявлялись ученикам из группы очень способных (описанных в предыдущей главе).

Возникает вопрос: можно ли объяснить решение экспериментальных задач всех трех серий действием одного общего фактора? Наша гипотеза заключается в том, что показатели тестов I, II и III серий измеряют одно и то же явление, т. е. являются индикаторами одного и того же общего свойства умственной деятельности (которое мы попытаемся интерпретировать позже), что здесь, следовательно, проявляется один общий фактор.

Чтобы выяснить, справедливо ли наше предположение, полученные данные были подвергнуты факторному анализу. Для факторного анализа были выделены показатели 18 способных учащихся. Показателем было время решения всех задач каждой серии.

Факторизация была проведена на основе однофакторной модели Ч. Спирмена (по Харману) [410], [604].

Как отмечал Б. М. Теплов [410], факторную модель Спирмена целесообразно применять во всех случаях, где имеется гипотеза о том, что все тестовые экспериментальные показатели являются результатом действия одного и того же фактора, параметра, свойства и где надо выяснить, имеет ли место в действительности этот общий фактор.

Коэффициент корреляции ранговых мест 18 испытуемых между результатами серий (попарно) вычислялся по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)},$$

где ρ — коэффициент корреляции,
 d — разность ранговых мест по каждой паре результатов,
 n — число значений переменных (число испытуемых).

Указанной формулой пользуются, как известно, в случаях, когда:

1) число отдельных значений переменных не превышает 25—30 и 2) числовые показатели образуют ранговый ряд [см. 344, стр. 79—81].

Была получена следующая матрица интеркорреляций (см. табл. 5).

Таблица 5

Серия	I	II	III
I	—	0,64	0,72
II	0,64	—	0,67
III	0,72	0,67	—

Таким образом, успешность решения задач этих серий положительно коррелирует друг с другом.

При 18 испытуемых значения коэффициентов корреляции, значимых на уровне значимости $0,01=0,564$; на уровне значимости $0,05=0,399$ [см. 344, стр. 106—107]. Следовательно, полученные нами коэффициенты корреляции статистически значимы на уровне 0,01.

Факторизация на основе однофакторной модели Спирмена возможна при соблюдении следующих условий [410]:

- 1) наличие матрицы не менее чем 3-го порядка;
- 2) все коэффициенты корреляции положительны;
- 3) все коэффициенты корреляции статистически значимы.

Эти условия соблюдены. Факторизация была проведена по формуле Спирмена, математически строго разработанной Терстеном [410], [604, стр. 120—122]:

$$a_{kg} \sqrt{\frac{(r)^2_k - (r^2)_k}{(r)_t - 2(r)_k}},$$

где a_{kg} — факторный вес по общему фактору g для переменной k ,

$(r)_k$ — сумма всех коэффициентов корреляций в столбце k , кроме неизвестного элемента главной диагонали,

$(r)^2_k$ — квадрат этой суммы,

$(r^2)_k$ — сумма квадратов всех коэффициентов корреляции в столбце k , кроме неизвестного элемента главной диагонали,

$(r)_t$ — сумма всех коэффициентов корреляции в матрице, кроме неизвестных элементов главной диагонали.

Эту формулу рекомендует Б. М. Теплов [410], как относительно простую, не требующую сложной и недостаточно разработанной процедуры вращения осей.

В результате получена следующая факторная матрица (см. табл. 6).

Таблица 6

Показатели (серии)	Факторные веса по g
I	0,83
II	0,77
III	0,87

Как можно видеть, получены весьма высокие веса по общему фактору для всех трех серий.

Остается оценить точность и полноту (надежность) полученных факторных весов. Для этого вычисляем репродуцированные коэффициенты корреляции по формуле [410]:

$$r'_{jk} = a_{jg} \cdot a_{kg},$$

где r'_{jk} — репродуцированный коэффициент корреляции между показателями j и k ,

a_{jg} — факторный вес по общему фактору для показателя j ,

a_{kg} — факторный вес по общему фактору для показателя k .

После этого вычисляем остаточные коэффициенты корреляции по формуле: $\bar{r}_{jk} = r_{jk} - r'_{jk}$,

где r_{jk} — остаточный коэффициент корреляции,

r_{jk} — эмпирически полученный коэффициент корреляции,

r'_{jk} — репродуцированный коэффициент корреляции.

В нашем случае репродуцированная корреляционная матрица совпадает с исходной. Остаточные коэффициенты корреляции равны нулю.

Отмеченный факт совпадения репродуцированной корреляционной матрицы с исходной матрицей означает надежность полученных результатов. Итак, факторизация исходной матрицы интеркорреляций на основе однофакторной модели Спирмена вполне оправдана.

Все три серии имеют по общему фактору весьма высокие веса. Это значит, что успешность решения задач I, II и III серий — результат действия лишь одного общего фактора. Гипотетическое предположение оправдалось. Общий (единый) фактор для всех этих серий имеет место, и притом он довольно ясно выражен.

Но что это за фактор? Как его психологически интерпретировать? Для этого обратимся к качественному анализу процесса решения экспериментальных задач, что должно помочь нам дать психологическую характеристику выявленного фактора.

Известно, что в ряде случаев основные трудности в овладении тем или иным интеллектуальным умением или навыком лежат в сфере восприятия исходных данных, а не в сфере действий, которые должны следовать за этим восприятием.

Проведенное исследование дает основания говорить о существенных особенностях в характере восприятия¹ математического материала способными к математике школьниками.

Анализ решения учениками экспериментальных задач показал, что учащимся свойственна аналитико-синтетическая обработка математического материала, носящая характер аналитико-синтетического осмысливания материала задачи, которое предшествует ее решению. Естественно, что перед решением задачи необходимо понять ее, осмыслить, предварительно ориентироваться в ней, вычленить детали, и такую работу проделывают все ученики. Но у способных детей эта предварительная ориентировка в задаче представляет собой своеобразное явление.

Воспринимая математическую задачу, «охватывая» ее структуру, способные ученики систематизируют данные в задаче математические величины. Они четко дифференцируют, выделяют в ее структуре три качественно различных элемента:

а) комплексы показателей, существенных для данного типа задачи, находящихся между собой в функциональной зависимости и «очищенных» от конкретных значений (комплексы находящихся в определенных математических отношениях типовых признаков). По выражению С. И. Шапиро, способные учащиеся в первую очередь выделяют «те отношения в задаче, которые несут основную смысловую математическую нагрузку»;

б) величины, несущественные для данного типа задачи, но существенные для данного конкретного ее варианта;

в) лишние, несущественные, ненужные для решения данной конкретной задачи величины.

Первая группа величин характеризует задачи одного типа в отличие от задач других типов (а это обуславливает в дальнейшем общий способ действий), вторая группа характеризует данную конкретную задачу в отличие от других конкретных задач того же типа (а это обуславливает в дальнейшем конкретные действия). Выделение третьей группы величин имеет более важное значение, чем принято думать. Для решения задачи нужно уметь оценивать и отбрасывать ненужные данные, или, точнее, уметь выделять из массы величин те, которые нужны для решения задачи.

¹ Термин «восприятие» здесь и в дальнейшем употребляется нами не в функциональном значении (как психический процесс восприятия), а в смысле «ознакомления», «осмысливания», общей ориентировки в задаче. Скорее здесь более подходил бы термин «воспринимание».

Другими словами, способные учащиеся воспринимают математический материал задачи аналитически (выделяют различные элементы в ее структуре, дают им различную оценку, систематизируют их, определяют их «иерархию») и синтетически (объединяют их в комплексы, отыскивают математические отношения и функциональные зависимости), — как указывал С. Л. Рубинштейн, «синтезом является всякое соотнесение, сопоставление, всякое установление связи» [853, стр. 35]. Для того чтобы обобщать математические отношения, необходимо их прежде вычлениить. В этом смысле можно сказать, что способные к математике ученики воспринимают не только единичные элементы, а и своеобразные «смысловые математические структуры», комплексы взаимосвязанных, находящихся в функциональной зависимости математических величин и категорий. Каждый такой комплекс способный ученик воспринимает как составное целое. Во-первых, он воспринимает в этом комплексе отдельные элементы, каждый элемент как часть целого, а во-вторых, воспринимает эти элементы как взаимосвязанные и образующие целостную структуру, а также и роль каждого элемента в этой структуре. Таким образом, у способного ученика создается ясный целостно-расчлененный образ задачи. По-видимому, это и лежит в основе отличающего способных учеников умения «схватывать» задачу в целом, не теряя из виду всех ее данных.

Ученики со средними, обычными способностями к математике при восприятии задачи нового типа воспринимают, как правило, ее отдельные математические элементы. «Выход» за пределы восприятия одного элемента часто означает «потерю» его. Среднему ученику необходимо ставить специальную задачу на связывание математических элементов задачи, в процессе анализа и синтеза он находит эту связь. Что же касается неспособных, то подобные связи и соотношения между элементами задачи даже с посторонней помощью устанавливаются у них с большим трудом.

На то обстоятельство, что некоторым учащимся очень трудно дается осмысление связей между компонентами задачи, что они с трудом охватывают совокупность многообразных зависимостей, составляющих существо задачи, не отличают существенных признаков от несущественных, указывают многие исследователи, в частности З. И. Калмыкова [154], [155], [157], О. Г. Бочковская [56], В. И. Зыкова [132], [133], однако они не связывают этот вопрос с вопросом о различных способностях учащихся к обучению математике. Н. А. Менчинская отмечала, что слабым учащимся бывает трудно отвлечься от конкретного содержания задачи — за сюжетом задачи они не видят ее подлинного математического смысла [289], [291].

Хорошо показал все изложенное выше процесс решения учащимися первых трех серий задач. Рассмотрим «задачи без во-

проса» и «задачи с недостающими данными». И в том и в другом случае отсутствовал один из элементов комплекса величин, находящихся в функциональной зависимости (так были построены задачи). Способные ученики точно указывали на вопрос или на недостающие данные, а это означало, что они воспринимают весь комплекс данных, структуру задачи и осознают, что недостает того или иного его элемента. Если не видеть комплекса, то нельзя видеть и вопроса, нельзя указать на недостающие данные. Равным образом не затрудняло способных учеников и наличие излишних, избыточных данных в задаче. Уверенно выделяя комплекс взаимосвязанных величин, составляющих «костяк» задачи, они просто не обращали внимания на ненужные данные, находящиеся вне этого комплекса.

Совсем иное — средние и, особенно, неспособные ученики.

Эксперименты показывают, что средние ученики воспринимают в задаче нового типа (а неспособные — вообще во всех задачах) на первых порах лишь разрозненные данные, что они поначалу «прикованы» к конкретным данным. В связи с этим средние ученики в большинстве случаев (а неспособные — почти всегда) не воспринимали, не чувствовали в задаче скрытого вопроса. Поэтому также и «маскировка» задачи ненужными для ее решения данными очень затрудняла их решение («Все время ломаю голову, как использовать все, что дано!»). Именно поэтому, наконец, они в большинстве случаев затруднялись указать, какие данные «пропущены» в условии задачи, чего недостает для решения ее.

Что касается излишних данных, то порой удивительно было наблюдать, как запутывали неспособных учащихся эти данные, введенные в текст даже самых простых задач. Все конкретные величины (и существенные для типа, и существенные для конкретного варианта, и несущественные) воспринимались неспособными учащимися рядоположенно, учащиеся не могли дать им сравнительную оценку, установить их «нерархию» и на этом основании отделить то, что нужно, от того, что не нужно для решения задач.

Указанные слабости мышления неспособных к математике учащихся особенно сказывались на решении таких задач, которые требовали умения «схватить» задачу в целом, во всех взаимосвязях ее элементов, например задач типа: «Разложить на множители выражение $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$ ». Воспринять данное выражение как развернутый куб суммы двух чисел они не могли, так как рассматривали каждый член изолированно, вне связи с другими. Если в отдельных случаях им удавалось правильно решить такую задачу, то они делали это «незаконно», ориентируясь лишь на первый и последний члены (что легко обнаруживалось, когда вслед за этим давался пример: $8y^3 + 8y^2 + 8y + 1$, буквально все они решали и его по той же формуле).

Сводные данные по сериям будут приведены ниже, а сейчас проиллюстрируем сказанное примерами из протоколов решения экспериментальных задач.

Дана задача: «На двух складах вместе 420 м^3 дров. На одном из них $x \text{ м}^3$ ». Способный ученик Г. Х., не останавливаясь, немедленно продолжает: «А на другом $(420 - x) \text{ м}^3$ ». Эксп.: «Постой, а разве тебе было дано какое-нибудь задание?» Ученик: «Да я ничего и не делал, имеются три величины: 420 , x и $420 - x$. Две имеются, а третья как-то сама собой записалась».

Способная ученица С. Л. решает задачу: «Расстояние между городами 225 км . Из них одновременно вышли 2 поезда: скорый (50 км в час) и товарный (40 км в час). Когда они поравняются?» Выслушав ее, сейчас же спрашивает: «А они навстречу идут или быстрый догоняет медленного?» Эксп.: «А зачем тебе это знать?» Ученица: «Ну, а как же: это задача на путь, скорость и время. Путь есть, время спрашивают, а скорости-то нет!» Эксп.: «Как же нет? А вот: 50 и 40 км в час . Даже целых две скорости». Ученица: «Относительной скорости тут нет. Ведь если навстречу — надо складывать, если догоняет — вычитать».

Еще пример. Способный ученик В. Л. решает задачу: «Сколько сейчас времени, если до конца суток осталось $\frac{4}{5}$ того, что уже протекло от начала суток, но прошло более половины суток?» Ученик: «Ну, это легкая задача. Только не знаю, зачем тут конец. Это совсем лишнее». Эксп.: «Почему лишнее?» Ученик: «Потому что и без этого узнать можно». Эксп.: «Поясни». Ученик: «Здесь основное — это целое и части его, которые находятся в каком-то отношении. Сейчас отношение $1 : \frac{4}{5}$. А целое — 24 часа. Части можно найти. А для чего конец? Это лишнее».

Описанная выше оценка и систематизация данных при восприятии задачи постоянно наблюдались нами в процессе решения способными учениками задач всех соответствующих серий.

Аналогичные результаты дает и решение способными учениками задач на применение формулы сокращенного умножения $(a+b)^2$. Они легко выделяли существенные для данного типа моменты (сумма двух алгебраических выражений в квадрате), равно как и несущественные для данного типа (но существенные для данной задачи!) моменты (конкретная величина и характер алгебраических выражений, составляющих число a и число b). Другими словами, имела место своеобразная формализация структуры задачи при ее восприятии, когда задача (например, $(6a^x + \frac{1}{2}b^y)^2$ «схватывалась» в такой форме: $(\square + \square)^2 =$). Неспособные же узкоограниченно представляли себе «первое» и «второе» число в этой формуле, им было трудно понять, что a и b

обозначают любую величину и любое алгебраическое выражение. Поэтому они и не улавливали самостоятельно структурного «костяка» задачи.

Малоспособный к математике ученик VI класса В. К. долго и, разумеется, безуспешно пытался решить задачу: «Банка с медом весит 500 г, та же банка с керосином 350 г. Сколько весит пустая банка?» Он так и не сумел указать на недостающее в задаче звено, причем упорно «уходил» от попыток экспериментатора «натолкнуть» его на вопрос об отношениях данных величин. Даже когда ему «ввели» это звено («мед вдвое тяжелее керосина»), он долго не мог понять, в чем дело. А эту же задачу способный к математике ученик III класса В. Л. решал так. Прослушав условие, он вопросительно посмотрел на экспериментатора и спросил: «А дальше?» Эксп.: «Задача вся». Ученик: «Нет, это не вся. Надо знать еще, на сколько мед тяжелее керосина». Эксп.: «А зачем это знать?» Ученик: «Ну, а без этого будет много решений. Имеются 2 неравные величины, связанные тем обстоятельством, что какие-то их части равны между собой. Таких равных частей у них может быть очень много. Чтобы ограничить их число, надо ввести еще одну величину, характеризующую «остатки».

Восприятие математических задач способными детьми имеет и другую характеристику. Еще Л. С. Выготский отмечал факт сокращения отдельных звеньев рассуждения, благодаря чему процесс рассуждения приобретает свернутый вид. О возможном при определенных условиях быстром и свернутом процессе «схватывания» структуры задачи при ее восприятии писали и Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [44, стр. 90—91]. Мы постоянно наблюдали в экспериментах, как у способных учеников процесс первичной ориентировки в задаче (если задача не очень сложная) носил столь свернутый характер, что в целом ряде случаев практически «срастался» с начальным моментом восприятия, так как отсутствовали сколь-нибудь заметные элементы рассуждения. Эта аналитико-синтетическая ориентировочная деятельность способных к математике учащихся в процессе восприятия ими математических задач зачастую носит столь свернутый характер, что это позволяет в ряде случаев условно противопоставлять аналитико-синтетическому процессу восприятия структуры задачи (у школьников со средними или малыми способностями к математике) своего рода аналитическое «в́идение»¹ структуры (у способных школьников). Разница эта, конечно, прежде всего, есть разница в быстроте умственной ориентировки. Аналитико-синтетическая

¹ Термин «в́идение», как и термин «срастается», носит, конечно, чисто служебное значение и никак не может выступать в качестве объяснительного понятия.

ориентировочная деятельность учеников со средними способностями при восприятии условия задачи — это именно аналитико-синтетический процесс, более или менее развернутый во времени. Аналитико-синтетическая ориентировочная деятельность способных учащихся (при восприятии ими экспериментальных задач) настолько «свернута», максимально ограничена во времени, что в некоторых случаях создается впечатление¹, что она, по сути дела, не носит процессуального характера, а скорее имеет характер одноактного, одномоментного аналитико-синтетического «взвешивания» математического материала, непосредственного усмотрения данных в нем отношений. Способные ученики, воспринимая задачу, сразу видят ее «скелет», очищенный от всех конкретных значений и словно «просвечивающий» сквозь конкретные данные.

В ряде работ зарубежных и советских психологов можно найти подобное противопоставление моментального «схватывания» основных отношений задачи аналитико-синтетическому процессу сравнительно медленного, последовательного ее «ощупывания». Об этом пишет, не связывая этого вопроса с проблемой способностей, З. И. Калмыкова [154], [155]. В последних работах З. И. Калмыкова начала связывать быстроту и легкость осуществления анализа и синтеза условий задачи с уровнем умственного развития [152], [153]. То же отмечают В. Н. Куликов [230], [231], Д. И. Гаткевич [83], Р. О. Серебрякова [370], Г. П. Антонова [30], [30-а]. Методист М. Ф. Добрынина [121], выделяя три типа мыслительных операций при составлении уравнений, характеризует первый тип наличием непосредственного, после чтения условия задачи, представления об основных отношениях задачи (в то время как третий тип характеризуется постепенным отыскиванием зависимостей).

В наших экспериментах способные ученики, только что познакомившись с соответствующими формулами сокращенного умножения или типом задачи, сразу воспринимали данные им математические выражения как «квадрат суммы», «видели» в них квадрат суммы, сразу воспринимали тип задачи, воспринимали ее как типовую. Аналитико-синтетический процесс при этом часто невозможно было проследить. Средние же ученики воспринимали «какое-то алгебраическое выражение» или «какую-то задачу», и лишь после соответствующей аналитико-синтетической ориентировочной деятельности (самостоятельной — если этому предшествовали многократные упражнения на решение примеров и задач этого типа, или с помощью эксперимента-

¹ Именно впечатление, так как анализ-синтез не пропадает, не отсутствует, и всегда носит процессуальный характер, хотя бы этот процесс и был максимально «свернут».

тора — если навыки решения типовых примеров и задач еще не сформировались) они приходили к выводу, что данное алгебраическое выражение — квадрат суммы, а данная задача относится к такому-то типу.

Несколько примеров. Девятилетней Соне Л., только что узнавшей формулу разности квадратов, дается для решения задача: $113^2 - 112^2$. Едва увидев условие (с момента предъявления прошло 1—2 сек.), она радостно восклицает: «Да это вычитание квадратов! (т. е. разность квадратов. — В. К.). Это можно по формуле решить!»

Среднему же ученику VI класса (также только что познакомившемуся с формулой разности квадратов) понадобилось около 5 мин., чтобы произвести (с помощью экспериментатора) анализ-синтез условий этой же задачи.

И наконец, еще одно обстоятельство. И Л. С. Выготский, и Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [44, стр. 90—91], отмечая свернутость, «мгновенность», «внезапность» схватывания структуры задачи, указывают, что это явление возникает на определенных этапах обучения как результат упражнений.

Возникает вопрос: является ли отмеченное нами аналитико-синтетическое «видение» формальной структуры задачи всегда только результатом упражнений? На этот вопрос трудно ответить со всей определенностью. Трудно оценить в этом отношении предшествующий опыт человека. Ведь даже одаренная восьми-летняя Соня Л. ко времени нашего знакомства с ней уже имела какой-то опыт в этом отношении, хотя ее никто этому специально не учил. Однако ясно одно: одинаковые упражнения, одинаковая практика, одинаковый опыт (насколько об этой «одинаковости» можно судить) у школьников с различными способностями дают различные результаты. У одного (его мы и называем способным) эти упражнения приводят к выработке способности к аналитико-синтетическому «видению», у другого — нет.

Целый ряд фактов, анализ особенностей восприятия способными детьми задач нового, неизвестного еще типа позволяют считать, что отмеченное выше аналитико-синтетическое восприятие математических задач способными детьми возникает не как результат более или менее длительных упражнений, а «с места» или почти «с места», при минимальном числе упражнений.

Как уже указывалось в начале главы, 40 учеников (в том числе 18 способных, 14 средних и 8 неспособных) были проверены через все тесты I, II и III серий задач. Выделив «уровни восприятия условий задачи», дадим сводные результаты в таблицах 7, 8 и 9 (число решений всюду показывается в % к общему их числу в группе).

Таблица 7

Восприятие учащимися с различными способностями к математике структуры задач с несформулированным вопросом (серия I)

Уровни	Характеристика уровней	Количество задач, воспринятых на соответствующем уровне (в %)		
		группы учащихся		
		СП	СР	НСП
1	Не формулирует вопроса и с помощью экспериментатора, так как не улавливает отношений, а воспринимает лишь разрозненные данные	—	—	40,5
2	Формулирует вопрос и осознает данные в задаче отношения лишь со значительной помощью экспериментатора	—	23,5	30,1
3	Формулирует вопрос самостоятельно, но не сразу, допуская отдельные ошибки, постепенно улавливая данные в задаче отношения	13,4	66,8	29,4
4	Сразу формулирует вопрос, «с места» схватывая данные в задаче отношения	86,6	9,7	—

Таблица 8

Восприятие учащимися с различными способностями к математике структуры задач с неполным составом условия (серия II)

Уровни	Характеристика уровней	Количество задач, воспринятых на соответствующем уровне (в %)		
		группы учащихся		
		СП	СР	НСП
1	Не выявляет недостающих данных и с помощью экспериментатора, так как не улавливает отношений, а воспринимает лишь разрозненные данные	—	—	52,9
2	Выявляет недостающие данные и осознает отношения лишь со значительной помощью экспериментатора	—	53,8	24

Продолжение

Уровни	Характеристика уровней	Количество задач, воспринятых на соответствующем уровне (в %)		
		группы учащихся		
		СП	СР	НСП
3	Выявляет недостающие данные самостоятельно, но не сразу, допуская ошибки, постепенно улавливая отношения	23,9	42,9	23,1
4	Сразу указывает на недостающие данные, «с места» схватывая отношения, составляющие существо задачи	76,1	3,3	—

Таблица 9

Восприятие учащимися с различными способностями к математике структуры задач с избыточным составом условия (серия III)

Уровни	Характеристика уровней	Количество задач, воспринятых на соответствующем уровне (в %)		
		группы учащихся		
		СП	СР	НСП
1	Не выделяет необходимые данные и не отделяет избыточные и с помощью экспериментатора, так как не улавливает отношения в задаче, а воспринимает лишь разрозненные данные	—	—	56,8
2	Выделяет необходимые данные и отделяет избыточные, осознавая отношения лишь со значительной помощью экспериментатора	9,1	54,5	25
3	Выделяет необходимые данные и отделяет избыточные самостоятельно, но не сразу, допуская отдельные ошибки, постепенно улавливая отношения	27,8	41,6	18,2
4	Сразу указывает на необходимые и излишние данные, «с места» схватывая структуру задачи, ее отношения	63,1	3,9	—

В итоге всего сказанного можно сформулировать следующее положение: в одних и тех же условиях восприятия математического материала школьники с различными способностями к математике получают (точнее, активно добывают) информацию различного характера. При этом под информацией мы понимаем все те (активно добытые) сведения о задаче, с которыми ученик приступает к ее решению. У способных всегда объем добытой информации больше, чем у средних или тем более неспособных учеников. Иными словами, мы должны говорить о способности активно извлечь из данных условий задачи максимально полезную для ее решения информацию.

Подводя итоги всем рассмотренным выше материалам, можно дать психологическую интерпретацию общему фактору, выделенному с помощью факторного анализа. Этот общий фактор — формализованное восприятие математического материала. Математические способности проявляются в стремлении к своеобразной формализации структуры математического материала в процессе его восприятия. Под формализацией¹ мы понимаем быстрое «схватывание» в конкретной задаче, в математическом выражении их формальной структуры, когда все содержательное (числовые данные, конкретное содержание) словно выпадает и остаются чистые соотношения между показателями, характеризующие принадлежность задачи или математического выражения к определенному типу. Формализованное восприятие — это своего рода обобщенное восприятие функциональных связей, отделенных от предметной и числовой формы, когда в конкретном воспринимается его общая формальная структура. В свое время К. Дункер отмечал, что при решении задач необходима способность абстрагироваться от перцептивных свойств, способность обнаружить общее в конкретном факте [487]. Л. Секей [706] указывал, что существенной особенностью продуктивного мышления является способность субъекта «схватывать» структурные соотношения в обобщенном виде. В. Н. Молодший [299] пишет о выделении чистых отношений как «форм с переменным содержанием», что характеризует математическое мышление.

В заключение обратим внимание еще на одно обстоятельство.

В экспериментах нами наблюдалась еще одна характерная особенность аналитико-синтетического восприятия условий задачи способными школьниками. Указанный ориентировочный анализ-синтез всегда носил у них «инструментальный» характер,

¹ Формализация — термин, широко распространенный в математике. Не путать с понятием формализма в преподавании и усвоении — совершенно другим понятием.

т. е. открывал в дальнейшем возможность активных действий по решению задачи (а не только возможность пассивной констатации особенностей задачи, возможность отличать, дифференцировать данный тип задачи от других). Ясно, что узнавать с целью отличить одно от другого (и только) и узнавать для того, чтобы действовать в соответствии с этим,— разные вещи. Способные учащиеся не только выделяли, но и осмысливали соответствующим образом те признаки, которые являются основой специфических действий по решению именно этого типа задач в отличие от других. Аналитико-синтетическая первичная ориентировка в задаче у неспособных (и отчасти средних) учащихся была направлена на выделение признаков, которые позволяют распознавать, отличать данную задачу от других. У способных же она была направлена на выделение признаков, которые служат основой планирования соответствующих действий по ее решению. Приведем простейший пример. Имеются два выражения типа $(a-b)^2$ и a^2-b^2 . Здесь возможны психологически две различные функции анализа: 1) анализировать выражение $(a-b)^2$ с целью научиться узнавать его и дифференцировать от всех других, в частности от сходного выражения a^2-b^2 , и 2) анализировать это же выражение $(a-b)^2$ с целью определить алгоритм его решения. Иными словами, анализ в том и другом случае носит различный характер.

В первом случае ученик отвечает на вопрос — как отличить одно выражение от другого (чем эти выражения различаются вообще), во втором варианте — как действовать в одном случае в отличие от другого (чем эти выражения отличаются в смысле действий по их решению). Неспособный ученик порой может отличать одно выражение от другого (ориентируясь на чисто внешние признаки), но определить, чем будут отличаться действия по их решению, не может. Вот отрывок из протокола беседы со средней ученицей VII класса В. А. Даны ряды задач типов $(a-b)^3$ и a^3-b^3 . Ученица: «Тут разные примеры. У одних — степень — тройка относится к скобке, а у других и скобки-то нет» (дифференцировку проводит совершенно правильно). Эксп.: «Ну, а как решать эту группу отобранных тобой примеров в отличие от решения другой группы? Сравни ход решения». Ученица молчит. Эксп.: «Ведь ты верно отделила одни примеры от других, увидела разницу. Ну, а что означает эта разница? Как отличается ход решения одних от хода решения других?» Ученица: «Отличать я их могу, а вот в решении путаю — как-то похоже решаются».

По-видимому, отмеченное явление имеет в своей основе установленный польским физиологом Ю. Конорским, учеником И. П. Павлова, факт наличия двух уровней анализа (с докладом о механизмах так называемого инструментального анализа Конорский выступил на 17 Международном конгрессе психологов

в Вашингтоне в 1963 г. [см. 674, стр. 35]). Первый уровень анализа дает возможность различать, дифференцировать раздражители, но не определяет поведения (т. е. не является «инструментом» поведения). Второй уровень «работает на поведение», открывает возможность действовать. Таким образом, анализ, по Конорскому, может быть достаточным для дифференцировки двух явлений, но при этом может и не открывать возможности действий в соответствии с этими явлениями.

Вопрос этот требует специального исследования. При этом, по-видимому, надо учесть и некоторые положения теории ассоциаций, развиваемой П. А. Шеваревым. В частности, П. А. Шеварев, а затем и Н. Ф. Талызина установили, что в процессе изучения геометрии у учащихся складываются 2 типа ассоциаций: 1) актуализация которых приводит к выяснению особенностей фигур и 2) актуализация которых приводит к действию, нужному для решения задачи [444], [401].

В заключение одно замечание. В процесс описанного нами восприятия задачи включается и аналитико-синтетическая обработка данных задачи. Правомерно ли поэтому оставаться в пределах понятия «восприятие задачи»? Не знаменует ли все это уже перехода к стадии решения ее? Нам кажется, что это все-таки восприятие («рассуждающее восприятие»), так как в результате не устанавливается никаких новых зависимостей, не открываются новые данные — происходит лишь осмысливание данных, ориентировка в содержании задачи.

Глава IV

ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕРАБОТКИ ПОЛУЧЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СПОСОБНЫМИ К МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКАМИ

§ 1. Способность к обобщению математических объектов, отношений и действий

Всякое действительное обобщение в сфере числовой и знаковой символики может рассматриваться по крайней мере с двух сторон — надо уметь увидеть сходную ситуацию (где применить) и надо владеть обобщенным типом решения, обобщенной схемой доказательства, рассуждения (что применить). И в том и другом случае необходимо отвлечься от конкретного содержания и выделить сходное, общее и существенное в структурах объектов, отношений или действий.

Способность к обобщению математического материала мы будем рассматривать и с другой точки зрения также в двух планах: 1) как способность человека увидеть в частном, конкретном уже известное ему общее (подведение частного случая под известное общее понятие) и 2) способность увидеть в единичном, частном пока еще неизвестное общее (вывести общее

из частных случаев, образовать понятие). Одно дело — увидеть возможность применения к данному частному случаю уже известной ученику формулы, другое — на основании частных случаев вывести формулу, еще неизвестную ученику.

На исследование способности к обобщению были направлены в основном шесть серий задач (V, VI, VII, VIII, IX, X). Исследование проходило в несколько этапов, с охватом в общей сложности 120 учащихся (в том числе 61 способный, 37 средних и 22 неспособных). Основную группу испытуемых на последнем этапе исследования составили 24 способных ученика, которые (во второй половине VI и первой половине VII года обучения) были проведены через все тесты указанных серий. Они сравнивались с группами средних (22 чел.) и неспособных (8 чел.) учащихся, также проведенных через все серии, но в более растянутые сроки.

Количественные показатели отражали быстроту и широту обобщения. При этом напоминаем, что под быстротой мы понимаем не индивидуальный темп работы, а быстроту обобщения (количество необходимых конкретных случаев, факторов, на основании которых производилось обобщение). Вообще говоря, быстрота умственной ориентировки (в смысле затраченного времени), конечно, имеет важное значение, как это показал, например, Ю. А. Самарин [363], [365], [366], исследуя динамичность умственной деятельности школьников (понимая под этим быстроту отбора соответствующих ассоциаций и быстроту манипуляций с ними). Но, с другой стороны, известно, что время не всегда является существенным фактором высоких достижений в деятельности, в частности умственной деятельности учащихся (Канду [630]). Ученик, быстро продвигающийся в усвоении, быстро вырабатывающий обобщенные связи, может работать медленно и, наоборот, медленно вырабатывать такие связи при довольно быстром темпе работы (см. Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [44, стр. 183]).

В использованных нами шести сериях количественными показателями были: количество «шагов» при максимальном обобщении и величина последнего «шага» (V и IX серии), число правильно выполненных тестов (VI серия), число правильно решенных задач и количество «шагов» при переходе из конкретного в абстрактный план (VII серия), суммарный балл, показывающий уровень выполнения задания (VIII серия), суммарный индекс, характеризующий широту переноса частного метода рассуждения (X серия)¹.

Здесь, так же как и в предыдущей главе, возникает вопрос: можно ли объяснить решение экспериментальных задач всех шести серий действием одного общего фактора? Мы предполо-

¹ Более подробные пояснения даны в главе IV раздела II данной книги.

жили, что показатели всех тестов указанных шести серий измеряют одно и то же явление, являются индикаторами одного и того же общего свойства умственной деятельности, что здесь, следовательно, также проявляется один общий для этих серий фактор.

Чтобы выяснить, справедливо ли это предположение, полученные данные были подвергнуты факторному анализу. И в этом случае факторизация была проведена на основе однофакторной модели Спирмена. Обоснование этому уже было дано в предыдущей главе. Все формулы по этой же причине также опускаем.

Была получена следующая матрица интеркорреляций (см. табл. 10).

Таблица 10

Серия	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	0,52	0,66	0,61	0,39	0,48
VI	0,52	—	0,42	0,62	0,48	0,56
VII	0,66	0,42	—	0,49	0,38	0,37
VIII	0,61	0,62	0,49	—	0,64	0,51
IX	0,39	0,48	0,38	0,64	—	0,68
X	0,48	0,56	0,37	0,51	0,68	—

$N=24$

Как видно, успешность решения задач указанных шести серий положительно коррелирует друг с другом.

При 24 испытуемых значения коэффициентов корреляции r , значимых на уровне значимости $0,01=0,485$; на уровне значимости $0,05=0,343$. Следовательно, полученные коэффициенты корреляции статистически значимы (из них 60% значимы на уровне 0,01 и 40% значимы на уровне 0,05). В результате факторизации была получена следующая факторная матрица (см. табл. 11).

Таблица 11

Показатель (серия)	Факторные веса по g
V	0,74
VI	0,72
VII	0,62
VIII	0,82
IX	0,70
X	0,72

Как можно видеть, все серии имеют очень высокие веса по общему фактору (VII серия — значительный вес).

Была вычислена репродуцированная корреляционная матрица (см. табл. 12).

Таблица 12

Серия	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	0,53	0,46	0,61	0,52	0,53
VI	0,53	—	0,45	0,59	0,50	0,52
VII	0,46	0,45	—	0,51	0,43	0,45
VIII	0,61	0,59	0,51	—	0,57	0,59
IX	0,52	0,50	0,43	0,57	—	0,50
X	0,53	0,52	0,45	0,59	0,50	—

В итоге матрица остаточных коэффициентов корреляции выглядит следующим образом (см. табл. 13).

Таблица 13

Серия	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	—0,01	0,20	0,00	—0,13	—0,05
VI	—0,01	—	—0,03	0,03	—0,02	0,04
VII	0,20	—0,03	—	—0,02	—0,05	—0,07
VIII	0,00	0,03	—0,02	—	0,07	—0,08
IX	—0,13	—0,02	—0,05	0,07	—	0,18
X	—0,05	0,04	—0,07	—0,08	0,18	—

Оценим вероятность появления остаточных коэффициентов корреляции, указанных в этой таблице (по Теплову [410]) и Харману [604, стр. 440—441]):

$$\rho = \frac{15,62}{6,5} = 0,52; \quad \sigma \bar{r} = 0,244; \quad \frac{x}{\sigma \bar{r}} = \frac{0,2}{0,244} = 0,82;$$

$$\alpha = 58,78; \quad P = 41,22\%$$

где ρ — средняя величина коэффициента корреляции, $\sigma \bar{r}$ — сигма остаточных коэффициентов корреляции (исчисленная по таблице Хармана), x — наибольший остаточный коэффициент корреляции, α — вероятность появления остаточных коэффициентов корреляции, меньших, чем самый большой (исчисленная по таб-

лице Хармана), P — вероятность появления самого большого остаточного коэффициента корреляции¹.

Следовательно, вероятность появления самого большого остаточного коэффициента корреляции, при предположении, что в среднем остаточные коэффициенты равны нулю, равна 41%. Остальные коэффициенты остаточных корреляций значительно меньше, и, следовательно, вероятность их появления значительно больше. Учитывая, что остаточных коэффициентов корреляции порядка 0,2 в матрице только 7% (2 из 30), а остальные значительно меньше, мы имеем все основания считать факторизацию исходной матрицы на основе однофакторной модели совершенно обоснованной (см. Теплов [410]).

Как уже указывалось, все шесть серий имеют по общему фактору весьма высокие веса. Это означает, что успешность решения задач всех этих серий — результат действия лишь одного общего фактора. Общий (единый) фактор для всех указанных серий имеет место, и притом он довольно ясно выражен. Психологическая интерпретация этого фактора довольно очевидна — это способность к обобщению математического материала. Более содержательная интерпретация его будет дана после качественного анализа процесса решения экспериментальных задач.

Анализ материалов проведем в соответствии с четырьмя проведенными этапами исследования способности к обобщению (см. раздел II, гл. V).

1-й этап

Уже первый этап исследования, охвативший 19 учащихся с различными способностями к математике, показал, что учащихся с разным развитием способностей к изучению математики характеризует разная степень способности к обобщению математического материала. Чем способнее учащиеся, тем при прочих равных условиях быстрее и шире они обобщают математический материал. У наиболее способных это обобщение при решении некоторых задач принимает характер максимального обобщения сразу («с места»), когда непосредственно после первого знакомства с принципом решения по данной формуле или схемой решения типовой задачи эта формула или схема решения без дополнительных упражнений, без специальной тренировки распространялась на самые различные варианты примеров или задач соответствующего типа, охватывая все разнообразие возможных комбинаций несущественных признаков. Способные к математике школьники легко находили за различными частными деталями скрытую в них общность, видели за разнообразным

¹ Значение σ_r по таблице (Теплов [410], Харман [604, стр. 440—441]) найдено приближенно, так как приходилось брать ближайшие табличные значения ρ и N .

внешним оформлением глубокую внутреннюю сущность явлений, «схватывали» главное, основное, общее во внешне различном, своеобразном, в новом находили элементы знакомого. И, повторяем, нередко эта способность проявлялась «с места», тогда как неспособных учеников нужно было длительно тренировать, упражнять на специально подобранном материале, охватывающем все возможные случаи и комбинации несущественных признаков, чтобы им стала доступной более или менее элементарная степень обобщения.

Рассмотрим с этой точки зрения решение задач V серии способными, средними и неспособными учащимися.

Способные учащиеся довольно свободно, не испытывая особых затруднений, непосредственно после первого знакомства с формулой «квадрат суммы» или решения единственного примера на применение этой формулы правильно решают все предложенные им примеры, начиная с наиболее «удаленных», легко усматривая в них общий тип.

Ученику О. В. после решения им всего одного примера на применение формулы «квадрат суммы» дается для решения пример: $(C+D+E)(E+C+D)$. Ученик: «А это что? Тут не по формуле — просто перемножить многочлены надо... Но это будет 9 членов. Много. А можно и формулу применить — ведь это же квадрат (быстро пишет: $(C+D+E)^2$). Верно. Теперь любые два члена можно соединить» (пишет: $C+(D+E)^2$). Эксп.: «А можно так делать? Ведь формула относится только к квадрату двучлена, а у тебя-то все-таки был трехчлен?» Ученик: «А как только я объединил D и E в один член, у меня получился двучлен — смотрите (показывает). Ведь «членом» может быть любое выражение». (Решает, повторяя вслух формулу. Пишет: $C^2+2C(D+E)+(D+E)^2=C^2+2CD+2CE+D^2+2DE+E^2$.) Тут же ученик составил алгоритм решения всех задач такого типа.

Иначе решали задачи этой серии средние ученики. Обобщение «с места», распространяемое на всевозможные варианты и комбинации, у них отсутствовало. Но они были способны подойти к такому обобщению постепенно, путем последовательного обобщения все более и более «отдаленных» звеньев, т. е. путем специально организованных упражнений по решению примеров, в которых варьировались бы несущественные признаки (как это обычно и практикуется в школе).

Ученик А. У. не усмотрел никаких линий сходства между 1-м и 8-м примером ($V-A$), несмотря на то что по побуждению экспериментатора он долго раздумывал над этим. Переход от 1-го к 2-му примеру и от 2-го к 3-му он осуществил легко. Дальнейший ход его мысли: «А это что-то другое (изучает пример $(3x-6y)^2$). Квадрат-то есть, а суммы нет... Это другой пример, его по формуле не решишь... (Эксп.: «А ты внимательно посмотри на предыдущий пример: $(-5x+0,6xy)^2$). Он тебе ничего

не подсказывает?») Это же другое дело — там в середине плюс, а здесь минус... (Эксп.: «А посмотри на первый член и подумай».) Вот если переставить... А можно так? (Эксп.: «А ты сам подумай — можно так?») Не знаю... Когда сумма, то переставлять можно, а здесь минус... (пишет: $3-4=+3-4=-4+3$). Вот разве так (пишет: $(-6y+3x)^2$). Ну да, получилась сумма, квадрат суммы (решает правильно). Теперь знаю, как такие решать. (Экспериментатор предлагает для решения пример $(m+x+b)^2$.) Эти я не знаю, как решать, — тут два плюса, две суммы. Это квадрат двух сумм». Эксп.: «А подумай, может быть, и к этому примеру можно применить формулу квадрата суммы двух чисел? Можно выражение в скобках представить как сумму двух чисел?» — «Это можно (пишет: $[(m+x)+b]^2$). Ну, теперь я знаю, как решать. (Решает правильно, только сначала вместо $(m+x)^2$ записывает: m^2+x^2 , но, подумав, сам исправляет.) Теперь давайте первый пример $[(C+D+E)(E+C+D)]$, я его решу (пишет: $[(C+D)+E] \cdot [(E+C)+D]$, что-то в скобках разное получилось... сначала надо слагаемые переставить (пишет: $[(C+D)+E] \quad [(C+D)+E] = [(C+D)+E]^2$). Дальше решает верно.

Пример 51² ученик А. У. долго затруднялся решить по формуле, но когда ему намекнули, что хорошо бы представить данное число в виде суммы, произнес: «Пятьдесят один — это пятьдесят и один, т. е. пятьдесят плюс один». После этого пример был быстро решен.

Неспособные ученики с большим трудом обобщали предложенный математический материал, даже при непосредственной помощи экспериментатора. Они с трудом «перебирались» от одной ступени обобщения к другой, причем каждая такая ступень должна была закрепляться значительным количеством упражнений. Переход к каждой последующей задаче первой серии осуществить самостоятельно неспособные ученики не могли, да и не все наводящие вопросы, советы и соображения экспериментатора оказывались действенными в этом отношении. Самостоятельно усмотреть возможность применения формулы сокращенного умножения к решению примеров V серии неспособные ученики не могли даже в отношении примера № 2 (наиболее легкий случай).

Неспособный к математике ученик Г. К., усвоив формулу $(a+b)^2$ и принцип ее применения, приступает к решению примера $(1 + \frac{1}{2} a^3 b^2)^2$.

Приведем отрывок из протокола. Эксп.: «А вот этот пример можно решить по формуле сокращенного умножения?» Ученик: «Здесь что-то другое — и a и b справа и не разделяются плюсом... (пишет: $\frac{1}{4} a^6 + 2 \frac{1}{2} a^3 b^2 + b^4$). Эксп.: «Куда же де-

лась единица?» Ученик молчит. Эксп.: «Ну а реши такой пример: $(2x+y)^2$ ». Ученик пишет, повторяя вслух формулу: $4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$. Эксп.: «Верно. Вот так же реши и предыдущую задачу». Ученик: «А здесь что-то другое... квадрат первого — это $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{2}a^3$. Эксп.: «Давай рассуждать вместе. Чтобы применить формулу, надо убедиться, что мы имеем дело с квадратом суммы двух чисел. Тебе ясно, что это квадрат?» Ученик: «Вот здесь (показывает) цифра 2 показывает, что то, что в скобках, надо помножить само на себя». Эксп.: «Верно. А в скобках двучлен? Покажи, где первый член, где первое «число»». Ученик: « $\frac{1}{2}a^3$... или нет, что я говорю...

между членами должен быть знак плюс. Тут нет первого члена, только второй». Эксп.: «А единица? Ведь каждый член, каждое «число» может, как ты знаешь, представлять собой любое выражение». Ученик: «Ну да... Тогда первый член — единица». Эксп.: «Ну, а какой знак разделяет члены, стоящие в скобках?» Ученик: «Плюс, значит, сумма». Эксп.: «Теперь видишь сходство этого примера с решенным тобой примером $(2x+y)^2$?» Ученик: «Нет, они разные. Там буквы были и в первом члене, и во втором, а здесь только во втором». Эксп.: «Это, конечно, верно. Двучлены в скобках разные. Но ты видишь, что и там и здесь квадрат, там и здесь сумма, там и здесь сумма двух чисел? Значит, в этом смысле они имеют что-то общее?» Ученик: «Имеют. И там и здесь сумма двух членов в квадрате». Эксп.: «А ведь чтобы применить формулу, как тебе объяснялось раньше, важно только это: важно, чтобы алгебраическое выражение представляло собой квадрат суммы двух чисел. Понятно? Решай». Ученик: «Понятно». (Решает с помощью экспериментатора правильно.)

Такие же затруднения испытывал ученик при переходе к каждой последующей задаче. Дифференцировка задач правого столбца также производилась с трудом.

Указанными чертами характеризовалось и решение задач VI серии способными, средними и неспособными учащимися.

Способные еще до решения задач, на стадии предварительного анализа, быстро усматривали типовое сходство одной задачи с другой. Решив первую задачу, они легко переносили решение одной задачи на решение другой задачи. Так же легко они усматривали разницу в типах задач, внешне похожих, но математически различных.

Способные учащиеся обобщали задачи до их решения на основании «схватывания» общих особенностей структуры этих задач. Им не нужно было для этого обобщать способ решения задач. Они видели, что это задачи одного типа еще до того, как убеждались в том, что схемы их решения аналогичны. Но, конеч-

но, увереннее они обобщали, если предварительно находили способ решения одной из них.

Способная ученица Е. Е. решает задачу VI—В—1: «Обозначим число столов, которые должна сделать фабрика, через x . Эта задача — на три взаимосвязанных величины: а) общее количество столов; б) количество столов, делаемых каждый день, и в) число дней. Выразим третью величину через первые две: $\frac{x}{48}$ —

столько дней должна работать фабрика. А фактически работала на 3 дня меньше, выпустив за это время на 100 столов меньше и выпуская по 50 столов в день. $\frac{x-100}{50}$ — столько дней она рабо-

тала, и это число на 3 меньше, чем $\frac{x}{48}$. Значит: $\frac{x}{48} = \frac{x-100}{50} + 3$

(Быстро получает правильный ответ.)» Вот та же ученица переходит к решению задачи VI—В—3: «Это такой же тип. Здесь тоже соотношение трех связанных между собой величин. Принцип решения должен быть тем же. Только здесь количество дней постоянно в первом и втором случае. Пусть будет x дней. Тогда $240x$ и $280x$ — количества высаженных деревьев в первом и втором случае, причем второе на 600 деревьев больше. Значит: $240x + 600 = 280x$; $40x = 600$; $x = 15$ дней. А деревьев — $15 \cdot 240 + 400 = 4000$ ».

Средние ученики не всегда самостоятельно подводили задачи под общий тип, не всегда самостоятельно усматривали общетиповое сходство во внешне различных задачах, однако при помощи экспериментатора в общем успешно справлялись с этой задачей. Как правило, для обобщения задач, отнесения их к одному типу, средним учащимся недостаточно было проанализировать структуру задач. Им необходимо было предварительно решить задачи, а затем сравнить и обобщить ход решения.

Что же касается неспособных учеников, то даже при детальной помощи экспериментатора они с большим трудом усматривают общие типовые элементы в задачах. Они самостоятельно не относят задачи к общему типу даже после того, как решат их (с помощью экспериментатора) и получают возможность сравнивать готовый принцип решения той и другой задачи. Если такому ученику дать третью задачу этого типа, он и тогда не подведет ее под уже известную схему решения, а будет решать ее как совсем особую задачу.

После нескольких неудачных попыток решить задачу VI—В—1 неспособная ученица С. А. заявляет, что задача не решается из-за отсутствия еще одних данных — числа дней.

Эксп.: «Но тогда не было бы и задачи! Подумай: если будет известно число дней, да еще знаем, что план — 48 столов в день, то и определять нечего — перемножить эти два числа и дело с концом. Но ты правильно отметила, что необходимо опреде-

литель число дней. Можно это сделать? Через x ты обозначила общее число столов, известен и ежедневный выпуск». Ученица: «Надо общее число разделить на 48. Будет $\frac{x}{48}$. Столько дней

работала фабрика». Эксп.: «Должна была работать. На самом деле она работала лучше или хуже?» Ученица: «Лучше. Выпускала по 50 столов». Эксп.: «Верно. Сколько же она выпустила, когда до срока оставалось еще 3 дня? В задаче об этом говорится». Ученица: «Осталось еще 100. Значит, выпустила $x-100$ ». Эксп.: «Правильно. А сколько дней она работала?»

Ученица: «На три дня меньше: $\frac{x}{48} - 3$ ». Эксп.: «А как еще можно выразить это число? Выпустила $x-100$, а давала по 50 в день. Сколько же дней? Вспомни, как ты получила число $\frac{x}{48}$ ».

Ученица: « $\frac{x-100}{50}$ дней». Эксп.: «Теперь количество фактически проработанных дней ты выразила одним и другим путем. Что теперь нужно сделать?» Ученица: «Это число дней одно и то же. Можно приравнять: $\frac{x-100}{50} = \frac{x}{48} - 3$ ». (С помощью экспе-

риментатора решает уравнение.) Эксп.: «Теперь внимательно посмотри и запомни, как решать такого типа задачи. В них всегда будут 3 элемента: общее количество, время и количество в единицу времени. Как связаны эти величины?» Ученица: «Общее количество, деленное на количество в единицу времени, даст время». Эксп.: «А если дано будет время и количество в единицу времени, можно будет узнать общее количество?» Ученица: «Надо помножить первое на второе». Эксп.: «Вот и запомни, каков ход решения таких задач. Теперь реши задачу VI—В—2». Ученица: «Это такая же задача, только цифры другие. Тут тоже мебельная фабрика и столы». Эксп.: «А ну, найди все три элемента». Ученица: «Общее количество столов $4 \cdot 90 = 360$. А время какое? Тут непонятно, в течение какого времени выносили столы». Эксп.: «А зачем это знать? Ты вдумайся в задачу». Ученица: «Это такая же задача, как и та. Значит, нужно время, а то получается два неизвестных». Эксп.: «Попробуй решить задачу VI—В—3». Ученица: «Такие задачи я еще не решала. Количество деревьев обозначим через x . А сколько дней? (Снова с помощью подробных объяснений экспериментатора ученица приходит к правильному решению задачи.)». Эксп.: «Вот теперь сравним первую и третью задачу. Неужели в них нет ничего сходного? Сравни план решения той и другой». Ученица: «Там мы делили, а здесь множили. Это разные задачи». Эксп.: «Задачи, конечно, разные, а сущность их похожа? Общее количество фигурирует и в той и в другой задаче?» Ученица: «Да. Общее количество столов и общее количе-

ство деревьев». Эксп.: «А количество в единицу времени? А время?» Ученица: «Есть все. Да, задачи похожие. Только почему мы в первой делили, а во второй множили?» Эксп.: «А ты подумай. Что мы определяли в первой и что во второй задаче?» Ученица: «Теперь поняла. Там мы делили, потому что узнавали время, а здесь множили, потому что узнавали общее количество. Задачи эти действительно похожие. Я запуталась, потому что там — столы, а здесь — деревья».

Указанные особенности обобщения математического материала способными, средними и неспособными к изучению математики учащимися выявляются и в процессе решения ими задач IX серии (задач на доказательство). Например, способные учащиеся без затруднений справлялись с задачей IX—Б—1 и легко переносили способ доказательства на другие задачи этого теста, усматривая общий тип доказательств во всех задачах. Тип доказательства, типичная схема подобных доказательств осознавались ими, как правило, после решения первой же задачи, т. е. «с места».

Вот как решал задачи этой серии способный ученик П. А.: «Доказать, что сумма любых трех последовательных чисел делится на 3. Последовательные числа — это такие числа, когда каждое из последующих на единицу больше предыдущего, так кажется? Как же тут доказывать? 2, 3 и 4 в сумме действительно делятся на 3; 12, 13 и 14 в сумме дают 39. Можно доказать так: сумма трех одинаковых чисел, разумеется, делится на 3. Да еще прибавляются 3 единицы (второе число на единицу, а третье — на две единицы больше первого), которые тоже делятся на 3. Можно и алгебраически доказать: $x + (x+1) + (x+2) = 3x + 3 = 3(x+1)$. Последнее выражение всегда можно разделить на 3, каково бы ни было исходное число x . Ну, принцип доказательства понял». Эксп.: «Хорошо. Теперь попробуй доказать задачу IX—Б—6». Ученик: «Ну, это легко. Принцип тот же — алгебраический. Сумма двух дробей равна 1. Значит, дроби такие: $\frac{x}{y}$ и $1 - \frac{x}{y}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \left(1 - \frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y}$; $\frac{x^2}{y^2} + 1 - \frac{x}{y} = 1 - \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y}$; $\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1 = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1$. Левая часть равна правой». (Так же свободно, без размышления ученик доказывает и остальные алгебраические теоремы.)

Средние ученики обычно не переходили совершенно самостоятельно от самого простого доказательства к доказательству самому сложному, но без особого труда приходили к нему через посредство промежуточных ступеней.

Для неспособных учеников обобщение доказательств, установление принципа алгебраических доказательств данного типа и перенос этого принципа на другие доказательства — непосильная задача. Даже самые легкие переходы требуют помощи экс-

периментатора. Вот как справлялся с этой задачей неспособный ученик Л. Ю. после того, как с помощью экспериментатора он овладел способом доказательства (задача IX—Б—1).

Ученик: (решает задачу IX—Б—2). «А что значит «является квадратом?» Квадратом какого числа?» Эксп.: «Есть числа, которые не являются квадратом какого-либо числа, например 13 или 20. А есть числа, которые являются результатом возведения в квадрат какого-либо числа, например 9 (т. е. 3^2), 25 (т. е. 5^2), 64 (т. е. 8^2)». Ученик: «Понятно. А здесь как доказывать?» Эксп.: «Подумай. Примени, как в предыдущей задаче, способ алгебраического доказательства. Сказано: «Задумайте любое число». Как в алгебре обозначается «любое число?» Ученик: «А, теперь знаю: $x \cdot (x+6) + 9 = x^2 + 6x + 9$. Вот x^2 и есть квадрат задуманного числа». Эксп.: «Ты взял только часть результата. А тебе нужно доказать, что весь полученный результат есть квадрат какого-то числа. Квадратом какого выражения является полученный тобой результат? Вспомни формулы сокращенного умножения, которые мы недавно повторили». Ученик: «Знаю. Получится $(x+3)^2$ (дает ответ не сразу)». Эксп.: «Но всегда ли в результате получится квадрат?» Ученик: «Не знаю». Лишь после продолжительного разъяснения экспериментатора ответил: «По-моему, всегда, так как мы брали любое число».

Возникает вопрос: что именно обеспечивает способным ученикам возможность довольно широкого обобщения «с места», возможность переноса действия в пределах одного типа задач также сразу, без предварительного постепенного обобщения на основе упражнений?

Рассмотрим любопытный с психологической точки зрения факт. Большому числу школьников и взрослых мы предлагали по возможности в уме и возможно быстрее решить задачу (XI—А—3): «Записать алгебраически общий вид чисел, делящихся на 5 и в остатке дающих 7» (чтобы облегчить решение этой задачи, мы предварительно просили изобразить алгебраически общий вид чисел, делящихся на 3).

Особенность этой задачи заключается вот в чем: хотя и возможно (и не представляет особого труда) изобразить алгебраически все подобные числа. $(5x+7)$, но задача тем не менее не имеет смысла, так как нет и не может быть чисел, которые при делении на 5 давали бы в остатке 7. Тип задачи вполне реален, но данный ее конкретный вариант нереален. Парадоксальным же было то обстоятельство, что способные к математике ученики (и даже взрослые люди) очень часто (в наших экспериментах чаще, чем неспособные!) давали ошибочный ответ $(5x+7)$, «спохватываясь» лишь впоследствии. Неспособные ошибались значительно реже, правильно указывая на бессмысленность задачи. А ведь соответствующее теоретическое положение, без сомнения, было известно всем (да и мудрено не знать, что семь

больше пяти). Подобные же факты на этой же задаче были обнаружены и С. И. Шапиро у старшеклассников. В чем же дело?

Анализ этого любопытного факта обнаружил интересное обстоятельство. Оказывается, значительное большинство способных решали данную задачу как общую типовую задачу, отвлекаясь от конкретных данных. Они осмысливали задачу как такую общую типовую задачу: «Найти числа, которые при делении на данное число дают остаток». Дальше следовало решение в такой же общей форме: «Для этого надо к первому числу дать множитель x и прибавить остаток» и, наконец, перевод из абстрактного в данный конкретный план (автоматическая подстановка данных чисел) «равняется $5x + 7$ ». Перевод задачи в общую форму и отвлечение от конкретных чисел, по свидетельству испытуемых, значительно облегчали процесс решения («Цифры мешают понять суть задачи», — заявляли некоторые из них, решившие эту задачу по обобщенной схеме $ax + y$). Этим и объясняется ошибка, которую часто допускали способные. Неспособные же никогда не пытались решить эту задачу в общей форме. Они решали ее самым примитивным способом — подстановкой пытались выявить все конкретные числа, обладающие этим свойством. Но при попытке найти первое же конкретное число, обладающее указанным свойством (12), они убеждались в бессмысленности задачи. То же самое показало решение и других задач XI серии.

Анализ решений экспериментальных задач показал, что указанная особенность, по-видимому, имеет общее значение. Исследованные нами способные ученики, встречаясь с новым типом задач (таких задач они прежде не решали в большинстве случаев), первую же конкретную задачу этого типа очень часто (но, конечно, не всегда) осмысливали и решали в общей форме как общую типовую задачу, выискивая «суть», выделяя главные линии, отвлекаясь от частного, от формы, от конкретных данных и чисел. По-видимому, это в каком-то отношении заменяло им изучение общего правила, в соответствии с которым надлежит действовать. Таким образом, решая первую конкретную задачу данного типа, они, если можно так выразиться, тем самым решали все задачи данного типа.

Причем одни из них осмысливали задачу в общем плане после решения ее в конкретном плане, другие же непосредственно перед решением переводили задачу в общий план, решали ее в общей форме и, только решив задачу в общей форме, подставляли конкретные данные и числа, «переводили» задачу обратно в конкретный план. Любопытно, что очень простые задачи способные учащиеся не решали в общей форме — они «сразу видели» ответ. Поэтому и обобщение следовало после решения задачи. Чем сложнее оказывалась задача, тем чаще прибегали учащиеся к обобщенному решению, давая этому уже знакомое

объяснение — «числа мешают понять задачу». Затруднения преодолевались именно тем, что задача осмысливалась в общем плане, с отвлечением от конкретных данных.

Осмыслив на первой же задаче общий принцип решения задач данного типа, способный ученик именно вследствие этого легко переносит этот принцип решения на другие задачи этого типа, так как в каждой последующей задаче этого типа он видит один из вариантов («дубликат», как выразился один из них) знакомого ему общего типа задач. Его уже не смутит то обстоятельство, что в одной задаче речь идет о кроликах, а в другой — о рублях или о километрах. Такое обобщенное решение позволяет в дальнейшем получить большую экономию умственных сил, так как, по выражению С. И. Шапиро, «другие задачи данного типа фактически решены еще до того, как они поставлены».

Иллюстрируем данное положение примером.

Способный ученик К. Р. на решении одного примера самостоятельно и по своей инициативе вывел формулу сокращенного умножения (квадрат суммы двух чисел), рассуждая при этом так: « $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$. Два средних члена всегда будут одинаковыми, так как при любых числах это значит, что два раза умножаем первое число на второе. Проще делать так: вместо двух умножений и сложения сразу удваивать результат умножения первого на второе. Значит, всегда, когда есть сумма двух чисел в квадрате, какие бы они ни были, можно делать так: складывать квадраты каждого из них и прибавлять двойное произведение их, т. е. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ».

Другой пример: решение задач VI—В—1 и VI—В—3 способным учеником В. Г. (решение задачи в общем плане). Медленно прочитав задачу два раза, ученик приступает к решению: «В этой задаче все построено на трех данных: общем количестве, скорости изготовления и времени. Они связаны такой зависимостью: $O = C \cdot B$ (так ученик обозначил эти три величины). Одна из них известна, другую нужно обозначить через x , а третью можно выразить через первые две, а потом, наверное, что-то можно приравнять. Ну-ка, как это будет выглядеть в этой задаче? Тут два случая (чертит таблицу и быстро заполняет ее):

	1	2
O	x	$x - 100$
C	48	50
B	$\frac{x}{48}$	$\frac{x - 100}{50}$

Рис. 56

А что можно приравнять? Вот здесь сказано, что за три дня до срока, значит, время во втором случае на 3 дня меньше, чем время в первом случае. (Решает задачу без затруднений.) Ну, ясно, как решать такие задачи (весьма характерное замечание; решая одну задачу, ученик понимает, как решать все такие задачи.—В. К.)». Переходя к решению задачи VI—В—3, ученик, медленно прочитав один раз задачу, сказал: «Эта решается так же», быстро набросал таблицу и без затруднений заполнил ее (см. рис. 57).

	1	2
<i>O</i>	$x - 400$	$x + 200$
<i>C</i>	240	280
<i>B</i>	$\frac{x - 400}{240}$	$\frac{x + 200}{280}$

Рис. 57

Взглянув еще раз в задачу, сказал: «Время-то одинаковое» — и быстро записал равенство: $\frac{x - 400}{240} = \frac{x + 200}{280}$ после чего решить задачу не составило никакого труда. На просьбу экспериментатора пояснить, как он решал задачу, ответил: «Решал так же, как и ту. Здесь и думать нечего, задача сама решилась. Она такого же типа». На просьбу все-таки пояснить это, он свободно и без затруднений объясняет: «И там и здесь имеет место комбинация трех показателей: общего количества, времени и количества в единицу времени (показывает). Разница, конечно, есть — в этой задаче говорится про столы, а в этой — про деревья, да и узнать нужно разное».

2-й этап

На втором этапе, как говорилось выше, исследовалась группа очень одаренных детей. И эти материалы полностью подтвердили ту характеристику обобщенного математического мышления, которая была установлена на первом этапе исследования. Конкретный материал можно извлечь из характеристик этих детей, которые были даны в главе II.

Способность к широкому обобщению математических объектов, отношений и действий «с места» проявлялась у этих детей весьма ярко, несмотря на их возраст (8—10 лет). Анализируя исходный пример или исходную задачу без какого-либо сопоставления и сравнения, они с удивительной для их возраста бы-

стротой «схватывали» основные отношения и уверенно осуществляли перенос действия на весьма отдаленные объекты.

Приведем несколько наиболее выразительных примеров.

Девятилетняя Соня Л. только что познакомилась со способом разложения многочленов на множители путем вынесения общего множителя за скобки. Усвоила она это на одном единственном простом примере: $5a + 5b = 5(a + b)$. Сразу после этого ей дается максимально усложненный пример:

$$4m^2(2p - q) - 2m(q - 2p) - 2m(q - 2p).$$

Здесь по сравнению с исходным примером выносятся за скобки очень сложный множитель, да еще предварительно надо догадаться переменить в одной из скобок знаки на обратные. Вот запись решения: «Ой, какой пример! Но он только с виду трудный. Сразу видно, что во всех трех частях есть общий множитель... даже два, нет, три — в двух скобках надо поменять знаки только (сразу пишет): $2m(2p - q)(2m + 2)$ ». Эксп.: «Расскажи, как у тебя получилось выражение во второй скобке. Соня Л.: «Ну, от первого члена получилось $2m$, а от второго и третьего после перемены знака две единицы, которые я сразу сложила». Эксп.: «А почему ты решила, что этот пример похож на предыдущий?» Соня Л. (удивленно): «Ну, а как же? Пусть будет сколько хочешь членов и какие хочешь члены, но если будут общие множители, можно их выносить за скобки».

Способность к обобщению, как известно, тесно связана со способностью к дифференцировкам. Одаренные дети удивительно тонко дифференцируют очень сходный материал. Некоторым из них были предложены две задачи (взятые из исследования С. И. Шапиро): 1) Человек поднимался в гору со скоростью 2 км в час, а спускался с нее со скоростью 6 км в час. Найти среднюю скорость. 2) Путник шел со скоростью 6 км в час. Пройдя некоторое расстояние, он почувствовал усталость и уменьшил скорость до 2 км в час. Когда он пришел на место, то оказалось, что со скоростью 6 км в час он шел ровно столько времени, сколько и со скоростью 2 км в час. Найти среднюю скорость.

Ни один из учащихся седьмых классов со средними способностями к математике, которым я предлагал эти задачи, не усмотрел никакой разницы — все дали одинаковые ответы — 4 км в час (хотя их настойчиво просили подумать). Все же дети из группы очень способных (7 чел.) дали правильные ответы: 3 км в час и 4 км в час. Вот типичное рассуждение (Гили Х.): «Задачи, конечно, похожи, но есть разница. Всё как будто одинаково — и слова и цифры. Но большая разница вот в чем: в первой задаче расстояние, которое проходится с одной и с другой скоростью, одинаково, а во второй — время движения с одной и с другой скоростью одинаково. В первом случае обе

скорости продолжались разное время — с меньшей скоростью человек двигался, конечно, дольше, чем с большей, поэтому и средняя скорость будет не посредине, а ближе к 2, чем к 6. Во втором случае обе скорости продолжались одинаковое время, поэтому средняя скорость будет посредине — 4 км в час. А в первом случае так: вверх 1 км за $\frac{1}{2}$ часа, вниз — 1 км за $\frac{1}{6}$ часа, а в среднем 1 км проходил за $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) : 2 = \frac{1}{3}$ часа, т. е. средняя скорость была 3 км в час».

Стремление к решению задач в обобщенной форме (либо к немедленному обобщению конкретного решения задачи) у очень способных детей приобретает характер своеобразной потребности (по наблюдениям С. И. Шапиро, это достигает своего полного развития у способных школьников старшего школьного возраста). Их не надо ставить перед задачей обобщить какие-либо математические объекты, отношения или действия — они это делают охотно по собственной инициативе. Эти способные ученики уже первую конкретную задачу нового для них типа решали обычно как общую, типовую задачу. Если обычный ученик решал задачу А как задачу А и только, то способный ученик решал задачу А как задачу и А, и А₁, и А₂, и А₃... и А_n, т. е. все задачи данного типа.

В главе II уже приводился выразительный пример обобщения Соней Л. доказательства теоремы о сумме внутренних углов треугольника, которое позволило ей тут же самостоятельно вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника. Приведем еще характерный пример перевода задачи в общий план до ее решения. Девятилетняя Соня Л. решает задачу: «Если на каждую палку сядет по одной галке, то одной галке не будет места; если на каждую палку сядут по две галки, то одна палка будет лишняя; сколько было галок и палок?» Решение: «Вроде простая задача, а труднее, чем те... Здесь разное размещение... В общем имеется 2 неизвестных числа... Если первое разделить на второе число, то получится остаток, а если на другой делитель... нет, не так... Если первое число разделить на второе, то получится либо какое-то число с остатком, либо число на единицу больше, но с недостатком (выражение Сони. — В. К.). Как же решать такие задачи?... (Не «эту», а «такие»! Подобное замечание характерно для способных учащихся. — В. К.). А, догадалась... ведь это значит, что остаток плюс недостаток равняются второму числу! (Экспериментатор просит пояснить.) Ну, как же: ведь после второго деления получилось на единицу больше, а это потому, что остаток плюс недостаток составляют как раз второе число. Теперь знаю, как решать такие задачи! (Эксп.: «Постой, но задачу-то ты не решила! Сколько же палок и галок?»). А, я и забыла... сначала одна галка лишняя, потом двух

не хватает. Значит, 3 палки и 4 галки». Здесь очень интересно, что, решив задачу в общем плане, Соня даже забыла о существовании исходной задачи.

Она же решает задачу: «Дочери 8, матери 38 лет. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?» «Значит так: растет мать, растет и дочь. Их года меняются... А разница у них не меняется, мать всегда будет старше на одно и то же число... Ну, понятно: в матери несколько дочерей (так выразилась Соня. — В. К.) значит, в разнице должно быть на одну меньше... Здесь как — в три раза? Значит, в матери три дочери, а в разнице — две дочери. Разница — 30, а дочери 15 лет. Значит, через 7 лет». Как только Соня уловила тип задачи и схему ее решения (и это было сделано «с места!»), подобного типа задачи она стала решать быстро и безошибочно.

Характерная для очень способных потребность в обобщении, о которой упоминалось выше, сказывалась и в том, что часто они буквально противодействовали попыткам экспериментатора ориентировать их на конкретное решение данной конкретной задачи. Саша Л. решает задачу: «Книга вчетверо дороже блокнота. Блокнот на 30 коп. дешевле книги. Сколько они стоят в отдельности?» Саша: «Как решаются задачи, где нужно найти число, которое во столько-то раз больше данного и на столько-то больше него? Их надо решать, пожалуй, так... (Эксп.: «Слушай, Саша, да не надо этих общих рассуждений. Задача-то ведь простая — дай сразу ответ!»). Да нет, мне хочется понять, как вообще их решать. Подождите минутку (продолжает решение в общем плане)».

Гиля Х. решает задачу: «Поезд проходит мимо телеграфного столба в течение 15 сек., а через мост длиною 450 м за 45 сек. Какова длина поезда и скорость его?» Он избирает обобщенный путь решения, решая эту задачу как задачу: «Поезд проходит мимо столба в течение t сек., а через мост длиною S м за t_1 сек». Несмотря на все попытки экспериментатора «сбить» его с этого пути, на ограничение времени решения, Гиля все-таки продолжал решение, вывел формулу: x (длина поезда) = $\frac{S \cdot t}{t_1 - t}$ решил задачу и удовлетворенно заметил: «Зато теперь я любую такую задачу, не думая, решу!»

3-й этап

На третьем этапе исследовалась группа неспособных учеников.

Детальное исследование (в течение года) группы неспособных учеников еще раз убедительно показало, что в процессе самостоятельной работы им доступна лишь элементарная степень обобщения математического материала. Более высокий уровень обобщения (необходимый для сколько-нибудь удовлетво-

рительного овладения математикой) наступал лишь постепенно, в результате очень большого труда и при прямой помощи экспериментатора. В ряде случаев такое обобщение возникало только в результате специально организованной экспериментатором работы. В трудных случаях обобщение не возникало совсем.

Например, в наших экспериментах подавляющее большинство испытуемых с трудом переходили от одной ступени обобщения к другой, причем каждая такая ступень должна была закрепляться значительным количеством упражнений. Им понадобилось от 8 до 12 однотипных упражнений типа $x^2 \cdot x^3 = x^5$, прежде чем они догадались, как решить пример $x^n \cdot x^m$ и 9—10 упражнений типа $x^n \cdot x^m$ для того, чтобы подвести под эту схему и примеры типа $x^{n+2} \cdot x^{2-n}$.

Ни один из испытуемых учащихся не сумел правильно указать и аргументировать, какие из данных алгебраических выражений (V—Б) могут быть подведены под формулу «квадрат суммы двух чисел» и какие нет. Некоторые из них подводили под эту формулу только первое выражение, другие — все 12 (например, испытуемые Г. С. и В. Б.). Во втором случае обобщение было явно поспешным, несовершенным и осуществлялось по чисто внешнему признаку («Всюду есть a и b и двойки»).

Крайне показательным было решение нашими испытуемыми основных задач V—Б. Разумеется, никто из испытуемых по началу не усмотрел ничего общего существенного (с их точки зрения) в исходном примере и конечном варианте. Не повлияла в этом отношении и помощь со стороны экспериментатора. Испытуемые указывали на то, что «тут и буквы другие, и степени есть, и дроби — а в первом ничего этого нет». Двое испытуемых (И. Г. и В. У.) указали, что «общее здесь только скобки да двойка за скобкой», но в ответ на вопрос экспериментатора («А разве это не важно?») ответили: «Нет, примеры все-таки совсем другие, их по этой формуле нельзя решать». Самостоятельно усмотреть возможность применения данной формулы сокращенного умножения к решению примеров V—Б испытуемые ученики не могли даже в отношении примеров второго и третьего вариантов. Лишь на задачи первого варианта большинство учащихся (11 из 19) самостоятельно перенесли способ решения исходной задачи. Остальные (8 из 19) сумели сделать это только с помощью экспериментатора. Переход к задачам каждого последующего варианта наши учащиеся самостоятельно осуществить не могли, да и не все наводящие вопросы, советы и соображения экспериментатора оказывались действенными в этом отношении. Особенные затруднения вызывал переход от исходной задачи к задачам четвертого, пятого и шестого вариантов.

Казалось бы, ученик понял, обобщил решение алгебраической задачи. Но при решении следующей задачи ученик вновь испытывал те же затруднения и вновь нуждался в помощи

экспериментатора, причем беседа проходила почти по той же схеме. И так было почти со всеми.

Следовательно, обобщение наступало лишь после многих упражнений, после специальной тренировки, причем в наших опытах никогда не было достаточно широким.

Такая же картина наблюдалась и с задачами VI серии. Ни один из учащихся не усмотрел без помощи экспериментатора общего типа в задачах этой серии. И наоборот, большинство (14 из 19) усматривали что-то общее в задачах, относящихся к разному типу. Остальные (5 из 19) уверяли, что все задачи — задачи разных типов.

Эти учащиеся в подавляющем большинстве случаев не сумели обобщить задачи и объединить их в общий тип даже тогда, когда с помощью экспериментатора решили их и получили возможность сравнить готовые принципы решения той и другой задачи. Если им давали третью задачу этого же типа, они и ее не подводили под известную схему, а решали как совсем особую задачу. Нужно, чтобы задачи одного типа уж очень походили бы одна на другую, чтобы учащиеся объединили их в один тип. Лишь четверо учащихся сумели правильно дифференцировать одни задачи и объединить другие, но и то только тогда, когда сопоставили схемы решения этих задач.

Недостаточная способность обобщать математический материал, когда все условия для такого обобщения имелись, неспособность усматривать общность во внешне различном, своеобразном характеризовала не только решение экспериментальных задач, но и весь процесс экспериментального обучения неспособных детей математике.

Отвлечься от конкретных числовых выражений нашим учащимся всегда было трудно. Основные трудности в изучении алгебры были связаны с необходимостью за буквенными обобщенными обозначениями мыслить числа. Наши учащиеся с трудом (один — с большим, другие — с меньшим, но все — с трудом!) понимали самую суть алгебры, представляющую собой действия с числовыми абстрактами. Им трудно было понять, что буквы в алгебре — это числа, лишенные своего конкретного выражения (см. также В. А. Александров [18]). Многие из них долгое время были убеждены в том, что алгебра — это действия с буквами, которые можно складывать, умножать, возводить в степень по определенным правилам. Аналогичные трудности наблюдались и при изучении геометрии. Построить доказательство в общей форме ученикам всегда было трудно. Им трудно было понять самую суть геометрического доказательства, заключающуюся в том, что доказывая теорему на каком-то одном частном случае, конкретной фигуре, мы тем самым доказываем ее вообще для всех возможных аналогичных случаев, т. е. обобщаем доказательство. Они не понимали главного, что этим открывается

возможность выйти за пределы чувственного опыта, так как всех вариантов показать невозможно.

Как мы уже указывали ранее, в процессе опытного обучения геометрии мы несколько раз предлагали многим из наших учеников доказать одну и ту же теорему последовательно для разных вариантов фигур и почти никогда ученики не понимали при этом, что, доказав один раз, они доказали теорему сразу для всех возможных вариантов (хотя мы наталкивали их на эту мысль словами: «Значит, мы доказали, что в этом треугольнике сумма внутренних углов 180° . Ну, а чему она будет равна в таком треугольнике?»). Ученик снова строил доказательство, получал тот же результат, но... (как это было в случае с В. Д.) полагал, что это — случайное совпадение. Он всерьез рассчитывал получить в другом случае другой результат и едва ли удивился бы, если бы, допустим, оказалось (в результате ошибки), что сумма внутренних углов какого-то треугольника равна 270° . Разумеется, что всякое непривычное или необычное изображение фигуры дезориентировало учеников, которые при этом условии не могли доказать известной им теоремы, так как даже не пытались обобщить схему доказательства.

4-й этап

На четвертом этапе, как уже указывалось, по сериям на обобщение исследовалась группа в 54 человека (в том числе 24 способных, 22 средних и 8 неспособных). На качественной стороне решений экспериментальных задач остановимся кратко, так как материалы в этом отношении полностью подтвердили ранее установленные положения. Уделим основное внимание количественной обработке материала.

В результате исследования способности к обобщению математического материала намечались следующие уровни этого обобщения учениками с различными способностями к математике:

1. Учащиеся не могут обобщить математический материал по существенным признакам даже с помощью экспериментатора и после ряда промежуточных однотипных тренировочных упражнений.

2. Учащиеся обобщают математический материал по существенным признакам с помощью экспериментатора и после ряда однотипных тренировочных упражнений, допуская при этом отдельные неточности и ошибки.

3. Учащиеся обобщают математический материал по существенным признакам самостоятельно, но после нескольких однотипных упражнений и с незначительными ошибками. Правильное безошибочное обобщение наступает при незначительных подсказках или наводящих вопросах экспериментатора.

4. Учащиеся обобщают математический материал правильно и сразу, «с места», не испытывая затруднений, без помощи экспериментатора, без специальной тренировки в решении однотипных задач.

Для статистической обработки мы выбрали серии на обобщение, через которые полностью было проведено максимальное количество учащихся. Такими сериями оказались V, VI, VII и IX, через которые было проведено на всех четырех этапах 96 человек (54 чел., о которых уже говорилось, по 19 чел. на первом и третьем этапах и 4 из группы очень одаренных). Из этих 96 человек было 4 очень способных, 33 способных, 37 средних и 22 неспособных. На основании решения задач каждой из указанных серий эти испытуемые были отнесены к тому или иному уровню обобщения. Сводные данные представлены в таблице 14.

Покажем на решении теста V—A типичный для учащихся каждой группы ход обобщения (пояснения см. раздел II, гл. IV). Схемы (см. рис. 58—61) составлены по результатам четвертого этапа исследования. На схемах показаны по каждой группе лучший и худший результаты (обозначены соответственно различными линиями). Во всех опытах допускалась только незначительная помощь со стороны экспериментатора, — выяснялось, насколько успешно продвигается испытуемый именно в таких условиях. Группа неспособных решала тест V—A только для сравнения, в дальнейшем она переводилась на более легкий тест V—Б.

Различия, как это видно из схем, очень ярко выражены. Способным для переноса решения с 1-й на 8-ю задачу нужно было решить не более 3 задач, средним — 5—17 (при средней, имеющей наибольшую частоту «моды» — 13), неспособные же вообще

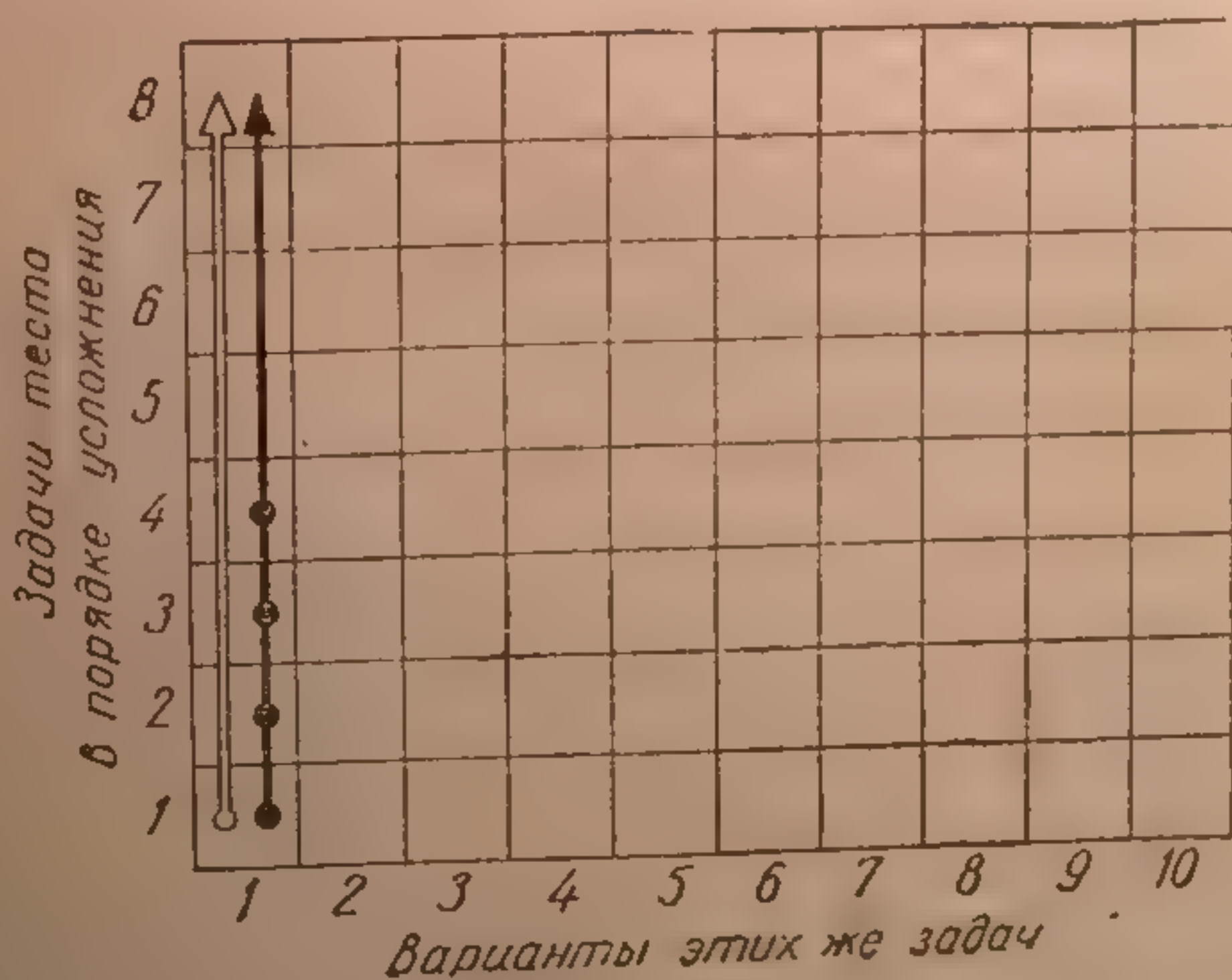


Рис. 58. Схема I. Группа испытуемых, способных к математике.

не могли в условиях эксперимента осуществить такой перенос. В лучшем случае, чтобы «добраться» до 6-й ступени, потребовалось 30 упражнений, в худшем — чтобы «добраться» до 3-й ступени, потребовалось 20 упражнений (последующие 15 упражнений так и не помогли дальнейшему обобщению).

Кратко остановимся на результатах решения испытуемыми задач тех серий, которые использовались только на четвертом этапе исследования.

Таблица 14

Группировка испытуемых по уровням обобщения математического материала (в % к общему количеству испытуемых в группе)

Группа	Серия	Уровни обобщения			
		1	2	3	4
ОСП	V	—	—	25,0	75,0
	VI	—	—	—	100,0
	VII	—	—	—	100,0
	IX	—	—	25,0	75,0
СП	V	—	—	30,3	69,7
	VI	—	—	27,3	72,7
	VII	—	—	21,2	78,8
	IX	—	—	24,2	75,8
СР	V	—	73,0	27,0	—
	VI	—	59,5	40,5	—
	VII	—	45,9	54,1	—
	IX	—	64,9	35,1	—
НСП	V	100,0	—	—	—
	VI	86,4	13,6	—	—
	VII	77,3	22,7	—	—
	IX	95,4	4,6	—	—

Примечание. Отмечая не очень большую разницу в результатах групп ОСП и СП, следует учитывать, что первые исследовались в возрасте 9—11 лет, а вторые — 13—14 лет (по одним и тем же сериям).

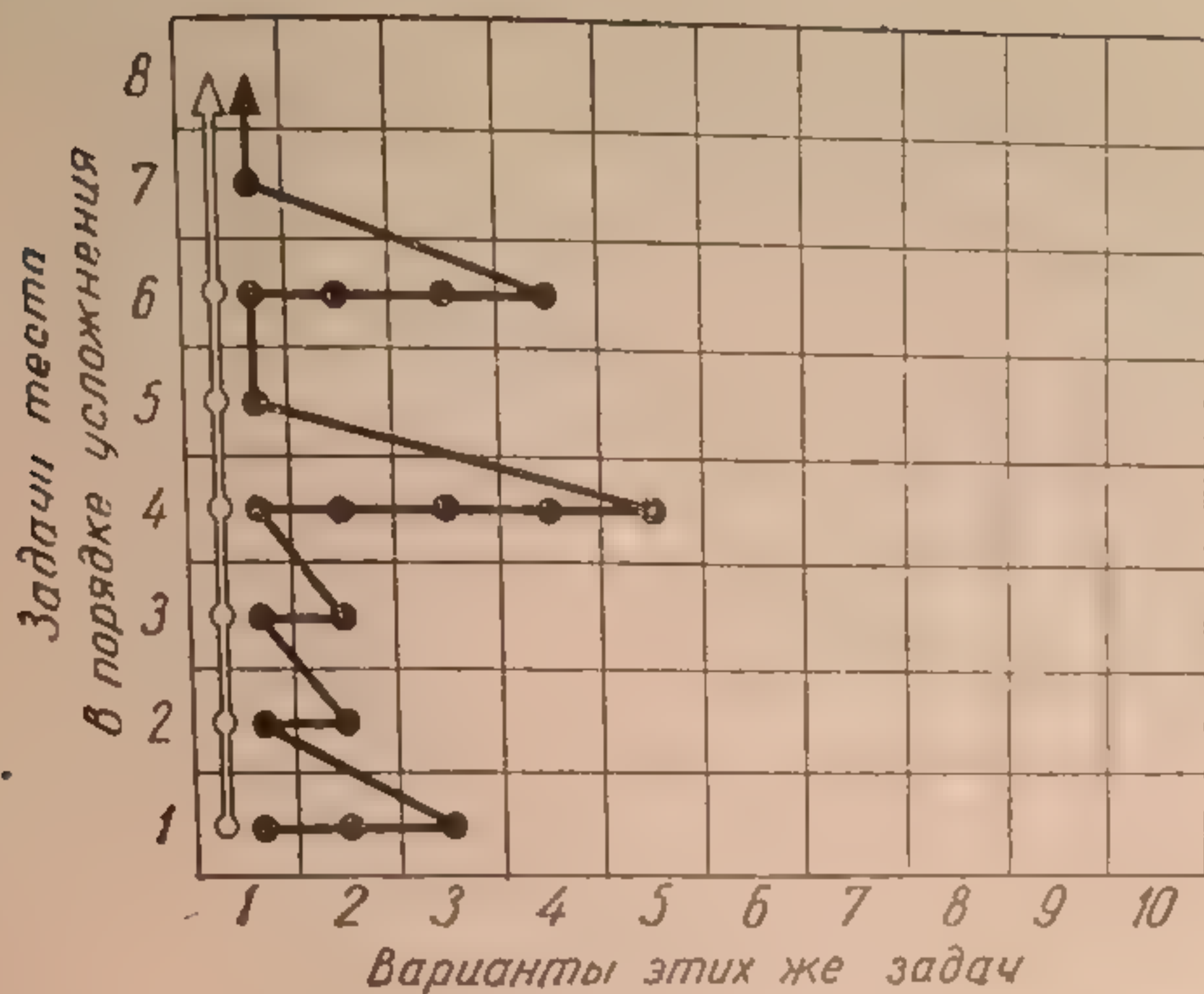


Рис. 59. Схема II. Группа испытуемых со средними способностями к математике.

Задачи VIII серии были рассчитаны на выявление возможности произвести обобщение ряда сходных явлений в результате анализа лишь одного явления этого рода, без сравнения и сопоставления одного явления с другим.

Подавляющее большинство способных успешно справилось с тестами этой серии. Они сумели, анализируя лишь один пример, одну задачу, составить определенное представление о том, какими существенными общими признаками должны обладать все примеры, задачи этого типа. Глубокое понимание сущности

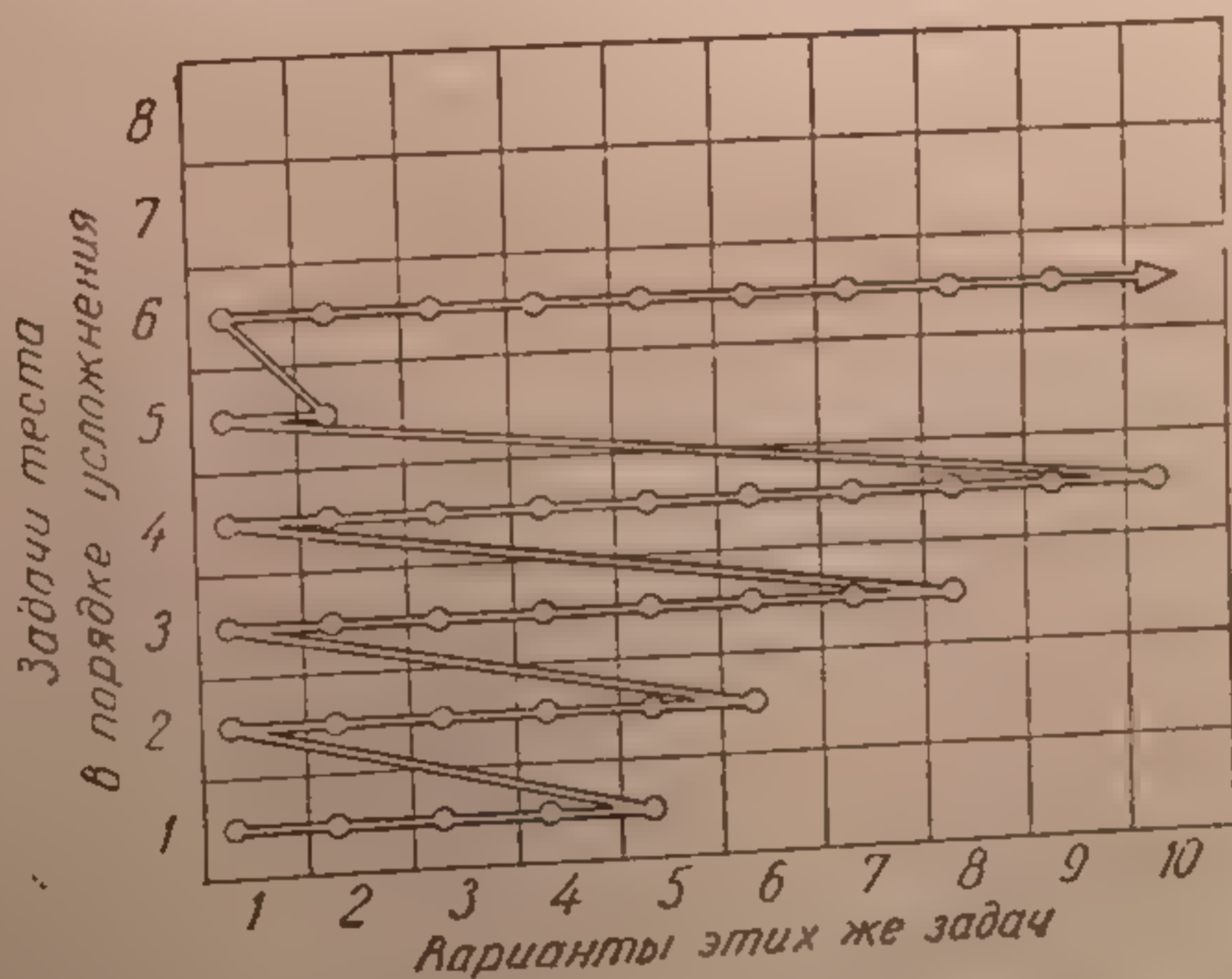


Рис. 60. Схема III. Группа испытуемых, неспособных к математике (лучший результат).

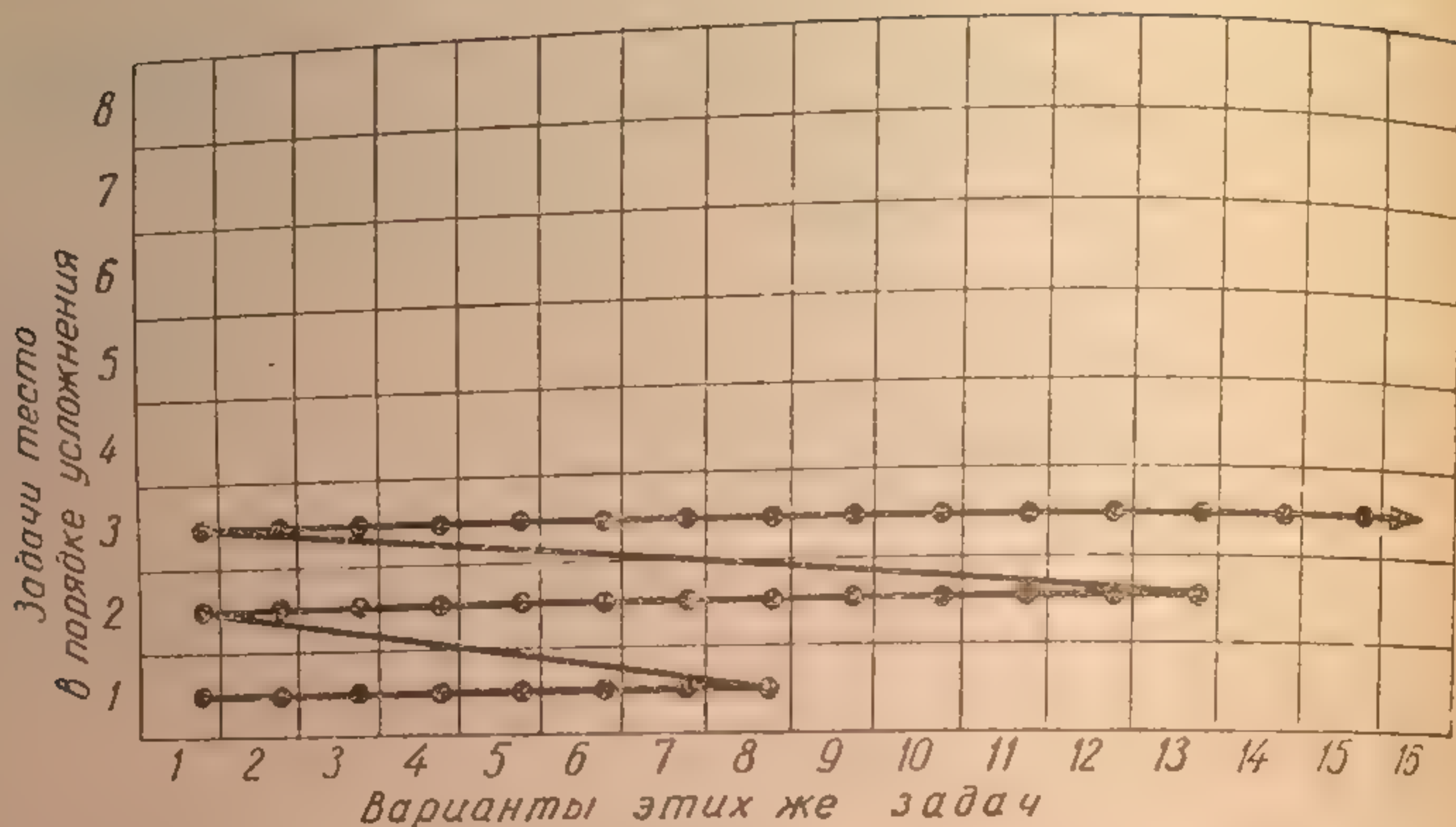


Рис. 61. Схема IV. Группа испытуемых, неспособных к математике (худший результат).

этого единичного явления (примера, задачи) заменяет им сравнение и сопоставление многих однотипных явлений.

Как же способные ученики анализируют это одно явление и обобщают явления, с которыми они еще, собственно, не встречались? Представление об этом процессе дадут следующие отрывки из протоколов исследования. Семиклассник С. С. решает задачу VIII—А—2 (составить задачу, аналогичную данной): «Составить такую же задачу, как эта, — значит составить такого же типа... В чем суть этой задачи? Рыбаки, папиросы — это не важное. Имеется 3 одинаковых неизвестных количества. Они уменьшаются на одно и то же известное число, после чего остатки всех количеств равны каждому количеству до уменьшения. Если все остатки вместе равны целому, то каждый составляет $\frac{1}{3}$ этого целого. А уменьшилось на $\frac{2}{3}$. Значит, известное

уменьшение есть $\frac{2}{3}$ числа. Папирос у каждого было по 6. Так...

Что было 3 начальных количества — это тоже не важное. Могло быть и 4 и 5. Значит, так: есть несколько равных неизвестных количеств, от каждого отняли поровну, после чего все остатки в сумме равны каждому. Ну, теперь таких задач можно хоть сто составить. Ну, например: у четверых друзей было поровну денег. После того как каждый истратил по 60 коп., у всех вместе осталось столько, сколько сначала было у каждого. Вот и задача. А вот еще: у пяти охотников было поровну пуль. Когда каждый выстрелил по 12 раз, то у всех осталось пуль столько, сколько было сначала у каждого. Сколько пуль было?»

Задачу VIII—А—1 решает шестиклассница Ю. К.: «Ну, это простая задача. Составить такую же просто. Надо только сна-

чала ее понять. Что тут важное, а что не нужное для таких задач? Ну, данные числа — это важно только для этой одной задачи. «Рабочие», «детали» то же самое. Все выбросили, а что осталось-то? Есть сумма и одно слагаемое, можно определить, найти другое. Значит, так: из двух сел на реке, расстояние между которыми 486 км, выехали в одно время навстречу две моторки. У одной скорость 26 км в час. Какая скорость у другой, если они встретились через 9 час. после отплытия». Эксп.: «А почему ты думаешь, что эти задачи одного типа?» Ученица: «Конечно, одного. Ведь они решаются одним способом».

Она же выполняет задачу VIII—Б—5. «Общая формула четного числа? Всякого? Четное всегда делится на 2. Значит, если умножить любое число на 2, всегда получится четное. Будет $2a$. А вот и моя задача: написать общую формулу нечетного числа. Будет $2a + 1$ ».

Приведенные примеры показывают, что анализ в этом случае принимает направленный характер, ориентированный на отделение существенных признаков от несущественных. Если при обычном пути обобщения средний ученик путем сопоставления усматривает общность признаков, то в данном случае ученик из существенности признаков умозаключает об их общности. Анализируя одно явление, разумеется, нельзя видеть, что признак является общим. Но можно видеть, что он является существенным; а быть существенным — значит быть необходимым и, следовательно, он должен быть и общим для ряда явлений этого типа, т. е. неизбежно повторяться. Для выявления существенного и общего способным учащимся совсем не обязательно сравнивать, какие особенности повторяются, а какие варьируют (как это делают ученики средних способностей). Указанная особенность мышления связана со способностью к формализованному восприятию математических объектов и отношений — когда «видишь скелет», то наполнить его конкретным содержанием уже не трудно. Это и дает способным возможность на единичном понять и тип, и все разнообразие вариаций внутри него. В этом их большое преимущество перед средними учениками. Ведь существенное общее не просто повторяющееся единичное (а при сопоставлении как раз это и может ввести в заблуждение). Как писал С. Л. Рубинштейн, «нечто является существенным не потому, что оно оказалось общим для ряда явлений, а оно потому, что оно оказывается общим для ряда явлений, что оно существенно для них» [353, стр. 40]. «Из того, что определенное свойство существенно для соответствующих явлений, с необходимостью вытекает его общность для этих явлений» [353, стр. 42].

Задачи X серии были направлены на исследование особенностей обобщения способа решения — выработки своеобразного стереотипа решения как закрепленного обобщенного хода решения (Ю. А. Самарин [363, стр. 246]. Е. Н. Кабанова-Меллер

говорит в таких случаях о формировании приемов умственной деятельности, понимая под этим владение обобщенным способом действия [148, стр. 67].

Эксперименты показали, что способные к математике школьники «с места», на основании анализа лишь одного примера или задачи данного типа, не только обобщают задачи, но и вырабатывают обобщенные способы, алгоритмы решения целого класса однотипных задач, общие способы рассуждения.

Вот количественные показатели решения задач X—А школьниками с различными способностями к математике (пояснения см. в разделе II, гл. IV).

Способные. Лучший результат: сразу осуществлен перенос принципа решения с 1-й на 12-ю задачу. Худший результат: 1—8—10—12 (принцип решения сразу перенесен с 1-й на 8-ю задачу, потом самостоятельно решены 9-я и 10-я задачи и в зоне ближайшего развития находятся 11-я и 12-я задачи).

Средние. Лучший результат: 1—5—7—8 (принцип решения сразу перенесен с 1-й на 5-ю задачу, потом самостоятельно решены 6-я и 7-я задачи и в зоне ближайшего развития находится 8-я задача). Худший результат: 1—4—5—6.

Неспособные. Лучший результат: 1—2—2—4 (принцип решения перенесен с 1-й на 2-ю задачу, после этого самостоятельно продвинуться не мог, в зоне ближайшего развития находятся 3-я и 4-я задачи). Худший результат: 1—1—1—2 (принцип решения перенести не сумел ни на одну задачу, в зоне ближайшего развития — всего одна — 2-я задача).

Задачи XVIII серии были направлены на исследование способности вывести совершенно новое и незнакомое правило, закономерность, выразить в обобщенном виде функциональную зависимость на основании частных случаев, т. е. произвести самостоятельное обобщение типа маленького «открытия». В тестах этой серии особенно резко проявились различия. Ни один неспособный ученик не справился с тестами указанной серии, в то время как все способные успешно справлялись с заданием.

Подавляющее большинство способных (20 из 24) сразу в общем виде решили тест XVIII—А, даже не испытывая потребности возвести в квадрат отдельные числа, проанализировать и сравнить полученный результат. Приводим отрывок из протокола (Я. Л. VI кл.): «А зачем сравнивать числа — я лучше по-другому сделаю. Все эти числа составлены так: 25, 35, 45 — это $10x+5$. $(10x+5)^2=100x^2+100x+25$. Если 25 за скобку, то... да нет, это ничего не дает... Да тут и не надо больше ничего делать! Будет так: первую цифру в квадрате и приписать два нуля, потом первую цифру просто и приписать два нуля и потом 25. Все сложить. Просто и быстро: $95^2=8100+900+25=9025$ ».

Ни один испытуемый из неспособных не пришел к такому обобщению и не нашел простейшего алгоритма для возведения

в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5, несмотря на помощь со стороны экспериментатора. Единственное, что они могли усмотреть (именно увидеть, а не объяснить), — это то, что квадраты таких чисел всегда будут оканчиваться на 25.

Абсолютно то же самое показали и другие тесты этой серии. Например, тест XVIII—В (индуктивное выведение зависимости между величинами сторон треугольника). Способные шестиклассники обычно на первых же примерах «схватывали» эту зависимость: «Любые две стороны в сумме всегда должны быть больше третьей» или «самая длинная сторона должна быть все же меньше, чем две другие вместе». «Если две стороны будут в сумме равны третьей, то они совпадут с ней и треугольника не будет — будет одна линия. А если две стороны будут вместе меньше третьей, то они не «дотянутся» друг до друга и тоже треугольника не получится». (Ф. С. — способный, VI кл.). Причем рассуждения такие не базировались на сопоставлении разных случаев — достаточно было провести анализ одного случая и закономерность была сформулирована (если способный и пробовал до этого 1—2 варианта, то не с целью сопоставления, так как анализ все равно проявлялся на одном случае).

Неспособные же приходили к подобному обобщению в результате многих проб и обычно лишь с помощью экспериментатора. Они в течение продолжительного времени (до 20 мин.) осуществляли беспорядочные пробы, испытывая множество комбинаций, видели, что в одних случаях треугольник «получается», в других — «не получается», но без помощи экспериментатора вывести искомую закономерность не могли.

Подведем некоторые общие итоги.

Интерпретация выделенного с помощью факторного анализа общего фактора является совершенно бесспорной. Общий фактор здесь — это способность к обобщению математических объектов, отношений и действий. Конечно, эта способность в какой-то мере присуща всем учащимся, иначе они не могли бы сколько-нибудь успешно изучать математику. Но у способных к математике обобщение математического материала отличается качественным своеобразием.

В советской психологии установлено положение о том, что всякое, в том числе и математическое, обобщение опирается на сопоставление частных случаев и постепенное выделение общего, причем должна быть обеспечена широкая вариация несущественных признаков при инвариантности существенных. Д. Н. Богоявленский в обобщающем докладе на II съезде Общества психологов СССР «Психологические предпосылки развивающего обучения» (1963 г.) указывал на необходимые условия организации познавательной деятельности учащихся: 1) выведение общего на основе анализа достаточного количества типичных

конкретных фактов и 2) вариация конкретного материала, облегчающая выделение существенных признаков [43, стр. 85].

О том же пишут Н. А. Менчинская и М. И. Моро уже в применении к обобщению в сфере арифметики: «Необходимым условием для формирования правильных обобщений у школьников является варьирование несущественных признаков... при сохранении постоянными, неизменными существенных» [292, стр. 24]. Наряду с этим Н. А. Менчинская, Д. Н. Богоявленский, Е. Н. Кабанова-Меллер, З. И. Калмыкова, В. И. Зыкова отмечают, что дело не в количестве вариаций, а в рациональной вариации, которая не всегда должна быть очень широкой, так как все равно часто невозможно исчерпать все многообразие чувственного опыта, лежащего в основе усвоения того или иного понятия. Задача состоит в том, чтобы раскрыть учащимся возможность выхода за пределы ограниченного чувственного опыта.

Исследования Е. Н. Кабановой-Меллер показали, что и рациональной вариацией несущественных признаков ограничиваться нельзя, — следует выражать словесно как существенные, так и основные вариации несущественных признаков, так чтобы учащиеся отдавали себе отчет, в каких направлениях может идти варьирование несущественных признаков (Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [44, стр. 292—293], Е. Н. Кабанова-Меллер [147], [148], [149]).

Все эти положения совершенно правильны. Подтвердились они и в нашей работе на средних и неспособных учащихся, но их, по-видимому, нельзя отнести ко всем учащимся и рассматривать как необходимое условие всякого обобщения в математике.

На основании материалов нашего исследования, по-видимому, можно считать установленным следующее.

1) Путь постепенного обобщения не является единственным путем, ведущим к усвоению знаний по математике, что имеются два принципиально различных пути, ведущих к одному и тому же результату. Наряду с путем постепенного обобщения математического материала на основе варьирования некоторого многообразия частных случаев (путь большинства школьников) существует и другой путь, когда способные ученики, не сопоставляя «сходное», не сравнивая, без специальных упражнений и указаний учителя, осуществляют самостоятельно обобщение математических объектов, отношений, действий «с места» на основании анализа лишь одного явления в ряду сходных явлений. Каждая конкретная задача сразу же осознается ими как представитель некоторого класса однотипных задач¹ и решается в общей форме, т. е. вырабатывается общий способ (алгоритм) решения задач данного типа.

¹ Конечно, имеются и нетиповые задачи, к ним это положение не относится.

2) Способные учащиеся обобщают математический материал не только быстро, но и широко. Они очень легко находят существенное и общее в частном, скрытую общность в, казалось бы, различных математических выражениях и задачах.

3) Способные к математике учащиеся, наконец, обобщают и методы решения, принципы подхода к решению задач, поэтому способность к обобщению сказывается и на эффективности решения нетиповых, нестандартных математических задач.

Попытаемся интерпретировать полученные нами выводы с точки зрения учения об ассоциациях. И. П. Павлов неоднократно подчеркивал, что «мышление есть ассоциация», что «все обучение заключается в образовании связей, а это есть мысль, мышление...»¹. Способности к изучению математики сводятся к индивидуальным различиям в мыслительной деятельности, т. е. в конце концов к индивидуальным различиям в области образования ассоциаций, точнее, обобщенных ассоциаций.

Различие между способными, средними и неспособными учениками, как позволяет думать наше исследование, сводится к следующему. У способных учеников такие ассоциации могут образовываться «с места», в этом смысле они, если можно так выразиться, «рождаются» уже обобщенными, при минимальном количестве упражнений. У средних учеников такие ассоциации устанавливаются и закрепляются постепенно, в результате целой серии упражнений. «С места» у них образуются единичные, конкретные ассоциации, имеющие отношение только к данной задаче. Эти ассоциации постепенно, в результате однотипных упражнений, превращаются в обобщенные ассоциации. У неспособных же и единичные, конкретные ассоциации образуются с трудом, обобщение же их еще более затруднительно, а в некоторых случаях такого обобщения вообще не происходит.

В заключение отметим, что всюду у нас речь идет не об общей способности к обобщению, а о способности к обобщению в сфере числовой и знаковой символики, обобщению математических объектов, количественных и пространственных отношений, действий. Это есть своеобразная способность к обобщению обобщений (так как математические символы, числовые абстракты представляют собой уже продукт обобщения). Поэтому неверно было бы считать, будто бы из нашего исследования следует, что «обобщенное мышление — привилегия математиков» (как заключил один из наших уважаемых рецензентов). Но (как заключил один из наших уважаемых рецензентов). Но обобщенное мышление в сфере числовой и знаковой символики, количественных и пространственных отношений, математических объектов и действий — это, конечно, «привилегия математиков», если уж употреблять такое выражение.

Надо сказать, что полученные нами результаты подтвер-

¹ «Павловские среды», т. II, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949, стр. 580.

ждаются материалами других исследований, большинство которых проводились в то же самое или более позднее время. Различные авторы также наблюдали большие индивидуальные различия в области обобщения учебного (в том числе и математического) материала.

Н. А. Менчинская еще в 1946 г. отмечала, что в некоторых случаях числовые решения задач давались испытуемыми (взрослыми) после того, как осуществлялось «решение в понятиях» [289]. З. И. Калмыкова в ряде исследований отмечала индивидуальные различия в способности подвести задачу под общий тип [156]. Она констатировала, что, несмотря на более или менее одинаковые условия усвоения учебного материала по физике, требуется весьма различное число упражнений для того, чтобы учащиеся поднялись на высший уровень обобщения — у некоторых это происходило почти «с места», у других очень медленно, на основании широкого варьирования материала [157], [160]. З. И. Калмыкова отмечает, что количество упражнений, необходимых разным учащимся для образования понятия о решении определенного типа физических задач, колеблется от 2 до 88 [158], [159]. По данным Е. И. Машбица [284], для образования алгоритма решения типовых задач различным учащимся требовалось решить от 1 до 22 задач.

По данным Н. А. Менчинской и М. И. Моро (292), количество частных решений, необходимых для формирования обобщенного способа решения арифметических задач данного типа, колеблется от 2 до 19.

Л. Н. Ланда, отмечая недостаточную обобщенность умственных операций учащихся VII—VIII классов при решении геометрических задач [241], установил, что для формирования нового для учащихся метода решения таких задач после объяснения экспериментатора им потребовалось от 0 до 15 и более упражнений [238, стр. 52].

А. А. Бодалев в ряде исследований [46], [47], [48], [19] показал, что способности к обучению определяются способностью обобщать материал в сфере соответствующего учебного предмета. Он указывал в этой связи, что у относительно неспособных к изучению данного предмета учащихся обобщение возникает как результат большого труда или же не образуется совсем.

Наконец, отметим исследование французского психолога Л. Жоанно [620], который, анализируя процесс рассуждения школьников 13—18 лет при решении математических задач, установил на основании изучения индивидуальных различий 3 уровня абстракции и обобщения, начиная с полного неумения осмыслить решение задачи в абстрактной форме и кончая наличием уверенного отвлеченного рассуждения при решении задачи в общей (алгебраической) форме. Р. Эберт [563], изучавший (но на очень ограниченной и узкой тестовой методике) обобщающую

способность в математике у 900 школьников в возрасте 14 лет, отмечает очень большие индивидуальные различия в проявлении этой способности и «очень дифференцированные достижения».

§ 2. Способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий

Факт постепенного сокращения мыслительного процесса при решении задач знакомого типа известен давно. В частности, известные русские методисты С. И. Шохор-Троцкий [456] и Ф. А. Эрн [466] в своих книгах по методике арифметики указывали, что при многократном решении однотипных задач учащимися отдельные этапы мыслительного процесса сокращаются и перестают осознаваться, но, когда нужно, учащийся может вернуться к полному развернутому рассуждению. Из советских психологов Л. С. Выготский по существу первым специально обратил внимание на факт постепенного выпадения¹ отдельных звеньев рассуждения, благодаря чему мыслительный процесс приобретает свернутый вид.

В начале сороковых годов П. А. Шеварев [441], [445], [446], а за ним Н. А. Менчинская [289] установили соответственно на алгебраическом и арифметическом материале, что наряду с развернутыми умозаключениями в умственной деятельности школьников при решении задач занимают определенное место и свернутые умозаключения, когда ученик не осознает правила, общего положения, в соответствии с которыми он фактически действует. В результате в процессе решения задач ученик не выполняет всей той цепи соображений и умозаклучений, которые образуют полную, развернутую структуру решения. Н. А. Менчинская установила, что и в процессе решения учениками арифметических примеров и простейших задач происходит постепенное (на основе многократных упражнений) сокращение промежуточных звеньев рассуждения вплоть до его полного выпадения (хотя оно и продолжает лежать в основе выполняемой арифметической операции). В конце концов может образоваться прямая связь между условием задачи и ответом на нее.

Положения, выдвинутые П. А. Шеваревым и Н. А. Менчинской, были подтверждены и конкретизированы на материале ряда школьных предметов А. Н. Соколовым [388], Н. Ф. Талызиной [401], Л. П. Доблаевым [114], Н. К. Индик [145],

¹ «Выпадение», по-нашему мнению, не очень удачный термин, так как он носит нежелательный оттенок отрицательной характеристики явления, какого-то недостатка (аналогично «выпадению из памяти»). Речь же идет об очень рациональном явлении. Однако этот термин настолько прочно установился в психологии, что мы не считаем возможным заменить его другим.

В. Л. Ярошук [475]. Аналогичные наблюдения проводил и Д. Маергойз [270, стр. 143]. Подчеркивалось, что свертывание процесса рассуждения находится в зависимости от структуры и степени трудности задачи, а также от степени натренированности в решении задач соответствующего типа. Однако анализ указанного факта с точки зрения проблемы способностей, выявление специфики его проявления у учащихся с различными способностями к математике никем специально не проводилось.

Исследование способности к свертыванию процесса математического рассуждения проходило у нас те же 4 этапа (см. раздел II, гл. V). На первых этапах исследовалась, главным образом, качественная сторона процесса, на последнем — в центре внимания была количественная его характеристика.

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретного материала, обратим внимание на одно обстоятельство. Все исследователи отмечают, что свертывание — постепенный процесс, развивающийся на основе более или менее значительного числа однотипных упражнений. Еще П. А. Шеварев подчеркивал, что «на первых этапах овладения (типом задачи. — В. К.) задача выполняется посредством развернутого процесса, на позднейших — посредством сокращенного» [445, стр. 169]. Н. А. Менчинская писала, что сокращение процесса рассуждения «достигается лишь благодаря упражнениям» [44, стр. 91]. Д. Н. Богоявленский писал о том же: «Процессы мышления, протекавшие вначале полно и развернуто, постепенно, когда они проводятся через определенную стадию упражнений, приобретают сокращенный, свернутый вид» [45, стр. 75]. Это же отмечала и З. И. Калмыкова и многие другие исследователи.

Это положение совершенно верно (и полностью подтвердилось и нашими материалами) для основной массы учащихся — с обычными средними способностями к математике. Но для способных учеников указанное условие, по-видимому, не является обязательным. Способных учеников отличает довольно ярко выраженная тенденция к быстрому и радикальному свертыванию процесса рассуждения и соответствующей системы математических действий тоже в известном смысле «с места», так как она начинает проявляться уже на первой же задаче нового для них типа.

Дадим несколько примеров (разбивая процесс рассуждения на отдельные последовательные звенья). Начнем с V серии.

Рассуждение способного ученика С. Т. при решении примера $(C+D+E)^2$ (это второй пример, который решал ученик после овладения соответствующей формулой сокращенного умножения):

«1) Тут три числа, а формула — для двух чисел... как же тут быть? Число в формуле — это одно из двух слагаемых, а слагаемое может быть любым выражением... Но ведь из трех можно

сделать два (пишет: $[(C+D)+E]^2$). 2) Теперь получился квадрат суммы. Он равен, значит, первому числу в квадрате (пишет: $(C+D)^2$). 3) Первое число — опять квадрат. Ну, это легко по формуле (пишет: C^2+D^2+2CD). 4) Теперь квадрат первого числа есть. Надо прибавить квадрат второго числа (дописывает: $+E^2$). 5) А теперь прибавить еще удвоенный результат перемножения этих чисел (дописывает: $+2E(C+D)=$). 6) Теперь раскроем скобки и упростим (пишет: $C^2+D^2+2CD+E^2+2EC++2ED$). Подумав, говорит: «Нет, тут больше нечего делать. Все».

Как видно, свертывание рассуждения имеет место уже и на этом этапе. Вообще никогда и нигде, вероятно, человек не мыслит до конца развернутыми структурами. Полной, до конца развернутой картины рассуждения нет и в приведенном случае (логический анализ показывает, что для решения подобного примера необходимо несколько десятков умозаключений). Но важно в данном случае проследить процесс свертывания при переходе к решению следующего же примера данного типа. Пример $(m+x+b)^2$ решался этим учеником уже так:

«1) Соединим два слагаемых в одно (пишет: $[(m+x)+b]^2$). 2) Это будет квадрат первого слагаемого (пишет: m^2+x^2+2mx). 3) Плюс квадрат второго (дописывает: $+b^2$). 4) Плюс двойной результат перемножения их (дописывает: $+2mb+2xb$).

При этом ученик затратил на решение этого примера примерно в 5 раз меньше времени, чем на решение первого разобранного нами примера.

Пятая по порядку (всего пятая после первого ознакомления с формулой!) задача $(-5x+0,6xy^2)^2$ была решена тем же учеником так уверенно, легко и быстро, что не было возможности проследить за характером процесса рассуждения. Ученик, глядя на пример, сразу, не отрывая пера от бумаги, записал ответ: $25x^2+0,36x^2y^4-6x^2y^2$, успев произнести за это время только слова: «квадрат... еще... минус на плюс...» На вопрос экспериментатора: «Как ты решал?» — ученик ответил: «Тут и думать нечего, смотри на пример да пиши». Как выяснилось, ни одного правила или определения в процессе решения он не вспоминал (ни общего правила — правила возведения суммы двучленов в квадрат, ни частных правил — правила возведения одночлена в квадрат, правила умножения одночленов). Сразу установив, что данное выражение представляет собой квадрат суммы двух чисел, ученик непосредственно, без осознания правил и определений переходит к выполнению соответствующих действий. Вся многозвенная структура рассуждения при решении этого примера заменяется короткой связью оперативных элементов, содержащих свернутое указание на последовательность действий. Это находится в полном соответствии с установленным в советской психологии положением (П. А. Шеварев, А. Н. Соко-

лов, Н. К. Индик, Л. П. Доблаев и другие) о том, что при переходе от развернутых к свернутым умозаключениям дольше всего удерживается в составе процесса решения осознание оперативной части правила.

Что касается средних учеников, то первые этапы овладения математическим умением не дают заметной картины свертывания рассуждения. Если из общей структуры рассуждения выпадает хотя бы один существенный элемент, то весь процесс рассуждения тормозится, пока утраченный элемент не займет своего места в этой структуре.

Свертывание у средних учеников наступает на несколько более поздних этапах овладения умением, в результате многократных упражнений (как это и установлено в советской психологии).

Вот как рассуждает при решении примера $(-5x + 0,6xy^2)^2$ (четвертого по порядку) средний ученик Б. В. (эта структура сохраняется в основном неизменной при решении всех задач теста V—A): «1) Это тоже пример на квадрат суммы двух чисел, потому что в скобках стоят два буквенных числа и их соединяет плюс. И все это в квадрате.

2) А почему впереди минус? Это уже не сумма? (Эксп.: «А отрицательные числа помнишь?») А, знаю, это минус $5x$. Первое число отрицательное, с минусом. А решать так же? (Эксп.: «Подумай».) Ну да, числа-то могут быть любые.

3) Чтобы взять квадрат суммы, надо первое число возвести в квадрат — помножим его само на себя.

4) $-5x$ помножить на $-5x$ будет... минус на минус дает плюс... значит (пишет: $25x^2$).

5) Теперь надо перемножить левую и правую часть и помножить, что получится, на 2.

6) Минус на плюс будет минус: 5 помножить на 0,6 будет... три, да x будет уже во второй степени. Будет $3x^2y^2$. (Эксп.: «Проверь, все ли сделал».) Забыл помножить на 2 (пишет: $+ (-6x^2y^2)$).

7) Теперь второе число взять в квадрат (пишет: 3, 6; зачеркивает, пишет: 0,36).

8) А показатель степени надо сложить (пишет: $xy^2 \cdot xy^2 = x^2y^4$).

9) Теперь все приведем в порядок (переписывает: $25x^2 - 6x^2y^2 + 0,36x^2y^4$).

Что касается неспособных, то у них не замечалось сколько-нибудь заметного свертывания даже в результате многих упражнений. На первых этапах овладения умением они постоянно путаются в громоздкой цепи умозаключений, которая с трудом, с помощью экспериментатора, закрепляется, постепенно превращаясь в относительно стройную систему. Ни о каком свертывании на этих этапах не может быть и речи, так

как сам процесс рассуждения еще находится в стадии становления. Да и в дальнейшем они нуждались лишь в полном составе рассуждения. Если у них и были пропуски отдельных звеньев, то совершенно неразумные и немотивированные. Рассуждения неспособных всегда отличались излишней развернутостью, подробностью, ненужной деятельностью (так что производили впечатление громоздких, «тяжелых» построений). В то же время их рассуждения не отличались четкостью, последовательностью, правильной логической расчлененностью. Приведенные выше (в предыдущем параграфе) примеры являются наглядной иллюстрацией этого положения.

Аналогичную картину дает решение задач VI серии. Вот рассуждение способной ученицы Г. А. при решении задачи VI—Г—1. «Ясно, что со скоростью 30 км в час он шел меньше времени, чем со скоростью 20 км в час (при одинаковом пути). А раз так, то средняя скорость не будет равна 25 км в час. Как же здесь решить? (Дальнейший ход решения разбиваем на отдельные звенья.) Буду решать по рассуждению.

1) Скорость — это результат от деления пути на время. Значит, надо знать общий путь и общее время, затраченное на весь путь, и поделить общий путь на общее время.

2) Теперь ясно, как решать¹. Надо узнать весь пройденный путь. Если путь в один конец обозначим через x , то весь путь — $2x$.

3) Теперь надо узнать время. Оно различно. Чтобы узнать время, надо поделить путь на скорость.

4) На путь туда потратили $\frac{x}{20}$ час.

5) А на путь обратно потрачено $\frac{x}{30}$ час.

6) А всего весь путь занял, значит, $\frac{x}{20} + \frac{x}{30}$ час., или

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = \frac{5x}{60} \text{ час.}$$

7) Делим теперь общий путь на общее количество часов:

$$2x : \frac{5x}{60} = \frac{120x}{5x} = 24 \text{ км в час.}$$

Вслед за этим испытуемая Г. А. переходит к решению задачи VI—Г—3. Ход рассуждения таков: «Эта задача похожа на первую. Тут тоже есть хитрость: можно подумать, что пароход затратит одинаковое время, так как течение одинаковое, и сколько проиграем в одном направлении, столько же выиграем в обратном». Рассуждение разбиваем на звенья:

¹ Обратим внимание, что и здесь испытуемая предварительно осмыслила задачу в общей форме.

«1) Скорость против течения уменьшится на какую-то величину.

2) Скорость по течению увеличится на такую же величину.

3) Первая скорость будет продолжаться больше времени, чем вторая.

4) Поэтому потеря во времени будет больше, чем выигрыш, т. е. течение замедляет время, потраченное на путь».

Видно, насколько «свернут» в данном случае процесс рассуждения (особенно при переходе от 3-го звена к 4-му звену). Ведь это «свернутое» рассуждение заменяет довольно сложную многозвенную систему умозаключений. Когда экспериментатор попросил ученицу повторить весь процесс рассуждения в максимально развернутой форме, то она воспроизвела следующую структуру:

«Обозначим скорость парохода через x , а скорость течения через x_1 и путь от Астрахани до Волгограда через S . Тогда:

1) Фактическая скорость парохода от Астрахани до Волгограда равняется разности скоростей парохода и течения: $x - y$ (течение мешает).

2) Обратно фактическая скорость равняется скорости парохода плюс скорость течения: $x + y$ (течение помогает).

3) За сколько же часов пройдет пароход путь от Астрахани до Волгограда? Путь делим на скорость $\frac{S}{x - y}$ час.

4) Обратно тот же путь будет пройден за $\frac{S}{x + y}$ час.

5) Всего часов на путь туда и обратно будет потрачено:

$$\frac{S}{x - y} + \frac{S}{x + y}.$$

Преобразуем:

$$\frac{S(x + y) + S(x - y)}{x^2 - y^2} = \frac{Sx + Sy + Sx - Sy}{x^2 - y^2} = \frac{2Sx}{x^2 - y^2}.$$

Вот сколько часов будет нужно на путь, если есть течение.

6) Если бы не было течения, то скорость парохода была бы постоянной.

7) А общий путь равен удвоенному расстоянию между городами.

8) Без течения на путь потратили бы $\frac{2S}{x}$ час.

9) Чтобы ответить на вопрос, надо сравнить количество часов в первом случае $\left(\frac{2Sx}{x^2 - y^2}\right)$ и втором $\left(\frac{2S}{x}\right)$.

10) Видно, что первое количество больше. Чтобы это было совсем видно, отбросим временно y первой дроби в знаменателе y^2 . Знаменатель увеличится, а вся дробь от этого уменьшится.

А $\frac{2Sx}{x^2} = \frac{2S}{x}$, т. е. если мы уменьшим первую дробь, то обе дроби сравняются. Ясно, что первая дробь больше» (эту часть рассуждения мы не разлагаем на звенья, так как задача уже решена и приведенные алгебраические преобразования непосредственно не относятся к решению).

Эти задачи оказались не по силам исследованным нами средним и тем более неспособным ученикам. Средние ученики, если даже они и воспроизводили (с помощью экспериментатора!) весь ход рассуждения, так и не могли понять, почему когда течение нам мешает, то мы проигрываем больше, чем выигрываем тогда, когда течение нам помогает. Ни в одном задании VI серии мы не наблюдали сколько-нибудь заметного свертывания умозаключений у средних учеников. О неспособных и говорить нечего, — они без более или менее существенной помощи экспериментатора вообще не справлялись с задачами этой серии.

Таковую же картину дают эксперименты по решению задач на доказательство (IX серия). Способный ученик С. Е. решал задачу IX—Б—1 так (с расчленением на звенья):

«1) Последовательные числа — это какие? Которые все на единицу больше и больше, например 6, 7, 8, 9 и т. д.

2) Речь идет о любой тройке таких чисел. Среднее примем за x , тогда левое будет на единицу меньше, а правое — на единицу больше, т. е. числа будут $(x-1)$; x и $(x+1)$.

3) Теперь возьмем их сумму: $x-1+x+x+1=3x$.

4) Видно, что $3x$ всегда разделится на 3, а x — это у нас любое число. Значит, любая тройка таких чисел в сумме делится на 3».

А вот вторую предъявленную ему задачу этого теста IX—Б—2 он даже и не решает, а сразу «видит» ответ: «Тут и доказывать нечего: и так видно, что получится $(x+3)^2$ ». Видимо, процесс доказательства здесь максимально свернут — осуществляется, как мы видим, непосредственный переход от осознания задачи к результату. А между тем процесс доказательства в данном случае, хотя и не является сложным, но все-таки состоит из ряда звеньев. Этот же ученик по просьбе экспериментатора восстановил процесс рассуждения при решении этой задачи до следующей структуры:

«1) Надо взять любое число (так как требуется доказать для любого числа). Берем число x .

2) Теперь надо взять число, больше этого на 6. Будет $x+6$.

3) Первое умножаем на второе: $x(x+6)=x^2+6x$.

4) К сумме прибавляем 9. Будет x^2+6x+9 .

5) А это и есть квадрат суммы: $(x+3)^2$.

6) Значит, какое число ни взять, все равно получится квадрат».

Как показывают наши материалы, свертывание начинается сразу после того, как ученик обобщит найденный способ решения. У способных учеников, как мы видели, обобщение часто наступает «с места», поэтому и свертывание рассуждения наблюдается также «с места». Средние ученики обобщают после многократных упражнений, поэтому и свертывание рассуждений у них наблюдается после решения известного количества однотипных задач. Неспособные обобщают с большим трудом и после длительной тренировки в решении однотипных задач, следовательно, и свертывание у них может начинаться лишь после весьма большого числа упражнений.

В некоторых (более простых) случаях структура рассуждения у способных учащихся была столь свернутой, что устанавливалась почти непосредственная связь между восприятием задачи и результатом. В этих случаях время решения ими задачи практически определялось лишь временем, потраченным на необходимые вычисления. Внешне это выглядело как «отсутствие» рассуждения, отсутствие мышления. Но на самом деле, это было не «отсутствием» мышления, а наоборот, его высшей степенью, так как в основе этой свернутой структуры всегда лежал хорошо логически обоснованный процесс рассуждения и свертывание наступало, как правило, вслед за быстрым и четким осознанием (на первой задаче соответствующего типа) последовательных звеньев этого процесса.

С. И. Шапиро длительно наблюдал способных учащихся, у которых процесс рассуждения при решении типовых задач быстро свертывался до максимальной степени. Ученица Б. так быстро давала ответ, что создавалось впечатление, что решения не было, а она заранее знала результат. Другого ученика, который так быстро давал результат решения, что казалось, он дает решение, не выслушав до конца условие задачи, одноклассники шутя прозвали: «Нате ответ, дайте вопрос». А между тем развернутый мыслительный процесс решения задач во всех приведенных случаях отличался достаточной сложностью.

До сих пор речь шла о свертывании мыслительного процесса при решении однотипных задач. Но способным учащимся свойственна еще одна особенность. Для них вообще характерна тенденция при решении математических задач мыслить свернутыми структурами, сокращенными умозаключениями, даже когда задача является новой по типу. В каком-то смысле мы можем говорить в этих случаях о «стенограмме мысли» (выражение А. Г. Ковалева и В. Н. Мясничева [174, стр. 150]). Причем свернутые мыслительные структуры, о которых идет речь, — это свернутые четко логически выраженные структуры, — сокращались звенья не просто рассуждения, а очень четко логически обоснованного рассуждения, и это хорошо было видно, когда способные учащиеся по нашей просьбе

восстанавливали свернутые структуры до полной (с их точки зрения) структуры.

Поэтому факт наличия до известной степени свернутого математического мышления у изученных нами способных школьников нисколько не противоречит особенностям математического мышления, о которых писали крупнейшие советские математики, — таким, как «искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения» (А. Н. Колмогоров [180]), «логическая схема рассуждений, четкая расчлененность хода рассуждения» (А. Я. Хинчин [427]), «привычка к полноценной логической аргументации», «способность улавливать нечеткость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев для полного доказательства» (Б. В. Гнеденко [92], [93], [94]). В свернутом умозаключении, рассуждении необходимые звенья не отсутствуют вообще, они сокращены, не произносятся и не осознаются, но «незримо» присутствуют. Хотя ученик реально мыслит свернутыми структурами, способен увидеть и произвести следующую математическую операцию, не производя предыдущей и не нуждаясь в этом, он обычно может в случае нужды развернуть процесс рассуждения до полной структуры. Поэтому свернутое рассуждение (разумеется, если оно правильно) есть в своей основе последовательное, правильно расчлененное логическое рассуждение с полноценной аргументацией.

Какие же у нас основания считать, что мыслительный процесс действительно свернут, сокращен, что пропущенные его звенья не осознаются, не проговариваются в уме? Основания эти таковы: 1) быстрота, с какой дается ответ. Как уже указывалось, в целом ряде случаев ответ на задачу дается непосредственно после восприятия ее условия («срастается с моментом восприятия»); 2) отсутствие пауз как раз на тех звеньях рассуждения, которые выпадают; 3) затруднения, которые порой испытывают учащиеся, когда экспериментатор просит их быстро дать развернутую структуру рассуждения. Известное значение (но, конечно, только вспомогательное) имеют и показания самих испытуемых относительно того, вспоминали они или нет то или иное правило, общее положение и т. д.

В обоснование всех приведенных выше положений дадим типичные схематические графики процесса рассуждения при решении задач способными, средними и неспособными учениками.

Методы статистической оценки и графического изображения процесса рассуждения при решении физических задач были предложены в последнее время А. Н. Соколовым [387], З. И. Калмыковой и Е. П. Иванцовой [138]. З. И. Калмыкова в 1962—1963 гг. в ряде работ [152], [153] предложила вычислять так называемый «коэффициент экономичности» — определять, прежде всего, число логически необходимых для решения задачи суждений и сопоставить с ним реальное число суждений;

разницу («число сэкономленных суждений») она соотносила с числом логически необходимых суждений. Результат, выраженный в процентах, и показывал, насколько коротким и экономным путем учащийся шел к цели.

Способ графического изображения, применяемый нами с 1959 г., имеет целью наглядно сопоставить ход рассуждения при решении одной и той же новой для испытуемых задачи способными, средними и неспособными учащимися. С этой целью реальный ход рассуждения «накладывался» на развернутый. Причем нам казалось, что сравнение реального хода рассуждения с логически предполагаемым развернутым ходом, исходя из целей данного исследования, едва ли оправданно. Ведь вполне возможно, что реальный развернутый процесс рассуждения идет по несколько иной схеме, чем логически развернутый. А задачи нашего исследования требуют сопоставления реального свернутого и реального развернутого процессов рассуждения. Поэтому на нашем графике эталоном был реальный развернутый процесс рассуждения (а именно наиболее полный из тех «развернутых вариантов», которые по просьбе экспериментатора демонстрировали способные школьники). Каждое звено представляет собой законченную мысль. Итак, изобразим графически типичные процессы рассуждения при решении двух задач.

1. Задача XIX—А—5.

Развернутый ход рассуждения (Р. Ш.—VI кл.).

«1) Второму ученику надо было добавить 2 коп., чтобы он сумел купить линейку. Первый отдал ему все свои деньги, а денег все равно не хватило;

2) это могло произойти только при условии, если у первого была всего 1 коп. Если бы у него было хотя бы 2 коп., линейку удалось бы купить;

3) следовательно, линейка стоила 25 коп., так как первому не хватало для ее покупки 24 коп.;

4) второму не хватало 2 коп., т. е. у него было 23 коп.».

Сопоставим с этим типичный реальный ход рассуждения шестиклассников — способного ученика (того же Р. Ш.), среднего (Я. В.) и неспособного (З. И.). (См. рис. 62). На вертикальной оси отмечены звенья развернутого рассуждения. Условные знаки графически характеризуют реальные процессы рассуждения при переходе от одного звена к другому.

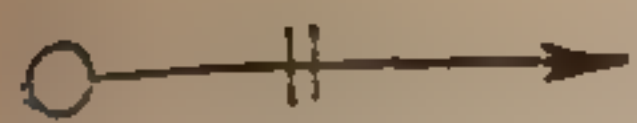
Условные знаки:



правильный ответ (цифра показывает время, потраченное на решение (мин. и сек.);

отклонение на правильное, но не нужное для решения суждение или действие (цифра показывает количество таких суждений);





неправильное суждение или действие;



повторение;



помощь экспериментатора.

Общее условное число звеньев рассуждения включает число сформулированных учащимся ненужных и неправильных суждений, а также число вмешательств (подсказанных ходов) со стороны экспериментатора.

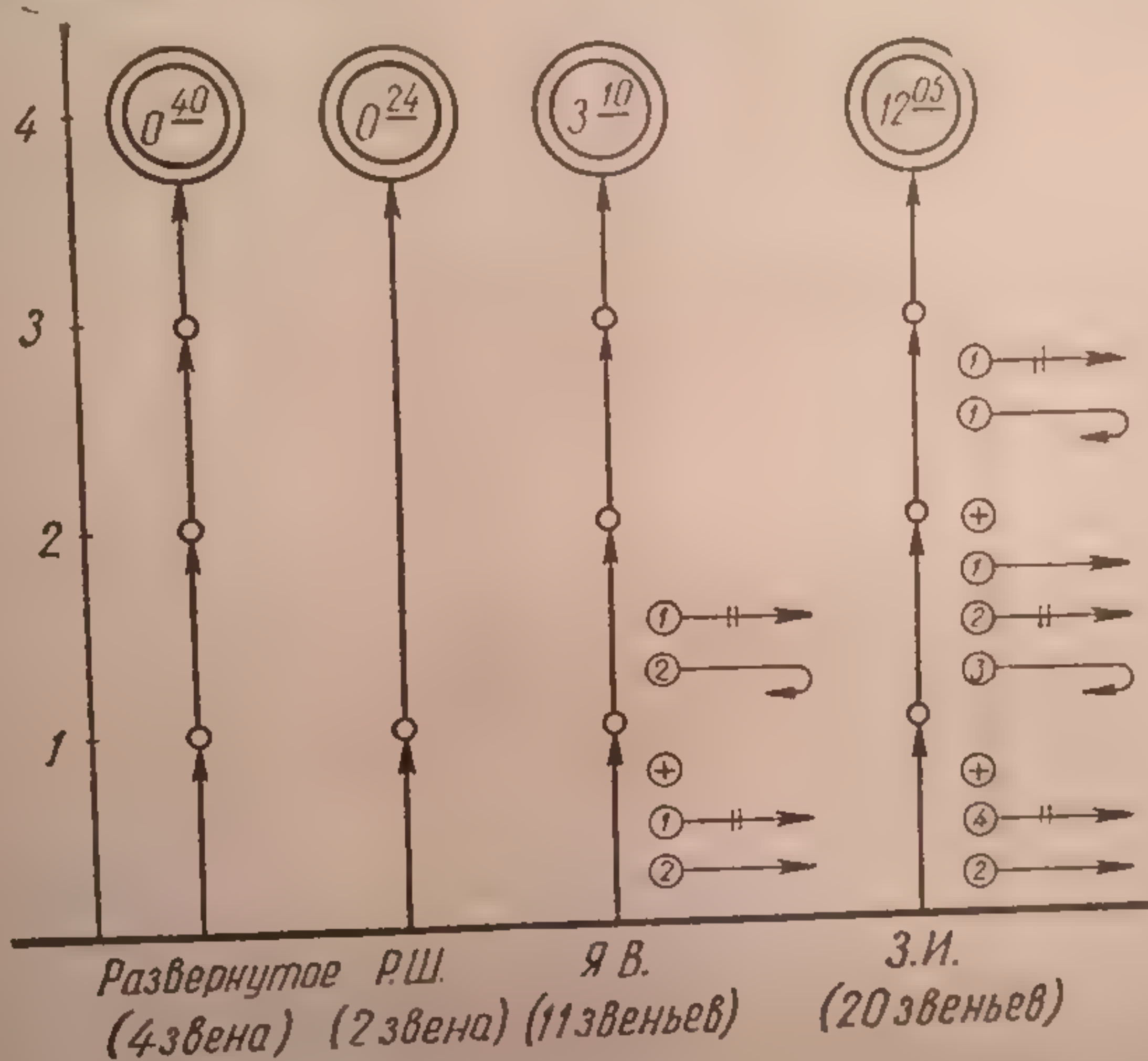


Рис. 62. Схематический график процесса рассуждения при решении задачи XIX—А—5 способными, средними и неспособными к математике учащимися.

2. Задача I—А—6.

Развернутый ход рассуждения (Володя Л. — 10 лет).

«1) Когда пассажирский поезд вышел в путь, товарный был уже впереди на $38 \times 7 = 266$ км;

2) пассажирский поезд проходит на $57 - 38 = 19$ км в час больше, чем товарный;

3) чтобы догнать товарный поезд, пассажирскому надо $266 : 19 = 14$ час.;

4) когда пассажирский поезд уже закончил путь, товарному осталось еще проехать $2 \cdot 38 = 76$ км;

5) если товарный каждый час отставал от пассажирского на 19 км, то на 76 км он отстал за $76 : 19 = 4$ часа;

6) общая продолжительность движения пассажирского поезда равна $14 + 4 = 18$ час., а товарного равна $7 + 14 + 4 + 2 = 27$ час. («Но это так просто, и без этого можно решить», — говорит Володя Л.);

7) следовательно, расстояние между А и В $= 18 \cdot 57 = 1026$ км («или, если хотите, $27 \cdot 38 = 1026$ км»).

Сопоставим с этим типичный реальный ход рассуждения (того же Володи Л.), способного шестиклассника В. Д., средней ученицы VI класса Г. Г. и неспособного ученика VII класса Ю. К. (см. рис. 63).

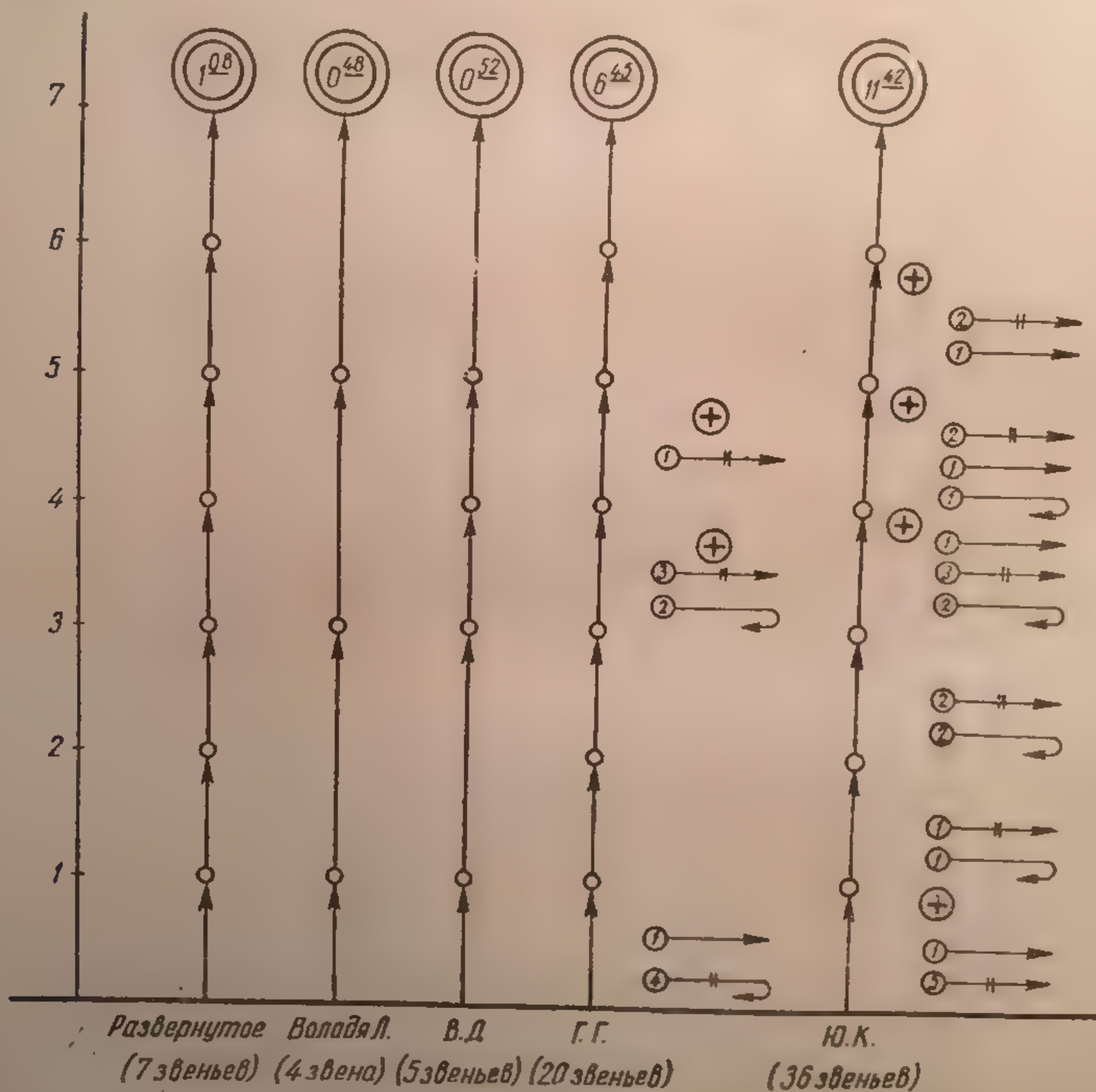


Рис. 63. Схематический график процесса рассуждения при решении задачи I—А—6 способными, средними и неспособными к математике учащимися.

Итак, способных к математике учеников при всех прочих равных условиях отличает способность быстро переходить в процессе решения задач к мышлению «свернутыми» структурами. Этот переход обычно начинается непосредственно после решения первой же задачи данного типа и довольно быстро достигает максимального развития, когда промежуточные звенья рассуждения «выпадают» и устанавливается своеобразная прямая ассоциация между осознанием задачи и выполнением определенной системы действий, а нередко даже между осознанием задачи и осознанием результата. В этом случае наши испытуемые так и говорили: «Что решать? И так видно», «Я просто взял и записал ответ», «Задача решается сама собой».

Тот или иной последовательный ряд ассоциаций (иногда очень длинный ряд), если так можно выразиться, «уплотняется», заменяется прямой ассоциацией, первым членом которой является первый член первой ассоциации этого ряда и вторым членом — второй член последней ассоциации ряда (см. рис. 64). Происходит то, что П. А. Шеварев образно назвал «коротким замыканием» ассоциативной цепочки [445, стр. 170].



Рис. 64.

Разница между способными и средними учениками заключается в том, что у первых такие свернутые ассоциации устанавливаются очень быстро, нередко «с места». В этом случае способный ученик «видит», что из *А* следует *Е*, осознает, что из *А* непосредственно следует, прямо вытекает *Е*, в то время как среднему ученику при прочих равных условиях это еще не ясно, он не «видит» этого, не осознает. Чтобы прийти от *А* к *Е*, ему нужно пройти иногда довольно сложный путь актуализации связанных между собой ассоциаций. Из сказанного ясно, что значение таких «свернутых» мыслительных структур прежде всего в том, что таким образом обеспечивается быстрота переработки информации, значительно ускоряется и упрощается процесс решения задач. Разумеется, воспроизведение «короткой» ассоциации занимает гораздо меньше времени (ведь такие ассоциации заменяют собой иногда десяток и более умозаключений силлогистического типа), а это облегчает и упрощает выполнение сложных операций (в то время как другие ученики иногда безнадёжно путаются в громоздкой цепи умозаключений), «экономит» умственные силы.

§ 3. Гибкость мыслительных процессов

Основной материал по этому разделу дали XIII, XIV и XV серии задач. Основную группу испытуемых составили 17 способных учащихся VII класса, которые были проведены через все тесты указанных серий. Они сравнивались с группой средних (24 чел.) и с группой неспособных (17 чел.) учеников, которые также были проведены через эти серии, но на протяжении более длительного времени. Кроме того, отдельные тесты этих трех серий предъявлялись ученикам из группы очень способных.

В задачах XIII серии надо было найти максимальное количество способов решения задач. Учитывалось общее время решения (время, потраченное на попытки найти вариант решения, но не приведшие к результату, не учитывалось). Представим средние (по каждой группе) результаты выполнения испытуемыми тестов XIII серии в таблице 15.

Таблица 15

Группы	Общее количество найденных способов по всем задачам			Общее время решения (в мин.)		
	тест А	тест Б	тест В	тест А	тест Б	тест В
СП	22	12	14	14	6	23
СР	14	8	7	27	14	19
НСП	7	4	4	28	15	19

Дисперсия данных мала — все данные близки к среднему значению.

По XIV серии сравнивалось время решения первого и второго (измененного) вариантов задачи и вычислялось процентное отношение (в круглых процентах) второго к первому. Это относительное время решения и показывало, насколько испытуемый был «скован» предыдущим способом решения.

По XV серии аналогично вычислялось относительное время решения последней задачи по отношению ко времени решения предыдущей.

Показатели по тесту XV—Ж (ввиду специфичности этого теста) здесь не учитывались. Сводные данные представлены в таблице 16 (по каждой группе испытуемых показывается дисперсия показателей и средняя арифметическая — M).

Анализ полученных результатов будет дан ниже.

Возникает вопрос: можно ли объяснить решение экспериментальных задач всех трех серий действием одного общего фак-

Таблица 16

Группы	XIV серия		XV серия	
	дисперсия отношений времени решения задач	М	дисперсия отношений времени решения задач	М
СП	86—109	96	102—126	112
СР	111—146	131	164—243	187
НСР	148—252	214	267—655	374

тора? Наша гипотеза заключается в том, что показатели XIII, XIV и XV серий измеряют одно и то же явление, т. е. являются индикаторами одного и того же общего свойства умственной деятельности, что здесь, следовательно, проявляется один общий фактор.

Подвергнем полученные данные факторному анализу.

Для факторного анализа были выделены показатели 17 способных учащихся, которые, как уже указывалось, были проведены через все три серии. По XIV и XV сериям показателем было относительное время решения задач, по XIII серии — общее количество решенных вариантов и время решения (для каждого испытуемого вычислялось ранговое место по каждому из этих показателей и в качестве основы для факторного анализа принималось среднее из них). Был исчислен коэффициент корреляции ранговых мест испытуемых по результатам всех трех серий (попарно).

В итоге была получена такая матрица интеркорреляций (см. табл. 17).

Таблица 17

Серии	XIII	XIV	XV
XIII	—	0,66	0,69
XIV	0,66	—	0,71
XV	0,69	0,71	—

Данные таблицы показывают, что успешность решения задач этих серий положительно коррелирует друг с другом.

При 17 испытуемых величины коэффициентов корреляции r значимых на уровне значимости $0,01=0,583$; на уровне значи-

мости $0,05=0,412$ [см. 344, стр. 106—107]. Следовательно, полученные коэффициенты корреляции статистически значимы на уровне 0,01.

Факторизация была проведена по приведенной выше формуле Спирмена—Терстена (см. стр. 247). Получена следующая факторная матрица (см. табл. 18).

Таблица 18

Показатели	Факторные веса по g
XIII	0,80
XIV	0,82
XV	0,86

Репродуцированная корреляционная матрица совпадает с исходной, остаточные коэффициенты корреляции равны нулю.

Весьма высокие веса по общему фактору означают, что успешность решения задач указанных трех серий — результат действия лишь одного общего фактора. Общий (единый) фактор для всех этих серий имеет место, и выражен он довольно отчетливо.

Дадим психологическую интерпретацию этому фактору. Для этого обратимся к качественному анализу.

Задачи всех трех серий были рассчитаны на исследование способности быстрой перестройки мыслительной деятельности, «ломки» только что установленной схемы решения и замены ее новой. Особенно быстрая и резкая ломка сложившегося и закрепившегося способа действий требовалась в тестах XV серии.

В задачах XIII серии способные ученики легко, без каких-либо затруднений переключались на новый способ действия, с одной умственной операции на другую. Их отличало многообразие аспектов в подходе к решению задач. Однако потребность найти несколько решений одной и той же задачи проявлялась только в том случае, когда первое найденное решение не являлось, по мнению учащегося, простым и экономным (изящным). При наличии специального задания (установки, данной экспериментатором) способные ученики охотно переключались на поиски новых решений. Ранее найденный способ решения не оказывал на них никакого сковывающего влияния. II дело даже не в том — удавалось им или нет найти несколько способов решения или доказательств теоремы (особенно доказательств теоремы Пифагора). Важно, что они в поисках решений разнообразили способы действий, легко переключались с одной умственной операции на другую.

Средним учащимся было значительно труднее переключаться на новый способ решения уже решенной задачи. Попытки, которые они в этом отношении предпринимали, ясно показывали сковывающее влияние ранее найденного способа — мысль их обычно то и дело возвращалась к уже найденной схеме. Как заявил один из учеников С. И. Шапиро (ученик со способностями чуть выше средних), «труднее всего при решении задачи отделаться от навязчивого или неудачного способа решения. Чувствую свою слабость на поворотах».

Что касается неспособных, то найденное решение словно отрезало у них всякую возможность переключиться на новый способ действий. Они испытывали большие трудности при попытке переключиться от одного плана мышления в другой, от одной умственной операции к другой. Своеобразная и резко выраженная скованность их математического мышления постоянно давала себя знать. И дело совсем не в том, что естественные затруднения испытывались при переходе от более легкого способа к более трудному. Порой они находили первым как раз более трудный способ. И столь же затруднительным было для них переключение от трудного к легкому способу (в другое время этот более легкий способ находился без особого труда).

Способ решения, найденный первым (далеко не всегда самый легкий — еще раз подчеркиваем это обстоятельство!), тормозил нахождение других способов решения этой же задачи. Но, может быть, ученики просто не думали о возможности другого решения? Но на такую возможность им вполне определенно указывал экспериментатор. В ряде случаев наблюдались интересные факты — забывание найденного ранее способа решения увеличивало возможность нахождения нового способа решения, т. е., иными словами, тормозящее влияние предыдущего действия снималось только с его забыванием. Мы специально проверяли это, и часто наблюдалось, что как только учащийся оказывался способным мыслить в ином плане, в другом направлении, это означало, что ранее найденный способ решения забыт. В отдельных случаях возможность такого переключения была довольно точным критерием того, что предыдущий ход мысли забыт, т. е. прямо указывала на это обстоятельство (и при специальной проверке это подтверждалось). Но в этом случае не приходилось уже говорить о переключении, так как фактически переключения, как такового, не было (переключение предполагает переход к новому ходу мысли или новому способу решения при наличии старых).

В одном из наших экспериментов наблюдался интересный случай. Неспособная девочка, ученица VI класса, решила задачу более трудным, но привычным способом. С трудом, с помощью экспериментатора, она перешла на другой, более легкий способ. Но после этого не сумела сразу воспроизвести привычный спо-

соб. И только после получасового перерыва вспомнила старый, но... забыла новый. Несколько точно таких же случаев было и в экспериментах И. В. Дубровиной.

Из приведенной выше таблицы 15 видно, как резко выражены типологические различия в отношении переключения. По 13 задачам XIII серии способные нашли в среднем всего 48 решений, затратив на это в среднем 43 мин., средние — 29 решений за 60 мин., а неспособные — 15 решений за 62 мин. А ведь каждое последующее решение находить было, как правило, все труднее. Приведем несколько примеров.

Способный ученик VII класса Г. Х. решает задачу XIII—А—7 («К 3 л воды с температурой 36° добавили 4 л воды с температурой 15° . Какая температура установится в сосуде?»).

Сразу, не думая, ученик дает такое решение:

«3 л воды дали «в сумме» 108° .

4 л » » » 60° .

Итого 168° на 7 л = 24° ».

Не останавливаясь, Г. Х. дал и следующее «наглядное» решение:

$$\begin{array}{l} 36^\circ \text{ ————— } \\ \text{—————} \\ \text{—————} \\ \text{—————} \\ x^\circ \text{ ————— } \\ \text{—————} \\ \text{—————} \\ 15^\circ \text{ ————— } \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ 4 \\ \\ 3 \end{array}$$

Тут же следует пояснение: «средняя температура будет не посередине, а сдвинута к 15° («потому что пятнадцатиградусных литров больше»). Отношение будет 4:3. Разницу 21° делим в таком отношении ($21:7=3$), а дальше либо прибавим 9 к 15, либо вычтем 12 из 36».

После этого Г. Х., подумав около 10 сек., применяет известную ему формулу средней арифметической взвешенной, делая следующую запись:

$$t_{\text{ср}} = \frac{36 \cdot 3 + 15 \cdot 4}{3 + 4} = 24.$$

Решение задачи всеми вариантами заняло всего 1 мин. 08 сек.

Ни один неспособный не мог найти двух решений этой задачи. Большинство из них и одно решение могли найти только с помощью экспериментатора.

А вот по какой схеме десятилетняя Соня Л. решила одну из экспериментальных алгебраических задач (XIII—Б—4):

$$\begin{aligned}
 113^2 - 112^2 &\rightarrow a^2 - b^2 = \\
 &\rightarrow (a+1)^2 - a^2 = \\
 &\rightarrow a^2 - (a-1)^2 =
 \end{aligned}$$

причем последние (менее «изящные») два варианта она нашла самостоятельно, но после предложения экспериментатора подумать о возможности иных подходов к решению.

И наконец, еще пример, интересный тем, что одаренные десятилетние ученики — Соня Л. и Володя Л. — дали аналогичные схемы трех путей решения задачи XIII—А—6: «По течению пароход делает 20 км в час, против течения 15 км в час. Чтобы пройти от пункта А к Б, он употребляет на 5 час. меньше, чем на обратный путь. Каково расстояние между А и Б?» Решение: а) по течению — 1 км в 3 мин., против течения — 1 км в 4 мин. На каждом километре выигрывается 1 мин. А всего выигрывает 5 час. — 300 мин. Расстояние 300 км; б) каждый час выигрывает 5 км, а всего выиграл 75 км (5 час. по 15 км). Значит, 15 час. По 20 км в час — 300 км; в) за 5 час. — 75 км, а это $\frac{1}{4}$ расстояния

(так как скорость против течения равна $\frac{3}{4}$ скорости по течению).

Соня через 25 сек. нашла вариант б, еще через 30 сек. — вариант в и еще через минуту — вариант а. Володя через 30 сек. нашел вариант а, еще через 40 сек. — вариант в и еще через 20 сек. — вариант б. В нашей практике подобную подвижность мысли средние ученики, не говоря о неспособных, ни разу не демонстрировали.

В XIV серии переход от первой задачи ко второй требовал резкой перестройки действия, которая маскировалась тем обстоятельством, что задачи внешне были очень похожи. Несмотря на то что во многих случаях вторая задача была не труднее первой, только что решенной, время, потраченное на ее решение, увеличивалось у средних учеников почти на $\frac{1}{3}$, а у неспособных —

более чем в 2 раза. Во всех случаях, когда вторая задача предъявлялась сразу после первой, она решалась значительно хуже, и испытуемый испытывал гораздо большие трудности, чем тогда, когда вторая задача предъявлялась отдельно, независимо от первой. Переход к решению другой задачи всегда вызывал затруднения.

Неспособный ученик В. С. много ошибался, прежде чем с помощью экспериментатора решил первую часть геометрической задачи: «Дана прямая в пространстве и точка на ней. Сколько можно провести прямых, исходящих из данной точки

и перпендикулярных данной прямой? А если точка лежит вне прямой, сколько можно провести перпендикуляров из точки на прямую, лежащих в той же плоскости, в которой лежат данная прямая и данная точка вне ее?» (Задача решалась в уме.) Ответ: «Перпендикуляров можно провести бесконечное количество». — «Ну, а во втором случае?» Объективно задача эта не труднее первой, но ученик решить ее не может. Его ответы: «Тоже бесконечное множество», «Половина бесконечности» — говорят о том, что мысль его так и вертится вокруг «бесконечности». Он не столько решает задачу, сколько бьется над попыткой доказать, что и во втором случае перпендикуляров будет множество. Но вот задача оставлена, больше он над ней не думает. Через две недели ему вновь предлагают решить эту задачу. Задачу он решает, хотя и не сразу. Теперь предлагаем вновь первую часть задачи (он, как оказывается, уже успел ее забыть). Но первую часть задачи он теперь решить не может. Мысль ученика снова скована предыдущей схемой решения («Один перпендикуляр... нет, два... нет, это все-таки один, он только продолжается в другую сторону»). Таким образом, та задача, которая решается первой, оказывает тормозящее влияние на задачу, которая решается второй. Закрепленный ход мысли оказывает у неспособных учеников тормозящее влияние на нахождение новых ходов мысли.

Задачи XV серии представляли большой интерес для исследования особенностей переключения мыслительной деятельности, так как здесь первоначальный способ действий специально закреплялся, стереотипизировался. В условиях последовательного решения ряда однообразных задач формировался шаблон мыслительных операций, который резко нарушался при предъявлении последней задачи. Естественно, что на решение последней задачи оказывал тормозящее влияние установленный стереотип действия. Резкая перестройка мыслительной деятельности, «ломка» только что установленной схемы решения и замена ее другой вели к заметному увеличению времени решения последней задачи (хотя объективно она была не труднее предыдущих). Но здесь обнаружились большие различия. Способные учащиеся оказались в значительной мере свободными от сковывающего мышления влияния шаблонных и трафаретных способов решения — время решения ими последней задачи увеличилось в среднем на $\frac{1}{10}$, в то время как у средних — почти в 2 раза, а у неспособных — почти в 4 раза (см. табл. 16).

Что касается задач XVI серии (задачи, наталкивающие на «самоограничение»), то они оказались непосильными не только для неспособных, но и почти для всех средних учащихся. Лишь трое из 24 средних учеников решили задачу XVI—А—2 и двое — задачу XVI—А—4, и то только после многих усилий. Освобо-

от 20
XVI
серии
гру
учени
На решение

Приведем
задач, по ко
даются от
Г. Х. (VI
треугольнике
если они выр
«Построй
Правда, еще
Ну, вот вид
разных треу
данными? (с
тит.) Ну во
(еще чертит
казать, что
но все они
условие). М
целыми чис
об этом не
то доказать
 $a^2 = 49 + b^2$
 $a + b = 49$
числа, то
49 делится
 $a - b$ не мо

даться от шаблонного пути подхода к решению средние ученики так и не могли (не говоря уже о неспособных).

Способные ученики значительно успешнее справлялись с задачами XVI серии. В таблице 19 приведены сводные данные по этой серии (все задачи решали 17 способных испытуемых из основной группы и 3 человека из группы очень способных. 9 способных учеников решали только отдельные задачи этой серии). На решение каждой задачи давалось не более 15 мин.

Таблица 19

Задачи теста XVI—А	Количество учащихся, решавших задачу	В том числе решили	Среднее время решения (в мин. и сек.)
1	23	17	6'46"
2	26	25	3'26"
3	25	21	7'13"
4	23	20	5'05"
5	24	16	6'11"
6	21	9	10'18'

Приведем решение одной из оказавшихся наиболее трудными задач, по которому ясно видно, как способные ученики освобождаются от самоограничения.

Г. Х. (VII кл.) решает задачу XVI—А—5 («В прямоугольном треугольнике один катет 7 см. Определить две другие стороны, если они выражены целыми числами»).

«Построить треугольник по одной стороне? Что-то странное... Правда, еще угол дан — прямой, но все равно нельзя... (чертит). Ну, вот видно же — сторона и угол постоянны, а вот сколько разных треугольников. Может быть, задача с недостающими данными? (Эксп.: «Нет. Задача решается».) Странно... (чертит.) Ну вот же ясно видно, что бесконечное количество решений (еще чертит). Что-то я не столько решаю, сколько пытаюсь доказать, что она не решается... Может быть, вариантов-то много, но все они выражаются дробными числами (еще раз читает условие). Может быть только один случай, когда выражаются целыми числами? (пауза — 7 сек.). Наверное, так — в условии об этом не говорится, но можно понять... Но тогда это надо как-то доказать... Если гипотенуза a , а неизвестный катет b , то $a^2 = 49 + b^2$ по Пифагору, а $49 = a^2 - b^2$... Ну и что дальше? $a + b = \frac{49}{a - b}$. Чувствую, что это что-то даст... Если a и b — целые числа, то и их сумма — целое число... Ну вот, ясно все: значит, 49 делится на $a - b$ без остатка. А 49 делится только на 7... Но $a - b$ не может быть равно 7, так как тогда и треугольника не

будет (гипотенуза в точности равна двум катетам — две стороны равны третьей)... Где-то тут есть решение, я его упустил... Но ведь 49 делится не только на 7, а и на 1, и на 49. Ну вот теперь решение в кармане: 49 тоже не может быть — гипотенуза будет больше, чем сумма катетов. Остается одно: $a - b = 1$, а $a + b = 49$. Получается 25 см гипотенуза и 24 см катет». Все решение заняло 2 мин. 35 сек.

Подводя итоги всему сказанному, мы можем интерпретировать выделенный общий фактор как гибкость мыслительного процесса. Способных к математике учащихся отличает большая гибкость, подвижность мыслительных процессов при решении математических задач. Она выражается в легком и свободном переключении с одной умственной операции на другую, качественно иную, в многообразии аспектов в подходе к решению задач, в свободе от сковывающего влияния шаблонных и трафаретных способов решения, в легкости перестройки сложившихся схем мышления и систем действия.

Неспособных школьников отличает инертность, косность, скованность мысли в сфере математических отношений и действий, устойчивый, стереотипный характер действий, навязчивое удерживание в сознании предшествующего принципа решения, способа действия, оказывающего тормозящее влияние при необходимости перестроить действие, что определяет ярко выраженную затрудненность в переключении от одной умственной операции к другой, качественно иной.

Факты, относящиеся к области интерференции в сфере умственной деятельности, известны уже давно. Отрицательное влияние прошлого опыта на решение задач (через формирование односторонней установки в результате длительного решения однообразных задач) было показано, например, в исследованиях К. Дункера [487], Н. Майера [489], [643], А. Лючинса [641]. «Человек может не решить задачу не потому, что он не в состоянии найти решение, а скорее потому, что привычный способ действия тормозит выработку правильного решения». (Н. Майер [643]).

В советской психологии термин «гибкость мышления», по сути дела, ввела в практику Н. А. Менчинская. Еще в работе 1946 г. [289] Н. А. Менчинская описала несколько случаев торможения процесса актуализации известных испытуемому правильных приемов решения «под напором более сильных и навязчивых тенденций... идущих со стороны последнего по времени опыта» [289, стр. 124]. Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская выделили три основных показателя гибкости мышления: 1) целесообразное варьирование способов действия; 2) легкость перестройки знаний и навыков и их систем в соответствии с измененными условиями и 3) легкое переключение от одного способа действия к другому [44, стр. 187].

Переключение от одной умственной операции к другой в учебной работе младших школьников изучал Т. В. Кудрявцев [226], исследуя этот процесс не с точки зрения быстроты переключения, а с точки зрения наличия или отсутствия ошибок переключения. Легкость или затрудненность переключения в учебной работе школьников отмечались в работах Е. Н. Кабановой-Меллер [148], А. А. Люблинской [266], В. И. Зыковой [132], [133], З. И. Калмыковой [154], [155], [159], [160], А. В. Скрипченко [374], Р. О. Серебряковой [370], Б. К. Добропорова [116], Г. П. Антоновой [30], [30-а]. Индивидуальные различия в переключении при решении геометрических задач исследовал Л. Н. Ланда [238].

§ 4. Стремление к ясности, простоте и экономности («изяществу») решения

Эта особенность математического мышления способных к математике учащихся тесно связана с предыдущей. Для способных школьников весьма характерно стремление к наиболее рациональным решениям задач, поиски наиболее ясного, простого, кратчайшего, а следовательно, и наиболее «изящного» пути к цели. Это выглядит как своеобразная тенденция к экономии мысли, выражающаяся в поисках наиболее экономных путей решения задач. Надо сказать, что указанная особенность, как нельзя лучше, соответствует той «цели математики», о которой высказал известный математик В. Глушков в статье «Вычислительные машины и будущее математики»: «Цель математики — это всегда получение не какого-нибудь, а именно самого изящного, самого простого решения» [91, стр. 5]. Стремление к простоте и изяществу методов характеризовало и характеризует математическое мышление всех крупных математиков прошлого и настоящего (см., например, [349, стр. 16]). Специально упоминали об этом качестве такие крупные советские математики, как А. Я. Хинчин [426], Б. В. Гнеденко [92], [93], [94].

Чем способнее к математике ученик, тем ярче выражена у него отмеченная особенность мышления. У весьма одаренных учащихся стремление к наиболее простому и рациональному решению начинается проявляться уже в сравнительно раннем возрасте. Девятилетняя Соня Л. особенно отличалась в этом отношении. Вот она решает задачу: «В равнобедренном треугольнике одна из медиан делит его периметр на 2 части: 12 см и 9 см. Определить стороны треугольника». Соня прежде всего делает чертеж (см. рис. 65). «Ясно, что это не медиана основания. Большая сторона с кусочком на 3 см больше меньшей стороны с таким же кусочком. А весь периметр 21 см. Две боковые стороны на 6 см больше, значит, 8, 8 и 5. А я решу еще проще: полторы стороны — 12 см. Значит, 8, 8 и 5» (решение, как мы видим, очень



Рис. 65.

свернуто. Соня пояснила потом: «Одна боковая сторона и половина боковой стороны равны 12 см». Тут же Соня говорит: «Да здесь два решения. Полторы стороны равны 9 см. Второй треугольник 6, 6 и 9 см» (по просьбе экспериментатора Соня пояснила: «Может быть, что боковые стороны больше основания, а может быть и основание больше каждой из боковых. Надо разобрать оба случая»).

Дадим еще несколько примеров найденных девятилетней Соной Л. «изящных» решений задач, сравнивая ее решения с типичными решениями, которые давали средние ученики VI—VII классов.

Задача: «Рабочие — отец и сын ходят из дома на завод пешком. Отец проходит это расстояние за 40 мин., сын за 30 мин. Через сколько минут сын догонит отца, если последний выйдет из дома на 5 мин. раньше сына?»

Обычный путь решения: отец за 1 мин. проходит $\frac{1}{40}$ пути, сын $\frac{1}{30}$. Разница их скоростей $\frac{1}{120}$. За 5 мин. отец пройдет $\frac{1}{8}$ пути. Сын его догонит через $\frac{1}{8} : \frac{1}{120} = 15$ мин.

Решение Сони: «Отец вышел на 5 мин. раньше сына, следовательно, придет на 5 мин. позже. Значит, сын нагонит его ровно на середине пути, т. е. через 15 мин.»

Задача: «На 3 склада доставили груз. На 1-й и 2-й вместе 790 т, на 2-й и 3-й вместе 970 т, на 3-й и 1-й вместе 920 т. Сколько груза доставлено на каждый склад? Обычное решение: сравнивают, например, 1-ю сумму с 3-й, узнают разницу, подставляют ее во 2-й вариант и т. д. Решение Сони: «Сложим все цифры, и это будет двойная сумма всех. $\frac{2680}{2} = 1340$. Это есть сумма 3 складов. Раз $1\text{-й} + 2\text{-й} = 790$, то $3\text{-й} = 550$. Остальное легко».

Точно такая же картина наблюдалась и в экспериментах со способными учениками VI—VIII классов. В задачах основной XIII серии способные ученики (29 чел.) в 84% случаев находили наиболее рациональное решение, прекрасно отдавая себе отчет в том, почему они считают данный вариант решения наилучшим. В 61% случаев это решение было найдено первым и в 39% — вторым. Все способные учащиеся, найдя решение задачи, продолжали поиски лучшего варианта, несмотря на то что от них этого не требовалось. В некоторых случаях найденные способными учениками «изящные» решения представляют большой интерес.

Вот как ученица VIII класса С. Г. решила задачу XIX—А—11. Первоначально она составила сложную систему уравнений с че-

тырмья неизвестными (путь, с которого начинали почти все школьники). Не пытаясь решать составленную ею систему, С. Г. говорит: «Решить-то можно, но уж очень громоздко. Здесь где-то должно быть более простое решение. Да тут и не надо уравнения: 40 может быть только произведением двух цифр: 5×8 . А цифра тысяч меньше цифры единиц, значит, число такое 5 — — 8. Ну, все ясно. Число — 5478» (на просьбу пояснить, она говорит: «28 есть произведение только двух цифр: $4 \cdot 7$. Цифра сотен меньше цифры десятков. Остается только расставить эти цифры»). Эксп.: «А как ты решила, например, что 40 может быть только произведением цифр 5 и 8?». Ученица: «Ну, а как же: разложим на множители: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Одна из цифр обязательно 5, так как 10 не может быть. Ну, а другая цифра, значит, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ »).

Семиклассник Валя Х. решает задачу XIX—A—10. Он нашел прежде всего наименьшее общее кратное данных чисел (60) и произнес: « $60 - 2 = 58$. Это число 58». По просьбе экспериментатора пояснил: «Я представил все числа и остатки столбиком и сразу увидел, что во всех случаях разница между делителем и остатком — 2. Значит, если добавить к искомому числу 2, то оно разделится на все числа без остатка. Наименьшее из таких чисел — 60. Но теперь уберем двойку — будет 58».

Если средние (не говоря уже о неспособных) учащиеся не обращали в наших экспериментах особого внимания на качество решения (если только на этот счет не было специального задания экспериментатора), то способных обычно не устраивало первое найденное ими решение. Они не прекращали работы над задачей, выясняя, а нельзя ли улучшить решение, нельзя ли решить задачу проще. Они явно испытывали чувство удовлетворения только тогда, когда найденное ими решение было экономным, рациональным, «изящным». По их эмоциональной реакции было совершенно очевидно, что они в этом случае испытывали своеобразное эстетическое чувство. Такое же чувство они испытывали, когда знакомились с «изящным» решением задачи (если они не могли найти его), которое демонстрировали их товарищи или экспериментатор. И наоборот, многие прямо говорили о чувстве неудовлетворения и досады, когда найденное решение было «грубым», громоздким, сложным, а лучшего они найти не могли.

Приведем типичный случай:

Семиклассница Р. С. решает задачу X—A—12. Первоначально она обозначила число лет «мне» через x , а «брату» — через y и составила такую таблицу (см. первую таблицу на стр. 316). Составив таблицу, она критически посмотрела на нее и, видимо, осталась не очень довольна. Однако решение продолжала. На составление таблицы у нее ушло около 3 мин. Зато система уравнений была составлена за несколько секунд:

$$y + 2y - x = 96 \text{ и } x = 3(2x - y).$$

	Было	Теперь	Будет
Мне	$x - (y - x)$	x	y
Брату	x	y	$y + (y - x)$

Решив задачу, Р. С. снова стала чертить таблицу. Эксп.: «Ну, задача решена, займемся другой». Ученица: «Чувствую, ее можно проще решить. Тут все зависит от того, как обозначить неизвестные. Видимо, я не очень удачно обозначила. Попробую по-другому». Эксп.: «А зачем? Задача решена». Ученица: «Мне хочется по-другому решить. Подождите минутку. Попробую через y обозначить разницу лет, вроде проще получается (изменяет таблицу). Таблица приобретает следующий вид:

	Было	Теперь	Будет
Мне	$x - y$	x	$x + y$
Брату	x	$x + y$	$x + 2y$

Ну, вот это — другое дело. Теперь и в уме можно решить».

Выводы, полученные нами, подтверждаются и другими, опубликованными в самое последнее время, материалами. А. В. Зосимовский, наблюдавший способных учеников на уроках, пишет, что «они особенное удовлетворение испытывали тогда, когда найденное ими решение изящно, красиво, оригинально» [131, стр. 51]. Е. П. Иванцына отмечает, что при решении геометрических задач на доказательство одни ученики обнаруживают стремление идти наиболее коротким и экономным путем, в то время как другие идут длинным и неэкономным путем с большим количеством действий, уводящих учеников в сторону от рационального пути решения [138].

§ 5. Обратимость мыслительного процесса в математическом рассуждении (способность к быстрому и свободному переключению с прямого на обратный ход мысли)

Под обратимостью мыслительного процесса здесь понимается перестройка его направленности в смысле переключения с прямого на обратный ход мысли. Это понятие объединяет

в данной работе два разных, хотя и связанных друг с другом процесса.

Во-первых, это установление двусторонних (или обратимых) ассоциаций (связей) типа $A \leftarrow \rightarrow B$ в противоположность односторонним связям типа $A \rightarrow B$, функционирующим только в одном направлении.

Во-вторых, это обратимость мыслительного процесса в рассуждении, обратное направление мысли от результата, продукта к исходным данным, что имеет место, например, при переходе от прямой к обратной теореме. При обратном ходе мысли далеко не всегда мысль должна проходить в точности тот же самый путь, но в обратном порядке. Важно то, что если первоначально направление мысли было от A к E , то теперь она движется в обратном направлении, от E к A , но не обязательно должна проходить строго все те же самые звенья, ту же самую цепь ассоциаций в обратном порядке. Промежуточные звенья могут отличаться друг от друга. Разве обратная теорема — это прямая теорема, лишь «прочитанная» в обратном порядке? Здесь мысль отталкивается от того, что ранее требовалось доказать, и стремится к тому, что раньше было исходным. Но конкретные пути, которые проходит мысль, могут очень различаться. Поэтому обратный ход мысли нельзя всегда сводить к обратным ассоциациям.

Однако указанное различие не дает оснований резко обособлять то и другое. В обоих случаях имеет место (и это для нас самое главное) «крутой» поворот мысли от движения в одном направлении к движению в обратном направлении, и такой поворот представляет для многих учащихся определенные трудности, в сознании еще сохраняется стремление к цели, а необходимо осуществить сразу после этого резкий поворот — начать движение от цели. Поэтому, вообще говоря, есть основания (как это делают, например, Н. А. Менчинская и Е. Н. Кабанова-Меллер) рассматривать переход с прямого на обратный ход мысли как одно из проявлений гибкости мышления. Из сказанного выше ясно, что мы не придаем понятию обратимости того значения, какое ему придает Пиаже (см. раздел I, гл. II, § 2).

Итак, мы будем говорить о прямых и обратных связях¹. Последовательность мысли, например, от A к D будет считаться прямой связью по отношению к этому последовательность мысли, идущая в противоположном направлении (от D к A) будет считаться обратной связью.

Многочисленные психологические исследования у нас и за

¹ Здесь и всюду термин «обратная связь» употребляется в традиционно-психологическом смысле, а не в том значении, которое придается этому термину в кибернетике, теории информации.

рубежом показали, что при установлении прямых связей одновременно могут образовываться и обратные связи.

Советские психологи установили, что при прочих равных условиях установление двусторонних («прямых» и «обратных») связей является важным условием всестороннего усвоения учебного материала. В частности, Е. Н. Кабанова-Меллер [147], [148, стр. 64, 76] на географическом материале установила, что не все учащиеся могут самостоятельно переходить от прямых к соответствующим обратным связям. Сильные, хорошо успевающие школьники, по данным Е. Н. Кабановой-Меллер, устанавливая связи в одном направлении, довольно легко переходят и к осознанию связей в обратном направлении. Слабым учащимся это недоступно, у них приходится специально формировать эти обратные связи путем соответствующих упражнений.

То же самое показали на материале усвоения младшими школьниками элементарного понятия функциональной зависимости В. Н. Куликов [231], на материале усвоения физических понятий З. И. Калмыкова [158, стр. 38—39]. В самое последнее время (1963—1965 гг.) в работах Е. И. Машбица [284], [285] на геометрическом материале была сделана попытка наметить этапы формирования математических операций в зависимости от формирования операции обратимости.

Обратным связям, устанавливаемым в процессе изучения математики, уделили внимание и математики-методисты П. М. Эрднеев [462], [463] и Я. И. Груденов [99], [100], [101].

Как уже указывалось, мы поставили своей задачей выявить различия между способными, средними и неспособными к изучению математики учащимися в плане способности резко перестраивать направленность мыслительного процесса, переходить с прямого на обратный ход мысли, устанавливать указанные обратимые (двусторонние) связи и системы связей. На выяснение этого вопроса были направлены задачи XVII серии.

Способные ученики справлялись с предложенными обратными задачами¹ без особого труда. Специально обучать их решению обратных задач не было надобности. Предъявленные способным учащимся обратные задачи немедленно опознавались ими именно как обратные к только что решенным. Решение обратной задачи непосредственно после решения основной (прямой) не затрудняло учащихся, ничего похожего на интерференцию навыков обнаружено не было, тормозящего влияния первой задачи на решение второй не наблюдалось. Более того, примерно в половине случаев оказывалось, что обратная задача,

¹ Обратными задачами в психологическом смысле мы считали все те задачи (независимо от их математической характеристики), которые требуют резкой перестройки направленности мыслительного процесса, переключения с прямого на обратный ход мысли после решения прямой задачи.

предъявленная сразу после прямой, решалась быстрее, легче, чем обратная задача, предъявленная независимо от прямой, как самостоятельная задача. Все это означало, в частности, что установленные в прямом направлении связи и их системы сейчас же («с места») приобретали обратимый характер. Установка, формирование прямых ассоциаций означали одновременное (или почти одновременное) формирование, установку обратных ассоциаций.

Средние ученики в подавляющем большинстве случаев без специальных упражнений сразу не справлялись с решением упомянутых обратных задач. Они, правда, в большинстве случаев (примерно, в 60%) опознавали данную им обратную задачу как обратную, но делали это не очень уверенно. Решение обратной задачи сразу после прямой явно сковывало мысль и действия испытуемых, — первая задача оказывала тормозящее влияние. Вместе с тем обратная задача, предъявленная независимо от прямой, решалась гораздо более уверенно. После соответствующих упражнений, обучения средние ученики сравнительно быстро усваивали суть дела. Таким образом, установление обратных связей для среднего ученика требует специфических упражнений и разделено во времени с образованием прямых связей — сначала формируется прямая связь, а потом, в результате соответствующих упражнений, обратная связь.

Что касается неспособных учеников, то во второй предъявленной им задаче они видели обратную только в простейших случаях, в частности, когда это была та же самая, но трансформированная из прямой в обратную задача, и судили при этом по чисто внешним признакам («там это спрашивалось, а теперь это дано»). Обратная задача, предъявленная самостоятельно и независимо от прямой, во всех случаях решалась лучше и увереннее, чем тогда, когда она предъявлялась вслед за первой. Отмеченная выше закономерность очень хорошо выявлялась в процессе доказательства прямых и обратных теорем. Доказательство обратной теоремы непосредственно вслед за прямой всегда вызывало очень большие трудности. При этом учащиеся с заметным постоянством сбивались на ход рассуждения, усвоенный ими при доказательстве прямой теоремы. Та же обратная теорема, рассматриваемая независимо от прямой, вызывала несравненно меньше трудностей. Отдельные исключения наблюдались только в случае решения самых простых задач теста XVII—В, что объяснялось, по-видимому, спецификой задач — разложить многочлен на множители по формуле сокращенного умножения оказалось для некоторых неспособных учащихся легче, если перед этим они возводили двучлен и квадрат по той же формуле. По-видимому, здесь имело место прямое «наталкивание» — процесс решения первой задачи ясно показывал, что именно должно получиться во втором случае. Таким образом,

как прямые, так и обратные связи устанавливались у них с трудом и при наличии многократных упражнений. При этом установка обратных связей являлась для них, как правило, совершенно особой, самостоятельной задачей, не связанной с наличием соответствующих прямых связей. Можно упорно закреплять у них прямую связь, но обратная связь без специальных упражнений все равно не выработается. При этом речь идет о правильных обратных связях. Зачастую неспособные устанавливали неправильные связи путем, например, простой перестановки посылки и заключения (типа: «вертикальные углы равны» — «равные углы вертикальны»). У них даже не возникает вопроса, а верно ли в данном случае обратное (теорема, ход рассуждений).

Способный ученик К. Р. «с места» овладел типом решения по формуле «произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел».

Эксп. «Теперь разложи на множители выражение $(x - y)^2 - 25y^2$ ».

Ученик. «А эта задача наоборот: тут уже есть разность квадратов. Она уже решена».

Эксп. «Чему же это выражение равняется?»

Ученик. $(x - y + 5y^4)(x - y - 5y^4)$. Надо подумать, из чего получились квадраты, взять сумму этих чисел и помножить на разность. Это понятно».

Неспособный ученик Б. А. с известным трудом, после большого количества упражнений, овладел способом решения задач по той же формуле. Ни одну из предложенных обратных задач он даже не пытался решать.

Эксп. «Реши задачу: $5 \cdot 5 =$ (ученик дает верный ответ). А теперь реши такую: какие числа надо перемножить, чтобы получить 25 (ученик дает верный ответ). Теперь смотри: $5 \cdot 5 = 25$, а $25 = 5 \cdot 5$. Вторая задача обратная первой. Реши задачу $(2x + y) \cdot (2x - y) =$ (ученик дает верный ответ). Правильно. Но если $(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$, то, наоборот, можно ли сказать, что $4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$? (Ученик дает утвердительный ответ.) Ну, а $9x^2 - 4y^2$ чему равняется?»

Ученик. «Не знаю. Это какие-то чудные задачи. Мы таких не решали».

Эксп. «Да, не решали, но учимся решать. Вот ты подумай: чему равно произведение суммы двух чисел на их разность? Это ты знаешь».

Ученик. «Произведение суммы двух чисел на их разность равняется квадрату первого минус квадрат второго».

Эксп. «Верно. А обратно можно сказать? Чему равна разность квадратов? Чему равно $a^2 - b^2$?»

Ученик. « $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ».

Эксп. «А $9x^2 - 4y^2$ чему равно?»

Ученик. « $(9x+4y)(9x-4y)...$ »

Дальнейший ход беседы опускаем. Лишь после многократных пояснений и упражнений ученик научился решать задачи этого типа, да и то только простейшие.

Приведем несколько типичных примеров из выполненного под нашим руководством исследования С. И. Шапиро.

Учащиеся IX класса овладели формулой $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ в прямом порядке («слева направо»). Экспериментатор дает им вычислить $\cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 30^\circ =$; таких примеров никто из них еще не решал. Для решения необходимо хорошо известную формулу использовать «справа налево». Произошла резкая и четкая дифференцировка учащихся. Все способные учащиеся решили этот пример с применением указанной формулы за считанные секунды ($\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Больше половины средних учеников не справились с этим заданием, тщетно пытаясь с помощью громоздких преобразований найти \sin и \cos угла в 15° (значение этих функций для угла 30° им были известны). Лишь около трети средних учащихся нашли правильный путь, но после долгих и безуспешных попыток прийти к решению явно нерациональным путем.

При введении понятия комплексного числа в X классе учащимся было предложено перемножить $(a+bi)(a-bi)$. Получив в ответе a^2+b^2 , способный учащийся Д. сразу обратил внимание («сработала» обратная ассоциация) на то, что «теперь, оказывается, сумма квадратов разлагается на множители! Раньше было невозможно, а теперь возможно, когда мы узнали мнимые числа». И тут же поставил вопрос о разложении на множители суммы любых четных степеней (типа $a^4+b^4=(a^2+b^2i)(a^2-b^2i)$). Средний ученик П. правильно произвел умножение, но не заметил ничего. Когда его через 10 мин. после этого попросили разложить на множители выражение x^2+y^2 , то он очень удивился и объявил, что этого нельзя сделать.

Подводя итоги всему сказанному, можно сделать вывод, что способные к математике ученики отличаются способностью быстро и резко перестраивать направленность мыслительного процесса с прямого на обратный ход мысли, свободной обратимостью процесса рассуждения; формирующиеся у них связи сразу приобретают обратимый характер. У неспособных этот процесс чрезвычайно затруднен.

§ 6. Гипотеза об акценторе математического действия

Как известно, решение многих сложных задач не приходит сразу. Обычно учащиеся пробуют различные возможности, испытывают различные пути, осуществляют различные попытки решения. Многие авторы отмечали различный характер таких проб

в процессе решения задач. При этом надо отметить принципиальное различие трактовок советских и американских психологов по этому вопросу. В американской психологии до сих пор является распространенной тенденция рассматривать учение как деятельность, происходящую на основе проб и ошибок, случайно производимых наудачу действий, отбора удачных действий (которые подкрепляются и, следовательно, закрепляются) и постепенного выпадения неудачных. Такой подход свойствен даже исследованиям последнего времени. Например, на такой позиции стоят по сути дела Г. Клаусмайер и Л. Локни [625], [626], анализирующие поведение детей с различными показателями интеллекта во время решения ими задач (представляющих «трудности для уровня их настоящих достижений»). В статье А. Ньюэлла, Д. Шоу и Г. Саймона «Процессы творческого мышления», опубликованной в 1963 г., говорится: «Несмотря на примитивный характер процессов проб и ошибок, они лежат в основе очень большого класса подлинно творческих процессов решения задачи» [493, стр. 510].

Советские психологи отмечают, что пробы человека носят принципиально иной характер, они направляются осознанной целью, им часто предшествует определенная гипотеза, пробы человека сознательно организованы, в них есть определенная система, часто они выступают в форме умственного эксперимента (Л. Н. Ланда [242], А. Н. Захаров [130, стр. 47]). При этом пробы могут осуществляться на разном уровне аналитико-синтетической деятельности. Только на самом низшем уровне пробы эти являются слепыми пробами-угадываниями, когда учащиеся не отдают себе отчета в том, почему производится именно эта проба и что они должны получить в результате ее.

В наших экспериментах наблюдались значительные качественные различия в характере проб способных и неспособных учащихся. Пробы, которые осуществляли неспособные к математике ученики, всегда носили характер слепых немотивированных манипуляций, хаотических и бессистемных попыток найти решение (вернее, это были попытки угадать, случайно натолкнуться на решение).

Способных же учащихся отличала организованная система поиска, подчиненная определенной программе, определенному плану. Пробы способных — это всегда целенаправленные и систематизированные поиски, направленные на проверку сделанных предположений. Производя пробу, способные учащиеся обычно отдавали себе отчет в том, для чего это делается, что ожидается и что за этим последует дальше.

Обращает на себя внимание следующее: при решении трудных задач способными учащимися пробы часто являлись не столько непосредственными попытками решения задачи, сколько средством всестороннего

исследования ее с извлечением из каждой пробы дополнительной информации. В результате у учеников возникает представление о сущности скрытых математических соотношений, непосредственно в задаче не данных (но вытекающих из сущности данных в задаче соотношений), и на этой основе вырабатывается дальнейший план действий. В этих случаях наши испытуемые так и говорили: «Я еще не решаю задачу, я хочу ее лучше узнать», «А до решения можно попробовать посмотреть задачу?»

Чем определяется направленность поисков? Целый ряд исследований проливает свет на этот вопрос. Естественно, что в первую очередь исследователи пытаются охарактеризовать специфические особенности анализа задачи в процессе ее решения. В этом отношении особенно плодотворны работы С. Л. Рубинштейна и его сотрудников. Выделенные ими две формы анализа — анализ-фильтрация и направленный анализ через синтез, равно как и близкое этому понятие антиципирующего (предвосхищающего) анализа (Н. А. Менчинская), во многом объясняют процесс предвидения и планирования хода решения. О. П. Терехова [416] также рассматривает формы анализа задачи, результатом которого является план (программа) ее решения. В самое последнее время проблеме направленности мыслительного процесса при решении задач уделяет большое внимание А. В. Брушлинский [59], [60], [61], [62].

В процессе экспериментов перед нами возник вопрос: на основании чего способные учащиеся, еще не окончив пробы, часто уже чувствуют, что идут верным путем (или, наоборот, чувствуют, что таким путем не придут к цели)? На основании чего, еще не приступив к решению, способные учащиеся уже чувствуют возможные пути решения, «предвосхищают» неизвестное? Оценка рациональности данного пути решения по ходу решения свойственна способным учащимся в отличие от средних, которые могут оценить избранный путь решения, только доведя его до конца. Возникает предположение о существовании какого-то функционального контрольно-оценочного психологического механизма, с помощью которого осуществляется это сопоставление, «примеривание», обработка «обратной информации» от каждой пробы. Л. Л. Гурова в докладе на Украинской психологической конференции (1964 г.) говорила об очень близком этому понятию «обобщенного представления об искомом результате», на основе которого и осуществляется поиск.

Что же это за механизм?

Обратимся к разработанному П. К. Анохиным понятию об особом функциональном контрольном корковом аппарате, так называемом акцепторе действия (акцептор в переводе с латинского означает «одобряю», «принимаю»). Акцептор выполняет функции оценки корой головного мозга результатов любого дей-

ствия и обеспечивает целесообразность всего, что совершает человек. Природа акцептора, конкретный механизм его функционирования пока еще неясны. По-видимому, это особая система, в которой зафиксированы результаты прошлого опыта. Акцептору адресуется обратная афферентация от выполняемого действия. «Обратная афферентация информирует о результатах совершенного действия, давая возможность организму... оценить степень успеха выполненного действия» [29, стр. 288]. П. К. Анохин различает «этапную» обратную афферентацию и «конечную» обратную афферентацию в зависимости от того, информирует ли она о результатах какого-то промежуточного действия или об окончательном выполнении исходного намерения [29, стр. 289—290]. В акцепторе происходит сопоставление того, что делается, с тем, что надо сделать, и оценивается правильность выполняемого действия. Иными словами, акцептор направляет и регулирует ряд проб [28], в случае неадекватности афферентных импульсов акцептору организм производит новый анализ, новое обследование ситуации.

Насколько понятие акцептора может быть применено к анализу процесса учения, процесса решения задач?

П. К. Анохин пишет: «В последнее время мы все чаще и чаще получаем материал, говорящий о том, что центральная нервная система весьма широко использует принцип акцептора действия» [28, стр. 86]. Он подчеркивает в связи с этим, что эта теория может объяснить и некоторые психические феномены. В частности, «все вопросы обучения идут с обязательной корректирующей ролью обратных афферентаций, только на этом основании и возможно самообучение. Всякое исправление ошибок есть неременный результат несовпадения возбуждений акцептора действия и обратных афферентаций от неправильного действия. Вне этого механизма невозможно как обнаружение ошибки, так и исправление ее» [27, стр. 38].

Материалы нашего исследования позволяют предположить существование акцептора математического действия как своеобразного контрольно-оценочного психологического механизма, куда поступает «этапная» и «конечная» обратная информация от каждой математической пробы, каждого математического действия при решении задач. В основе этого механизма лежит формирующаяся у способных к математике учащихся и выполняющая функции акцептора определенная обобщенная система связей как концентрация прошлого «математического» опыта.

Перед осуществлением того или иного математического действия, поиска, пробы актуализируется своеобразное общее представление о ходе и результате этого действия, поиска, пробы. Обратная информация в процессе совершения математического действия соотносится с этим общим представлением, что позволяет оценить полезный эффект совершаемых действий, достаточ-

ность или недостаточность, правильность или неправильность их и открывает возможность коррекции поисковых проб в процессе их проведения, выработки дальнейшего плана действий. Соответствие выполняемой пробы этому общему представлению (акцептору математического действия) выступает как особая форма подкрепления и переживается учащимся как чувство правильности избранного пути (и наоборот). Все это есть своеобразное выражение самоконтроля (а самоконтроль, как известно, необходимый элемент любой целенаправленной деятельности).

Возможно, что различный характер проб, осуществляемых в процессе решения задачи способными и неспособными учащимися, и объясняется наличием акцептора математического действия у первых и отсутствием его у вторых (акцептор, по нашему предположению, продукт обобщенного математического мышления, которое хорошо развито у способных и очень слабо выражено у неспособных).

Все сказанное выше об акцепторе математического действия есть только постановка проблемы для дальнейшего исследования. Нашей дальнейшей задачей будет проверка этой гипотезы, выявление сущности и значения акцептора математического действия, условий его формирования и механизма его действия.

Глава V

ОСОБЕННОСТИ ХРАНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ (МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА) СПОСОБНЫМИ К МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКАМИ

Особенности хранения математической информации школьниками выявлялись путем сравнения соответствующих проявлений мнемической функции очень способных и способных школьников, с одной стороны, и неспособных — с другой. Средние ученики в этом отношении подвергались менее детальному исследованию. Соответствующими тестами было исследовано 38 способных и очень способных учащихся, 9 средних и 18 неспособных.

Мнемическая функция способных к математике учащихся проявлялась дифференцированно по отношению к различным элементам математических систем (задач). Сразу («с места») запоминались и прочно сохранялись в памяти типовые признаки задач и обобщенные способы их решения, схемы рассуждений, основные линии доказательств, логические схемы. Конкретные данные и цифровой материал запоминались хорошо, но в основном на срок решения задач, после чего быстро забывались.

В этой связи надо отметить, что Л. П. Доблаев [114] установил наличие так называемых «срочных» ассоциаций, которые

действуют в течение ограниченного и вполне определенного срока — пока решается данная конкретная задача. После того как задание выполнено, такие ассоциации становятся бесполезными и быстро распадаются. По-видимому, и некоторые проявления математической памяти отличаются аналогичными особенностями. Лишние, ненужные данные (если они вводились в задачу) способными учащимися обычно не запоминались. Большинство способных учащихся вскоре после решения забывали содержание задачи, но хорошо помнили способ решения задач данного типа, родовую структуру действий.

На запоминание и сохранение ряда задач VI серии исследовались 26 способных учеников. Для этого были выбраны 8 задач: А—1, А—3, Б—1, Б—2, В—2, Д—1, Д—3 и Д—4. Всего, таким образом, было получено 208 воспроизведений задач. В задачи были введены ненужные данные (по одному на каждую задачу). Учащиеся воспроизводили задачу после одного чтения, в конце экспериментального занятия (урока), через неделю и через три месяца. Мы следили за тем, чтобы в течение этого времени учащиеся не возвращались к данной задаче. Отмечалось, как в каждом случае воспроизводятся существенные отношения и общий способ решения, конкретные данные, ненужные данные. Сводные данные показаны в таблице 20.

Таблица 20

Элементы задачи	После одного чтения		В конце урока		Через неделю		Через 3 месяца	
	число воспроизведений	в %	число воспроизведений	в %	число воспроизведений	в %	число воспроизведений	в %
Обобщенные существенные отношения	207	99,5	199	95,7	192	92,8	178	85,6
Конкретные данные	182	87,5	148	71,2	20	9,6	4	2,0
Ненужные данные	156	75,0	64	30,8	2	1,0	—	—

Изобразим полученные данные на диаграмме (см. рис. 66).

Нам приходилось не раз проводить следующий несложный эксперимент: способный ученик решал задачу определенного типа, а через два-три месяца ему давалась задача такого же типа (но не та, которую он решал раньше), причем такая, которую он заведомо не решал ни в классе, ни дома. Часто при этом у ученика появлялось «чувство знакомости», — он уверял, что уже решал эту задачу (не такого типа, а именно эту), даже указывал, примерно, на каком экспериментальном занятии это

было. Объяснить это можно только единственным способом: ученик сохранил в памяти тип задачи и обобщенную схему ее решения, поэтому другую задачу этого же типа и с этой же схемой решения он и воспринял как знакомую.

Аналогичные результаты были получены и при исследовании особенностей проявления мнемической функции в отношении математических объектов и у очень способных школьников.

Так, для экспериментов с Соней (когда ей было 9 лет) было отобрано десять экспериментальных задач (из серий VI и XII). Соня должна была воспроизводить их после одного чтения, в конце урока, через 3 и через 9 месяцев (в это время мы регулярно проводили с нею экспериментальные занятия по обучению математике и могли строго контролировать ее деятельность в области этого предмета). Полученные данные очень выразительны:

а) комплексы существенных типовых признаков помнились ею и через 9 месяцев в 90% случаев (9 случаев из 10);

б) конкретные данные начинали забываться уже в конце урока (т. е. через 45 мин.). Через 3 месяца они помнились только в 10% случаев (1 случай из 10), да и то в случае особенной их «выразительности» (задача VI—Д—4);

в) лишние, ненужные данные помнились уже в конце урока только в 10% случаев (1 из 10), а через 3 месяца забывание было полным.

У средних учеников мы не обнаружили подобной дифференциации. Они лучше помнили конкретные данные, цифры, но хуже помнили типовые особенности задачи или не помнили их совсем. У средних учащихся обнаруживалась одинаковая установка на запоминание общего и частного, абстрактного и конкретного, существенного и несущественного. Можно сказать, что их память была «перегружена избыточной информацией».

Каковы же результаты исследования неспособных учеников?

По результатам опытов все испытуемые группы экспериментального обучения (в которой, как указывалось, были неспособные ученики и ученики со способностями ниже средних) разде-

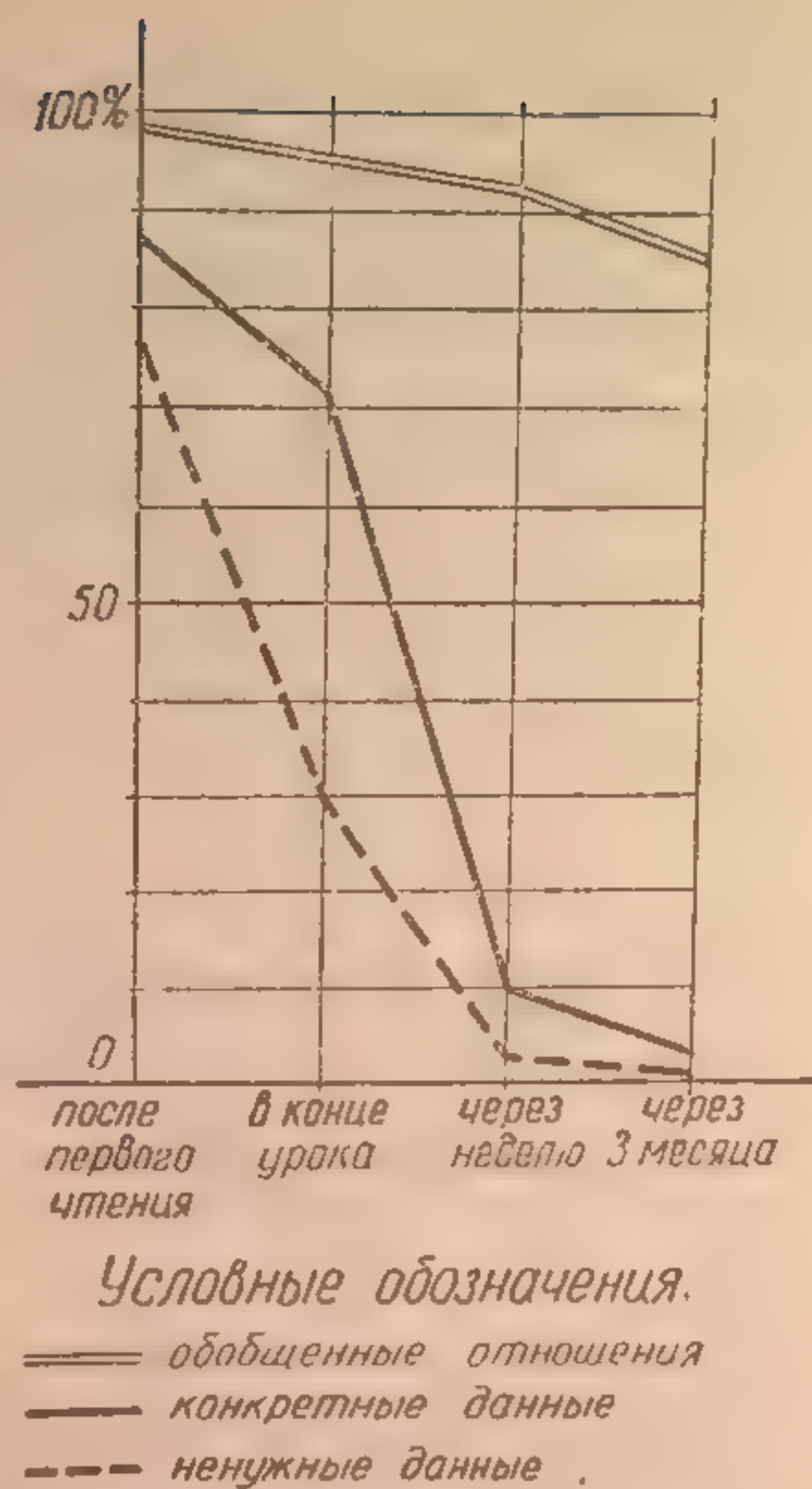


Рис. 66. Кривая забывания элементов задачи способными к математике школьниками (суммарное число воспроизведенных элементов по 26 испытуемым в процентах к общему числу воспроизведений).

Таблица 20

Через 3 месяца	
число воспроизведений	в %
178	85,6
4	2,0
—	—

см. рис. 66). несложный, а такого же, а такая, которую при этом и уверял, что занятый это

лились на 3 неравные группы. Наиболее многочисленная группа (10 чел. из 17) показала очень заметную слабость мнемической функции в математической сфере (как в области математических обобщений, так и в области конкретных числовых данных). При этом многие из учеников отличались хорошей памятью в области других учебных предметов.

Эти ученики плохо запоминали, в частности, схемы рассуждений при решении типовых задач, доказательстве теорем, выведении формул. Такой материал требовал от них больших усилий и продолжительного времени для заучивания, быстро забывался, в связи с чем требовалось постоянное повторение. Многие ученики запоминали его механически и воспроизводили бессистемно. Даже когда эти ученики с помощью экспериментатора понимали и осознавали тип задачи, обобщенный характер действий при ее решении, все это быстро улетучивалось из памяти, если только ученики не повторяли регулярно соответствующий материал. Плохо запоминался ими и конкретный математический материал — числа, факты, в том числе и конкретный геометрический материал. Ни один из учеников этой группы не мог воспроизвести ни одной экспериментальной задачи спустя неделю после того, как решил ее, не говоря уже о трех месяцах. Многие забывали существенные элементы задачи уже в конце урока. Например, В. Т. с помощью экспериментатора усвоил два способа доказательства теоремы о внешнем угле треугольника. Усвоил как будто бы хорошо. Но к концу урока выяснилось, что один способ он уже забыл, а второй воспроизвел неточно. Другой пример. Всем учащимся понравилась своей оригинальностью задача о рыбе (задача VI—А—1). Учащиеся охотно решали ее. С трудом, с помощью экспериментатора ее решили почти все. Но уже через час 4 человека из 10 забыли основные соотношения, данные в задаче, и принцип ее решения. Через 7 дней оказалось, что только 3 человека помнят тип задачи («известно, сколько весит голова с хвостом, хвост с телом и тело с головой. Надо узнать вес всей рыбы»). Воспроизвести же (вспомнить, а не заново найти) принцип решения сумела только одна ученица.

Вторая группа (3 чел.) отличалась от первой тем, что мнемическая функция проявлялась у них уже по-разному по отношению к различным элементам математических систем (задач). Обобщенные элементы запоминались ими так же плохо, как запоминались они учениками первой группы. Зато конкретные числа, цифры, значения, конкретные задачи, геометрические фигуры, расположение вспомогательных линий при построении геометрических доказательств — все это помнилось хорошо.

Например, мы формировали у учащихся понятие о треугольнике. На доске была сделана целая серия чертежей различных треугольников, в том числе самого необычного вида (это было

заранее подготовлено и зафиксировано). Вслед за этим фигуры были стерты. Все 17 учащихся слушали внимательно, но зарисовок в тетрадах не делали. Когда мы спустя две недели попросили воспроизвести именно те треугольники, которые были начерчены тогда, когда объяснялось понятие о треугольнике, то оказалось, что из 17 человек никто этого не помнит, кроме двух учеников как раз указанной выше второй группы (третья ученица на уроке не присутствовала). Из 6 данных в свое время треугольников В. Д. совершенно правильно воспроизвела 3, а В. У. — 4. Но эти же учащиеся с большим трудом запоминают сложные определения, формулировки, общие схемы рассуждений и доказательств. В этом случае они обычно идут по пути механического заучивания, воспроизводя их дословно. Характерную ошибку, например, допустила при воспроизведении примера $113^2 - 112^2$ ученица И. Г. Смысл алгебраического решения этого примера заключался в том, что здесь открывается возможность быстрого решения его в уме, если только увидеть в нем разность квадратов ($a^2 - b^2$). И. Г. с помощью экспериментатора решила эту задачу. Однако она уже через неделю забыла указанное математическое соотношение («два числа представляют собой разность квадратов»), но хорошо помнила, что там фигурировали числа 113 и 112. Пример этот она сначала воспроизвела так: $113 \cdot 112$, потом так: $113 + 112$ и, наконец, подумав, дала третий вариант: $113^2 + 112^2$ и тщетно пыталась вспомнить, как же можно решить такую задачу легко, в уме. Она же спустя неделю воспроизводила решенную ею задачу (VI—А—3) так: «Там мать, дочь и сын деньги тратили — один потратил 15, другой 20, третий 25 руб.» Как видим, забыто было главное — система обобщенных отношений, характерная для задач этого типа.

Третья группа, куда вошли 4 учащихся, отличалась более высокой степенью развития способности к запоминанию математических обобщений. Правда, и здесь особых достижений не отмечалось, но уровень развития указанного качества был все-таки более высоким по сравнению с двумя первыми группами.

Итак, ученики, неспособные к математике, отличаются плохой памятью на обобщенный математический материал, отвлеченные математические отношения и символы, в частности типы задач, схемы рассуждений и доказательств, обобщенные способы решения задач.

Способные ученики в большинстве случаев довольно долго помнят тип решенной ими в свое время задачи, общий характер действий, но не помнят конкретных данных задачи, чисел. Неспособные, обычно наоборот, помнят только конкретные числовые данные или конкретные факты, относящиеся к задаче. Если неспособный помнит, что решал «какую-то задачу с клет-

ками и кроликами», или «что-то про рыбу, которая весит 2 пуда», то способный обычно гораздо чаще помнит тип задачи (или помнит и конкретные данные и тип): «Решала задачу на различные сочетания частей целого — про рыбу, у которой хвост с головой весит столько-то, голова с туловищем — столько-то, и хвост с туловищем — еще столько-то»; «Да, была задача на изготовление фабрикой каких-то изделий, кажется, столов: как изменится срок выполнения заказа, если увеличится ежедневное производство».

Очень выразительные данные относятся к воспроизведению нереальных задач XI серии. Воспроизводя, например, через неделю задачу XI—А—3, неспособные ученики чаще всего либо совсем не помнили задачи, либо говорили так: «Помню что-то надо было сделать с цифрами 5 и 7». Способные же обычно отвечали примерно так: «Помню, задача была на математическое выражение чисел, которые делятся на данное число с определенным остатком. Какие числа — не помню; помню только, что была хитрость — остаток был больше делителя».

Как мы видим из этих данных сущность математической памяти заключается в обобщенном запоминании типовых схем рассуждений и действий. Что же касается памяти на конкретные данные, числовые параметры, то она «нейтральна» по отношению к математическим способностям — сила ее или слабость (как это показало наше исследование) — сама по себе не определяет ни способности к математике, ни неспособности к ней. Это вполне соответствует указанию академика А. Н. Колмогорова [180] о том, что успех в математике меньше всего основан на механическом запоминании большого числа фактов, цифр, чисел, формул и т. д. Обладать такой памятью, пишет А. Н. Колмогоров, конечно, полезно, но большинство математиков не обладают какой-то особенной, выдающейся памятью.

О том, что математику вовсе не обязательна какая-то экстраординарная память, говорил и известный французский математик А. Пуанкаре [498]. А русский математик Д. Мордухай-Болтовский писал: «Математику нет необходимости удерживать в памяти все доказательство теоремы. Необходимо помнить лишь исходный и конечный пункт и идею доказательства» [300, стр. 525].

В психологической литературе имеются отдельные, правда очень немногочисленные, работы, посвященные особенностям запоминания школьниками математического материала. Интересный материал (исследование Коваля) приводится в статье А. А. Смирнова [384]. Учащиеся III класса должны были после решения арифметических задач разной степени трудности воспроизвести числа, фигурирующие в задаче. Оказалось, что отличники воспроизводят числа хуже, чем слабоуспевающие,

и чем труднее задача, тем хуже запоминаются числа. Автор (Коваль) объясняет это тем, что для отыскания способа решения числа существенного значения не имели, потому и запоминались плохо. К сожалению, он не пытался выяснить, как запоминаются обобщенные способы решения, обобщенные отношения, «извлеченные» из задач. Р. О. Серебрякова [370] показала, что неспособные ученики VI—VII классов сравнительно хорошо запоминают и сохраняют в памяти отдельные разрозненные данные и детали. И. М. Соловьев отмечает, что показателем возникновения в развитии ребенка познавательной деятельности нового качества является возможность запоминания и воспроизведения «каркаса» задачи, ее «голой структуры», «при выпадении всего, не относящегося прямо к структуре задачи» [391, стр. 124—128].

Весь изложенный выше материал позволяет сформулировать определенный вывод. Математическая память способных учащихся носит обобщенный и оперативный характер, связанный с сохранением и возможностью быстрой актуализации обобщенных мыслительных схем, обобщенных отношений в сфере числовой и знаковой символики.

Другими словами, память способного к математике ученика носит ярко выраженный избирательный характер: мозг сохраняет не всю поступающую к нему математическую информацию, а преимущественно ту, которая «очищена» от конкретных данных и представляет собой обобщенные и свернутые структуры. Это наиболее удобный и экономный способ хранения математической информации.

Сохранение информации в обобщенной и сокращенной форме (в «уплотненной» форме по терминологии Брунера [480, стр. 26]) не загружает мозг избыточной информацией и, следовательно, позволяет дольше ее хранить и легче использовать.

В заключение отметим, что мы говорим о силе или слабости памяти именно на математические обобщения. Подчеркиваем, что речь идет не о том, что, например, у неспособных учащихся вообще плохая память, и не о том даже, что у них плохая память на обобщения. Как уже говорилось, многие из них успевают по другим предметам вполне удовлетворительно и даже отлично. По нашим наблюдениям и по отзывам учителей, такие учащиеся обнаруживают вполне хорошую память в нематематической области (литература, география, биология, история), причем хорошо помнят не только фактический, конкретный материал, но и мысли, схемы рассуждений, обобщения, выводы. Таким образом, память у ученика вообще может быть хорошей, и ее недостаточность может обнаруживаться только в операциях с математическим материалом, проявляться только в сфере математических отношений и символов.

Глава VI

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ

§ 1. Математическая направленность ума

Проведенные нами наблюдения показывают, что у весьма одаренных в математическом отношении школьников приобретает заметное развитие своеобразная организация психики, которую мы называем математической направленностью ума¹. Часто эта особенность начинает проявляться у них в элементарных формах уже в возрасте 7—8 лет и в дальнейшем приобретает весьма широкий характер.

Указанная особенность выражается в стремлении к математизации явлений окружающего мира, постоянной установке обращать внимание на математическую сторону явлений, всюду подмечать пространственные и количественные отношения, связи и функциональные зависимости — словом, видеть мир «математическими глазами».

Приведенные выше характеристики одаренных детей дают богатый материал в этом отношении. Для большинства из этих детей характерна (правда, в различной степени) склонность осмысливать окружающие явления в плане логических и математических категорий, тенденция воспринимать многие явления через призму логических и математических отношений, выделять математический аспект при восприятии многих явлений действительности. Разумеется, мы пока говорим лишь о тенденции, так как в возрасте 9—10 лет это явление не может быть очень ярко выраженным. Например, некоторые из этих детей сравнительно плохо запоминали стихи, причем явно пытались уловить логику расстановки слов в стихотворении, ритм же и «музыку» стиха улавливали слабо. Содержание стихотворений они помнили хорошо, но при воспроизведении стихотворений очень часто меняли порядок слов, логически перестраивали стихотворение. Аналогичные факты часто имели место и при обучении их музыке — они больше увлекались нотной грамотой, теорией музыки, у них замечалась тенденция математически осмыслить и заучить последовательность звуков, аккордов музыкального произведения, порядок работы пальцев во время исполнения. Если эти дети

¹ Особенность, о которой будет идти речь, в прежних наших публикациях [198], [205], [206], [207], [214], [218] называлась математическим складом ума. Теперь мы предпочитаем называть ее математической направленностью ума — термин этот, как нам кажется, более адекватно отражает существо дела. Термин же «математический склад ума» мы относим теперь к понятию о типах математической одаренности.

рисовали, то и здесь они стремились математически осмыслить размеры, отношения, пропорции.

Если математически одаренный школьник увлекается астрономией, то это увлечение часто носит характер составления астрономических таблиц, расчетов фаз луны, таблиц расстояний до планет и звезд и т. д. Если такой ученик увлекся географией, то опять-таки это в основном — вычисление и составление таблиц плотности населения, расчеты различных картографических проекций, составление разного рода графиков и диаграмм (высоты гор, длины рек и т. п.); если он увлекается химией, то химией формул и уравнений, составляет сложнейшие формулы реакций, чертит таблицу Менделеева. Как мы могли видеть, своеобразный характер принимает даже увлечение историей, языком. Увлечение историей, например, выражалось в попытках математически осмыслить закономерности восточной клинописи, ознакомиться с математическими методами расшифровки языка древнего индейского племени майя и т. д.

Постоянная тенденция математически осмысливать окружающий мир выражалась и в том, что, по нашим наблюдениям, одаренные в области математики дети часто во время прогулок, чтения, просмотра кинофильмов, на уроках и дома то и дело ставили перед собой задачи — «прикинуть» объем того или иного громадного здания, вычислить площадь стадиона («и сколько человек там можно было бы разместить»), определить скорость катера, идущего по Москве-реке, скорость троллейбуса, на котором ученик едет, и т. д. У них возникают такие, например, вопросы: «Какую площадь можно было бы обозреть с вершины Спасской башни Кремля (или с вершины строящейся Останкинской телевизионной башни)?», «Сколько секунд живет на свете человек?», «А сколько он выпивает за всю жизнь воды?» Некоторые при просмотре фильма «Богдан Хмельницкий» здесь же начинали вычислять, сколько человек в действительности могли бы насыпать курган пригоршнями, как это показано в фильме.

С. И. Шапиро, несколько лет изучавший группу способных к математике учащихся старших классов математической школы, наблюдал очень яркие проявления математической направленности ума у многих своих учащихся. Так, например, все, что окружает ученика Д., все, чем он занимается, он анализирует под углом зрения логических и математических отношений. Рабочие выкладывают паркетом пол, и Д. уже прикидывает, можно ли плитками данной формы выложить этот пол, какой формы полы можно выложить данными плитками, какими плитками можно вообще выложить данный пол и т. д. Наблюдая за игрой на бильярде, он размышляет над математической теорией движения шаров при ударе. Видя объявление о продаже билетов лотереи, сейчас же начинает вычислять вероятность выпадения выигрышей различного вида.

Ученица Б. испытывает постоянную потребность математически осмыслить даже нематематические, логические соотношения. Как-то на уроках рассматривали задачу, в которой шла речь о двух поездах, вышедших навстречу друг другу так, что скорость первого была вдвое больше скорости второго. Б. тут же бросила реплику: «Как по медиане!» — и пояснила: «Если вершина треугольника и его противоположная сторона выйдут навстречу друг другу по медиане с такими скоростями, то они встретятся в точке пересечения медиан».

У ученика М., как отмечает С. И. Шапиро, вся учебная деятельность «окрашена в математические тона». По его собственному признанию, он не любил химии, «пока дело не дошло до пропорций», физикой заинтересовался тогда, «когда начали решать задачи на уравнения теплового баланса и задачи по механике». Даже к биологии, которую он «терпеть не мог», он проявил особый интерес, когда прочитал о математическом подходе к теории наследственности. Узнав о возможности математического подхода к теории языка, М. увлекся грамматикой (до тех пор он никакого интереса к ней не проявлял). Однажды М. прочитал специальную статью, где говорилось о постоянной частоте букв в определенных текстах. Это его заинтересовало, и он решил проверить это положение: проделал огромную работу, подсчитав, сколько раз встречается каждая буква алфавита в тексте учебника по географии, и убедился в правильности этой закономерности (и это при том условии, что М. неусидчив и долго заниматься одним делом, исключая математику, не может).

Трудные задачи захватывают способных учащихся, повышают их активность, обостряют ум. Погружаясь в решение задачи, одаренные учащиеся «отрешаются» от всего окружающего, постоянно думают о ней, даже если занимаются посторонним делом. «Нерешенная задача преследует!» — выразился один из них.

Психолог Н. И. Судаков [397] в свое время наблюдал ученика Юрия Х. Погруженность в математику и отрешенность в это время от всего иного была для него столь привычным состоянием, что учителя во всем этом уже не видели ничего странного, замечаний обычно не делали. Его товарищи рассказывали, как однажды, находясь с Юрием в концертном зале консерватории и слушая фортепьянный концерт Чайковского, они заметили, что Юрий во время исполнения концерта достал свою записную книжку и стал поспешно что-то записывать в нее. Товарищи решили, что Юрий записал название исполняемой вещи или свое впечатление, возникшее в процессе слушания, но после концерта с удивлением узнали, что Юрий записал идею решения задачи, которую он решал в течение нескольких последних дней. И это не единичный случай. Рассказывали и о других случаях, когда Юрий на концертах, школьных вечерах отвле-

кался от всего окружающего и погружался в математические вычисления.

Биографические и автобиографические данные очень многих выдающихся математиков также указывают на эту черту — склонность математически осмысливать действительность. Для многих творческих ученых-математиков «характерно особое, своеобразное восприятие окружающего — свое «видение» мира... Они часто видят общезнакомые вещи «по-своему» (М. С. Бернштейн [40]).

Математическая направленность ума — сложное индивидуально-психологическое образование, не сводимое к особенностям каких-либо познавательных процессов — восприятия, мышления и, очевидно, близкое к понятию «установки» грузинских психологов. Оно формируется, по-видимому, как особое синтетическое выражение математической одаренности и включает в себя и познавательную, и эмоциональную, и волевою стороны (соответствующее отношение, склонность и интересы, потребность в математической деятельности).

Конечно, при современном уровне исследований по психологии и психофизиологии можно лишь предположительно дать физиологическую интерпретацию описанному специфическому свойству. Мы склонны предположить, что в описанных случаях имеет место своеобразный «настрой мозга» как тенденция выделять из окружающего мира раздражители типа отношений и символов. По-видимому, можно гипотетически предполагать наличие у некоторых людей «математически-ориентированного» мозга. Можно предположить также, что это свойство формируется прижизненно, но на основе определенных задатков — некоторых прирожденных анатомо-физиологических особенностей мозга.

§ 2. Проблема внезапного решения («озарения» инсайта) в свете анализа компонентов математических способностей

Хорошо известно, что решение самых разнообразных проблемных задач (в том числе и математических) далеко не всегда наступает в результате ясных и четких последовательных ходов мысли. В целом ряде случаев после неудачных бесплодных попыток решения наступает внезапное «озарение», догадка — казалось бы, случайное и ничем не обусловленное возникновение в сознании идеи решения, причем сам человек не в состоянии удовлетворительно объяснить этот факт внезапности решения, так как не осознает все обстоятельства возникновения новой и плодотворной идеи. В этом феномене внезапности решения (англ. insight — «инсайт», нем. Einsicht — «айнзихт») идеалистическая психология видит проявление особой способности

ума непосредственно, независимо от прошлого опыта «схватывать» существенные (количественные, пространственные) отношения в окружающем мире.

Это непосредственное постижение истины, непосредственное «усмотрение ума» противопоставляется многими зарубежными психологами, а также некоторыми математиками (А. Пуанкаре, Д. Мордухай-Болтовский) дискурсивному познанию, основанному на развернутом процессе рассуждения, последовательном переходе от одних логических операций к другим (Р. Вудвортс [483, стр. 774]), (А. Ньюэлл, Д. Шоу, Г. Саймон [493]). Советские исследователи (С. Л. Рубинштейн [354], [355], А. Н. Леонтьев [256], Г. С. Костюк [191], В. Н. Пушкин [341], [342], Я. А. Пономарев [335], В. Шевчук [448] и другие) в своих работах показывают, что феномен, переживаемый субъектом как внезапное озарение, несмотря на кажущееся отсутствие его связи с прежним опытом человека, есть результат предшествующей длительной работы мысли, результат ранее приобретенного опыта, навыков, знаний, переработки и использования информации, накопленной человеком раньше.

В нашей практике экспериментального исследования и наблюдения за учебной работой школьников V—VIII классов мы часто встречались со случаями «озарения», догадки (казалось бы, необъяснимого внезапного нахождения оригинальной и верной идеи решения). С. И. Шапиро, изучавший способных к математике учеников IX—X классов, значительно чаще встречался с такого рода явлениями.

Ни в коей мере не претендуя на анализ природы инсайта, мы попытались выявить, что лежит в основе соответствующих проявлений у способных школьников.

Основное предположение заключалось в том, что в основе указанных проявлений не лежит ничего сверх выявленных нами компонентов математической одаренности, что любой подобный факт можно объяснить с позиций нашего представления о структуре математических способностей. И действительно, в значительном большинстве случаев нам удавалось, в конце концов, находить то звено, отсутствие которого и вызывало впечатление внезапного и не обусловленного ничем «озарения».

1. В основе явлений внезапной догадки, «озарения» часто лежало обобщение — неосознанное применение общих способов действий (или отдельного приема), общих принципов подхода к решению, основанное на общности (порой самой отдаленной) различных математических объектов, схем, задач. При этом, подчеркиваем еще раз, испытуемый не осознавал этого ни в момент «озарения», ни потом. Данная проблемная ситуация не встречалась в опыте испытуемого, но встречались сходные, похожие (пусть отдаленно-сходные) моменты.

Как отмечал П. А. Шеварев, при решении сложных задач испытуемый обычно ищет, под какой из уже известных ему типов можно было бы подвести данную задачу, но не осознает, что осуществляет этот прием, не сознает этого общего принципа, в соответствии с которым он фактически действует. Именно поэтому, подчеркивает П. А. Шеварев, испытуемым и кажется, что решение пришло внезапно, как некоторое озарение, как бы без достаточных к тому причин [446, стр. 102].

Наши испытуемые так же неосознанно стремились не только подвести задачу под какой-то уже знакомый им тип, но и, анализируя условия данной задачи, осуществляя поисковые пробы, пытались «ухватиться» за такие элементы задачи, которые позволили бы им применить какой-либо имеющийся в опыте общий или частный метод, способ, прием решения. Испытуемый обычно не осознавал (или смутно осознавал; очень способный ученик Д. однажды сказал, что при решении новых задач часто у него возникает такое чувство, словно он здесь «уже побывал») объективные источники его «озарения».

2. Многие случаи внезапного и неожиданного на первый взгляд «озарения», догадки (инсайта) объясняются тенденцией мыслить свернутыми структурами, наличием максимально свернутых ассоциаций, которые свойственны очень способным к математике школьникам. Когда рассуждение развернуто, то легко проследить пути перехода от одной мысли к другой — понятно и видно, в силу каких последовательных «ходов» мысль пришла к правильному решению. Когда же рассуждение свернуто, «выключена» вся цепь промежуточных звеньев рассуждения, то зачастую эти пути проследить трудно и, кажется, будто переход от одной мысли к другой ничем логически не мотивирован, не обусловлен, произошел неожиданно и необъяснимо.

Эта мысль не отличается новизной. В литературе есть много указаний на то, что если в совершенно ясном для всех процессе рассуждения сократить все средние звенья и оставить только первое и последнее звено, то это зачастую произведет ошеломляющее впечатление. «...Умозаключения, нередко рассматриваемые как случаи «интуиции», распадаются на целую цепь умозаключений, причем во многих случаях человек, выполнявший умозаключение, не только фактически не осознает всех его звеньев, но и не может их осознать» (П. А. Шеварев [446, стр. 96]). П. А. Шеварев здесь говорит о том, что человек не может осознать всех звеньев логически полного развернутого рассуждения. Мы же говорим о том, что способный школьник в целом ряде случаев может не осознавать (ни во время решения, ни потом) всех промежуточных звеньев реально-го процесса рассуждения. «Самоочевидность», непосредственное усмотрение результата часто и является следствием такого

смутно осознаваемого (или не осознаваемого вовсе) процесса рассуждения, причем порой школьник не в состоянии осознать всю систему промежуточных умозаключений, которая привела его к результату, даже если пожелает этого. «Человек достигает ответа... мало осознавая при этом... тот процесс, посредством которого он получил искомый ответ», — пишет Д. Брунер, пытаясь объяснить явления инсайта [480, стр. 55]. А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев, анализируя научные, в частности математические способности, пишут, что у ученых «догадка и открытие вспыхивают в сознании как готовое положение, а ход их формирования часто остается неясным» [174, стр. 132]. Сокращение мыслительного процесса за счет опускания ряда звеньев, указывают А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев, связано с выпадением этих звеньев из сферы сознания, поэтому «можно встретить случаи решения задач, при которых сам ход решения в его развернутой последовательности воспроизводится с трудом или не полно» [174, стр. 148].

Выделенные нами два обстоятельства, лежащие в основе «озарения» (способность к обобщению и способность мыслить свернутыми структурами), тесно связаны одно с другим и в дальнейшем будут рассматриваться во взаимосвязи и взаимозависимости.

Перейдем к иллюстрациям. Способная ученица VII класса Г. Р. решала задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах на механико-математическом факультете МГУ [180, стр. 23]: «В бассейн проведены 4 трубы. Когда открыты 1, 2, 3-я трубы, бассейн заполняется за 12 мин.; когда открыты 2, 3 и 4-я трубы — за 15 мин.; когда открыты только 1-я и 4-я трубы — за 20 мин. За какое время наполнится бассейн, если открыть все 4 трубы?» Г. Р. сначала попыталась решить эту задачу системой уравнений и запуталась в громоздкой системе их; попыталась иначе составить систему — ничего не получилось. И вдруг ее «осенило»: она быстро стала говорить и писать: «О, да это можно просто решить: за минуту заполняют $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ бассейна удвоенное количество труб — две первых, две вторых и т. д. А один набор труб — $\frac{1}{10}$ в минуту или весь бассейн за 10 мин.». После решения экспериментатор спросил Г. Р.: как ей пришла на ум идея решения, решала ли она когда-нибудь подобную задачу? Г. Р. отвечала отрицательно: задач подобных не решала, как ей пришла в голову идея — не знает. Вместе с ученицей мы долго искали, откуда она могла бы позаимствовать идею решения. Даже просмотрели все ее тетради за V, VI, VII классы. И в одной из тетрадей нашли, что два года назад она решила несколько задач на определение двух чисел по их сумме и разности таким образом:

22*

XI—A—3. Можно предположить, что и здесь в основе инсайта лежало обобщение и перенос общего приема. Приведем два примера из исследования С. И. Шапиро.

Испытуемая Б. решает задачу: «Доказать, что отношение многозначного числа к произведению его цифр не меньше $\frac{11}{9}$ ».

Мы не приводим здесь решения, укажем только, что решающим ходом, поворотным пунктом решения оказался прием почленного деления числителя на знаменатель. Как испытуемая нашла этот решающий ход, она пояснить не могла. Анализируя ранее решенные ею задачи, экспериментатор нашел, что весьма давно Б. решала такую задачу: «Доказать, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \left(\frac{a}{b} > 0\right)$ ».

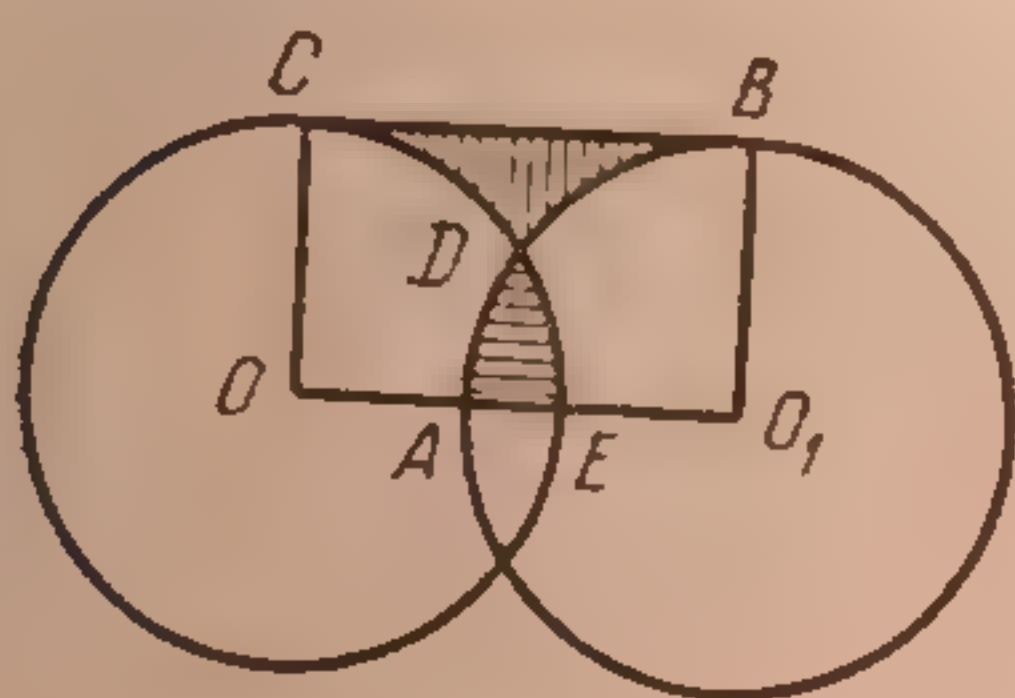


Рис. 67.

При решении этой задачи ею был применен тот же прием почленного деления числителя на знаменатель, причем в этой задаче этот прием был довольно «прозрачным» [435].

Учащийся Д. решает задачу: «Найти OO_1 , если $r=1$ и заштрихованные фигуры равновелики» (см. рис. 67).

Посмотрев на чертеж, он сразу сказал: «Прямоугольник равновелик полукругу. $OO_1 = \frac{\pi}{2}$ ».

Испытуемый, казалось, непосредственно «увидел» результат. На самом же деле это был максимально свернутый процесс рассуждения, который Д. «развернул» так: «В четверти круга O_1AB заменяем заштрихованную часть равновеликой частью CDB ». Больше из него «выжать» ничего не удалось — Д. мыслит свернутыми структурами и дальнейшие пояснения ему кажутся излишними. А между тем развернутое реальное рассуждение таково: «В одной из четвертей круга (например, O_1AB) заменяем заштрихованную часть ADE равновеликой (по условию) частью CDB . Получилось, что прямоугольник заполнен четвертью круга OCE и равновеликой четверти круга фигурой O_1BCE . Значит, прямоугольник по площади равен полукругу. Площадь же полукруга $-\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$, такова же и площадь прямоугольника.

Но если в прямоугольнике с площадью $\frac{\pi}{2}$ одна сторона (r) = 1, то другая сторона (OO_1) должна быть также $\frac{\pi}{2}$ ».

В наши задачи, как уже говорилось, не входило раскрытие природы инсайта. Мы хотели лишь показать, что многие случаи внезапного и, казалось бы, необъяснимого «озарения» при решении задач способными школьниками могут быть объяснены

неосознанным влиянием прошлого опыта и в основе их лежат способность к обобщению в сфере математических объектов, отношений и действий и способность мыслить свернутыми структурами.

§ 3. Малая утомляемость способных школьников в процессе длительной и напряженной математической деятельности

Изучая математическую деятельность способных к математике учеников, мы обратили внимание на их характерную особенность — малую утомляемость в процессе занятий математикой по сравнению с утомляемостью при занятиях другими, даже весьма интересующими их видами деятельности.

Даже продолжительные (для их возраста) занятия не приводили к резкому утомлению. В экспериментальных целях мы несколько раз устраивали с ними весьма длительные (до 3 час.) занятия без перерывов. И лишь в самом конце этого периода наблюдались некоторые признаки утомления (ошибки, ослабление памяти).

Можно было бы предположить, что утомляются они мало потому, что математика им легко дается, что это легкая для них деятельность. Но это не так. Неоднократно мы устраивали занятия на пределе возможностей учащихся. Они напряженно трудились, но уставали все-таки гораздо меньше, чем при аналогичном напряжении во время занятий другими предметами.

Очень ярко отмеченная особенность выступает в деятельности весьма одаренных учащихся. Как видно из приведенных выше характеристик, занимаясь бесконечными вычислениями, расчетами, они утомляются значительно меньше, чем можно было бы ожидать.

Наряду с этим обратим внимание на заметную повышенную утомляемость неспособных к математике учащихся в процессе их занятий этим предметом по сравнению с их утомляемостью при занятии другими (тоже, может быть, неинтересными или трудными для них) учебными предметами. Об этом говорят ученики, говорят учителя, об этом свидетельствуют и наши собственные наблюдения. Неспособные ученики не утомляются на уроках математики, когда они не трудятся, не работают, выключаются из занятий (как это часто бывает). Если же они работают, то утомляются много больше других учеников, так как установление связей в мире математических объектов для них — всегда напряженный труд.

На пониженную утомляемость способных учащихся в процессе переработки математической информации неоднократно обращал внимание и С. И. Шапиро. Его способные ученики так же могли по 3—4 часа решать сложные математические задачи,

требующие от них большого умственного напряжения, и не уставали при этом (некоторые даже к концу этого периода лучше решали задачи, чем вначале!). «Лучший отдых — серьезная математическая работа», — заявил один из его учеников. Пониженная утомляемость сказывалась и в том, что способные учащиеся после «строенных» уроков математики могли успешно заниматься другими предметами, в то время как средние учащиеся после уроков математики (на других уроках) отвечают хуже и слабее, чем обычно, усваивают новый материал [433].

Аналогичные наблюдения делали А. В. Пономарева [336], отмечавшая, что способные учащиеся могут «в неограниченном количестве, совсем не уставая, решать физические и математические задачи», Р. О. Серебрякова [370] и многие другие. Отмеченный факт был детально описан Н. С. Лейтесом [252], [254], однако потребность в напряженной умственной деятельности и пониженная утомляемость у наблюдаемых им вообще одаренных учеников проявлялась в более широкой сфере.

С. И. Шапиро сделал интересную попытку экспериментально (не основываясь на субъективных показаниях испытуемых) проверить факт пониженной утомляемости способных школьников при длительных и напряженных занятиях математикой, количественно оценить накопление усталости в этих условиях у учащихся с различным уровнем способностей к математике [433], [435]. За индикатор степени утомления он принял скорость вычислительного навыка при работе с логарифмической линейкой. Все его ученики (IX—X кл.) к тому времени хорошо освоили технику вычислений по логарифмической линейке.

С. И. Шапиро заранее вычислил индивидуальную скорость безошибочной работы с линейкой для каждого испытуемого (оказалось, что для каждого испытуемого существует свой индивидуальный максимум скорости вычислений по линейке в рамках данной вычислительной методики). Полученные результаты были стабильными для каждого учащегося, что и давало основания считать факт резкого отклонения от устойчивой индивидуальной скорости действием контрольных факторов (утомления). Каждый из испытуемых в течение 2—3 час. занимался математикой (причем, чтобы устранить влияние относительной трудности задач, каждый учащийся выполнял свое индивидуальное задание на пределе своих возможностей, — одинаковые для всех задачи были бы для одних учеников трудны, а для других — легки). Замеряя и сравнивая скорости вычислений испытуемых до и после напряженных занятий математикой, С. И. Шапиро сделал следующие выводы: 1) после напряженных занятий математикой способные учащиеся дают незначительное уменьшение скорости вычислений (при не очень длительных занятиях — в пределах 1 часа — скорость часто даже повышалась). В отношении других видов деятельности этого не наблюдалось:

скорость вычислений после напряженных занятий историей или литературой у этих же учеников снижалась заметно; 2) после таких же занятий у средних учащихся скорость вычисления падает вдвое, наблюдаются грубые ошибки в вычислениях.

Полученные данные подтвердились и показаниями учителей. Способные учащиеся на следующих после этого эксперимента уроках не проявляли признаков утомления, а средние приступили к следующим урокам заметно уставшими.

Отмеченный факт пониженной утомляемости способных учеников в процессе занятий математикой (по сравнению с другими, интересующими их видами деятельности) позволяет поставить вопрос в такой плоскости: нельзя ли говорить о своего рода «парциальности» свойств нервных процессов человека (в частности, их силы) применительно к характеру той или иной его деятельности? (Как известно, Б. М. Теплов говорил о парциальности свойств применительно лишь к разным участкам нервной системы.)

Б. М. Теплов в числе важных характеристик силы нервной системы указывает на ее выносливость и работоспособность, высокую сопротивляемость усталости при длительном действии раздражителей [408, стр. 515]. «О силе или слабости нервной системы говорит... то, сколь быстро проявляется утомление» [414, стр. 495]. Н. С. Лейтес также указывает на такие признаки силы процесса возбуждения, как способность к длительному поддержанию напряжения, когда ученик может долго сосредоточенно заниматься, не обнаруживая усталости [252]. По-видимому, есть случаи, когда указанные признаки силы нервных процессов характеризуют лишь один вид деятельности человека (в данном случае — математическую деятельность) и не характеризуют других видов его деятельности. Это и есть парциальное, специфическое проявление силы нервных процессов (подобно тому, как В. С. Мерлин отметил парциальные проявления подвижности нервных процессов в зависимости от наличия или отсутствия положительных мотивов деятельности [293, стр. 89]).

Глава VII

ТИПОВЫЕ, ВОЗРАСТНЫЕ И ПОЛОВЫЕ РАЗЛИЧИЯ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ КОМПОНЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

§ 1. Типы структур (математических складов ума)

Хорошо известно, что в любой области науки (равно как и искусства) одаренность как качественное сочетание способностей всегда многообразна и в каждом отдельном случае своеобразна. Но при качественном многообразии одаренности

всегда можно наметить какие-то основные типологические различия в структуре одаренности, выделить определенные типы, значительно отличающиеся один от другого, разными путями приходящие к одинаково высоким достижениям в соответствующей области.

Разумеется, все это с полным основанием можно отнести и к математике. Сочетание компонентов в индивидуальных структурах математических способностей может быть различным, что и образует различные типы структур, различные типы математических складов ума. Имеет место известное многообразие структур, т. е. высокие достижения в математической деятельности могут быть осуществлены различными комплексами способностей, причем одни из них могут компенсироваться другими. Как указывает академик А. Н. Колмогоров, «различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях» [180, стр. 11]. Существование различных типов математических складов ума есть следствие не только индивидуальных и типовых психологических различий между людьми, но и следствие различных требований, которые предъявляют человеку разные разделы математики. «В одной области наиболее плодотворными оказываются способности находить лучшие алгоритмы для вычислений, в другой — важны комбинаторные способности... В одних областях часто пользуются геометрическими интерпретациями, в других — мало» (С. И. Шварцбурд [439, стр. 32]).

Известно, что среди крупных математиков прошлого и настоящего времени имелись очень яркие представители различных типов. Например, известный математик Б. К. Млодзеевский, будучи по характеру своего дарования геометром, с трудом и без всякого желания, по его собственным словам, изучал теорию чисел, и, кажется, это была единственная область математики, к которой он всю жизнь был равнодушен [349, стр. 7]. А французский математик, член Парижской академии, профессор парижского университета Ш. Эрмит писал о себе: «Я не смогу вам описать, на какие усилия я был осужден, чтобы понять кое-что в этюдах по начертательной геометрии, которую я ненавижу... Как счастлив тот, кто может думать лишь в области анализа!» (письмо к Штильтьесу 8 мая 1890 г. [419, стр. 94]). Другой французский математик, А. Пуанкаре, при блестящих способностях к математике еще в юношеские годы обнаружил полнейшую неспособность к черчению. Подобных примеров можно привести много.

Имея в виду школьников, едва ли можно говорить о многообразии математических способностей, но и здесь опытные учителя указывают на наличие различных типов. Например, из опрошенных нами письменно 56 учителей 52 человека указали на наличие среди школьников способных только к алгебре или

только к геометрии (алгебраический и геометрический типы), причем указывалось, что большинство учащихся трудно отнести к какому-нибудь типу.

Хотя, как мы уже отмечали, способности к предмету не всегда выражаются в высокой успеваемости в области этого предмета, но достаточно высокая корреляция здесь явно имеет место. Поэтому мы решили сравнить оценки по алгебре и геометрии у большого количества учащихся. В течение 1964—1965 гг. мы произвели такое сравнение в отношении 1512 учащихся VI—X классов г. Москвы, поставив задачей выделить случаи резкого расхождения в оценках по алгебре и геометрии. Таким резким расхождением мы считали разницу в 2 балла (обычно это — оценки «5» и «3» или «4» и «2»). Разница в один балл (а таких случаев было много — около 30%) не принималась во внимание — во-первых, она была недостаточно велика, чтобы говорить о типах, а, во-вторых, во многих случаях объяснялась случайными обстоятельствами. Полученные данные проверялись в беседах с учителями (нас интересовало устойчивое, а не случайное отношение между оценками при одинаково усердных занятиях обоими предметами). Как видно, критерий отбора был очень строгим. Поэтому и случаев столь резкого расхождения оказалось мало — всего 23 из 1500 (1,52%) или в среднем один случай на два класса. Из них 10 человек должны быть отнесены, условно говоря, к «алгебраическому» типу и 13 человек к «геометрическому» типу. Но это уже были резко выраженные яркие представители двух типов (что подтвердили и учителя).

Считая, что наличие «школьных» математических типов связано с относительной ролью словесно-логических и наглядно-образных компонентов в мыслительной деятельности школьника, мы соответствующим образом и построили экспериментальное исследование. Были исследованы индивидуальные различия 34 способных учеников по двум показателям: 1) насколько испытуемый при решении задач опирается на наглядные образы, стремится наглядно представить себе математические отношения и зависимости, существует ли у него потребность в наглядной интерпретации даже самых абстрактных математических систем и 2) насколько хорошо развиты у него пространственные представления геометрического характера, способность мысленно представить себе наглядно (мысленно «видеть») положение геометрического тела в пространстве и взаимное расположение его частей, взаиморасположение тел, фигур, плоскостей, линий (геометрическое воображение).

Исследование проводилось с помощью задач XXIII, XXIV и XXV серий.

Прежде всего, результаты исследования по этим сериям позволили установить два положения: 1) указанные два компо-

нента (способность наглядно представить абстрактные математические соотношения и зависимости и способность к пространственным представлениям геометрического характера) не являются обязательными компонентами в структуре математических способностей. Их наличие или отсутствие (точнее, сила или слабость) не определяют степени математической одаренности, но определяют ее тип. Ученик может быть способным к математике при различном соотношении наглядно-образных и словесно-логических компонентов, но данное соотношение определяет его принадлежность к тому или иному типу. 2) Способность наглядно представить абстрактные математические соотношения и зависимости и способность к пространственным геометрическим представлениям в наших опытах очень высоко коррелировали друг с другом. Во всех случаях мы наблюдали соответствие одного другому¹.

В результате исследования все испытуемые по указанным параметрам разделились на 3 группы, в последней из которых можно было выделить две подгруппы. Эксперименты показали, что в зависимости от соотношения словесно-логических и наглядно-образных компонентов формируются различные структуры математических способностей, различные математические склады ума, обеспечивающие различными путями успешное выполнение математической деятельности.

Это позволило выделить аналитический тип (аналитический или абстрактно-математический склад ума), геометрический тип (геометрический или образно-математический склад ума) и две модификации гармонического типа (абстрактная и образная модификации гармонического склада ума). Первые два типа должны быть признаны несколько ограниченными, и выражается это в том, что они особенно благоприятны для работы лишь в определенных областях математики. Добиваясь высоких успехов в овладении школьной математикой, представители этих типов тем не менее испытывают некоторые специфические трудности, о которых речь будет идти ниже.

Разумеется, как и всегда в любой психологической типологии, границы между этими типами (исключая крайние типы) не являются совершенно четкими, существуют и переходные («смешанные») варианты.

Об аналитическом и геометрическом типах упоминается в работах А. Пуанкаре [670], Ж. Адамара [595], Г. Ревеша [677], Д. Мордухай-Болтовского [300], но с этими терминами у них связывается скорее логический и интуитивный пути творчества

¹ Разумеется, отсюда еще не следует доказанность положения о том, что оба показателя есть разные проявления одного и того же свойства (например, хорошего развития первой сигнальной системы). Выяснение этого не входило в наши задачи. Вопрос же требует обстоятельного исследования.

в математике. Ц. Дайенс [558] говорит об аналитическом и конструктивном, И. Верделин [727, стр. 69] — об образном и абстрактном аспектах математического мышления. Д. Ригли [747] в зависимости от роли вычислительного (N) или пространственного (S) факторов выделяет соответствующие школьные математические типы. К. Струнц [702] дает своеобразную классификацию стилей одаренности, выделяя, например, эмпирический и понятийный типы. Первый тип в применении к математике означает прикладной тип с ориентировкой на непосредственно наблюдаемые пространственно-временные отношения, а не понятийные конструкции. Вторым тип — это тип теоретика, склонного к дедуктивному методу. В. Хаекер и Т. Циген [596] упоминают о трех типах — с доминированием визуальных компонентов, доминированием абстрактных компонентов и с их равновесием.

Из советских исследователей вопросами индивидуальных различий учащихся при решении задач с точки зрения соотношения абстрактных и образных компонентов мышления много занималась Н. А. Менчинская. Она выделяла учащихся с относительным преобладанием: 1) образного мышления над абстрактным; 2) абстрактного над образным и 3) гармоническим развитием обоих видов мышления [44, стр. 227—233]. Подобную классификацию в самое последнее время употребляла и Г. П. Антонова [30-а].

Многие авторы указывали на то, что существенные различия между алгеброй и геометрией обуславливают слабую корреляцию между успешностью усвоения в той и другой областях. На различие в трудностях усвоения алгебры и геометрии указывал А. А. Бодалев [46, стр. 99—100], [48, стр. 107]. П. Симондс [704] отмечал, что способность или неспособность к алгебре не обязательно переносится на геометрию и наоборот. В. Бетц [478] вычислил коэффициент корреляции между успешностью в алгебре и геометрии. Он оказался очень малым (0,18), в то время как коэффициент корреляции между успешностью в алгебре и арифметике — 0,76. По И. Верделину, коэффициент корреляции между факторами вычислительным (N) и пространственным (S) равен нулю [727, стр. 157].

Но хотя, по нашим наблюдениям, и имеет место корреляция между аналитическим типом и успешностью в усвоении алгебры и соответственно между геометрическим типом и успешностью в усвоении геометрии, данная выше классификация не должна рассматриваться как классификация мышления по предметным отношениям (имея в виду школьные предметы — алгебру и геометрию). Нельзя думать, что аналитический тип проявляется только в алгебре, а геометрический — в геометрии. Аналитический склад ума может проявляться и в геометрии, а геометрический — в алгебре. Еще Ж. Адамар отмечал, что одни остаются

аналитиками, даже когда работают в области геометрии, тогда как другие являются геометрами, даже когда имеют дело с чистым анализом [595].

В нашем исследовании из основной группы способных учащихся (34 чел.) к аналитическому типу было отнесено 6 человек, к геометрическому — 5 человек, к первой модификации гармонического типа — 13 человек, ко второй — 10 человек. Деление по типам было проведено и в группе очень способных, однако здесь ввиду малого возраста испытуемых типологические различия наметились не столь ясно, и мы отнеслись к вопросу о классификации испытуемых с большой осторожностью. Поэтому лишь 7 из 16 учащихся группы ОСП были отнесены к тому или иному типу (4 — к первому типу и по одному человеку к остальным трем типам).

Прежде чем характеризовать каждый тип отдельно, дадим очень схематичную сравнительную оценку всех типов. Заметим при этом, что, строго говоря, у всех способных к математике школьников хорошо развит словесно-логический компонент и речь может идти только о большем или меньшем развитии наглядно-образного компонента. Соответственно можно говорить о преобладании наглядно-образного компонента над словесно-логическим лишь в относительном смысле (так же как первая сигнальная система ни при каких условиях не может преобладать у нормального и здорового человека над второй сигнальной системой даже у так называемого «художественного» типа, так как высший уровень нервной деятельности не может быть подчинен низшему — см. М. М. Кольцова [183]).

Ниже приводится таблица 21 для самой общей ориентировки в типах.

Перейдем к более развернутой характеристике каждого типа.

Аналитический тип

К этому типу мы отнесли 6 человек из основной группы испытуемых. Сюда же относятся очень способные Ира С., Володя Х., Гиля Х., Дима Л. Яркими представителями этого типа являются, например, испытуемые С. И. Шапиро — М., П.

Мышление представителей этого типа характеризуется явным преобладанием очень хорошо развитого словесно-логического компонента над слабым наглядно-образным. Они легко оперируют отвлеченными схемами, у них нет потребности в наглядных опорах, в использовании предметной или схематической наглядности при решении задач, даже таких, когда данные в задаче математические отношения и зависимости «наталкивают» на наглядные представления.

Представители этого типа не отличаются способностью наглядно-образного представительства и в силу этого используют

Таблица 21

Схематическая характеристика математических типов (складов ума)

Характеристика типов	Типы			
	I	II	III-a	III-б
	аналитический	геометрический	гармонический	гармонический
Количество учащихся	10	6	14	11
Развитие словесно-логического компонента	Очень сильный	Выше среднего	Сильный	Сильный
Развитие наглядно-образного компонента	Слабый	Очень сильный	Сильный	Сильный
Соотношение компонентов (условно)	Преобладание словесно-логического	Преобладание наглядно-образного	Равновесие	Равновесие
Использование в решении наглядных опор	Не может и не испытывает нужды	Может и испытывает нужду	Может, но это не помогает	Может и это помогает
Как решаются задачи «М ₁ » и «М ₂ » (см. серию XXIII)	М ¹	Н	М	М
Как решаются задачи «Н»	М	Н	Н	Н
Как решаются задачи «С ₁ » и «С ₂ »	М	Н	М	Н
Пространственные представления	Слабые	Очень хорошие	Хорошие	Хорошие

¹ Пояснение буквенных обозначений см. в главе IV, раздел II.

более трудный и сложный логико-аналитический путь решения там, где опора на образ даст гораздо более простое решение. Они очень успешно решают задачи, выраженные в абстрактной форме, задачи же, выраженные в конкретно-наглядной форме, стараются по возможности переводить в абстрактный план. Операции, связанные с анализом понятий, осуществляются ими легче, чем операции, связанные с анализом геометрической схемы или чертежа.

Очень показательными являются индивидуальные «сетки», построенные по результатам решения способными учащимися этого типа задач XXIII серии. За подробными пояснениями отсылаем читателя к главе IV раздела II. Здесь же дадим только краткие пояснения. Задачи этой серии разбиты на группы (тесты) в зависимости от степени наглядности, от той роли, которую играют наглядно-образные и словесно-логические компоненты мышления в их решении. Задачи группы II («наглядные») сравнительно просто решаются с применением наглядно-образных средств и значительно сложнее без этого. Задачи групп M_1 и M_2 («мыслительные») решаются чисто мыслительным путем, их сравнительно трудно перевести на язык наглядных образов. Задачи групп C_1 и C_2 («средние») занимают промежуточное положение. В каждой группе — 6 задач, расположенных в порядке усложнения от № 1 до № 6. Результаты решения задач каждым испытуемым представлялись в виде «сетки», заполненной знаками «+» (решил); «—» (не решил); «Н» (решал с применением наглядных средств); «М» (решал без использования таких средств); «НМ» (решал и тем и другим путем). Приведем сетку ученика С. К. (см. табл. 22).

Как видно, путем рассуждений, без опоры на предметные или схематические наглядные средства решались не только задачи C_1 и C_2 , но и задачи Н. Только в 3 случаях из 30 использовались наглядные средства, да и то учащийся в двух случаях давал не одно, а оба решения. Аналитический путь решения использовался и там, где он был менее рационален по сравнению с решением наглядно-образными средствами.

Пространственные представления у представителей аналитического типа развиты слабо (особенно представления в трех измерениях). Это хорошо видно на задачах XXV серии: сравнительно легко решалась всеми в уме задача XXV—А—7, которую можно осознать аналитически. Но родственную задачу XXV—А—6 в уме не решили 4 человека из 9 — задача была построена на чисто пространственных представлениях. Из решивших ее 5 человек 4 человека все-таки нашли способ решить и ее аналитически. Совершенно такая же картина наблюдалась и при решении в уме задач теста XXV—Б (геометрия в пространстве). И здесь все решили, например, задачу XXV—Б—3 или XXV—Б—15, но никто не решил задачу XXV—Б—16: в первых

Титул
1
2
3
4
5
6
задачах мож
ния, а в после
Задачи на
шения по зад
решали слож
можно было
ученика С.: «
тета? Сейчас
она на катет
ном расстоя
расстоянии
а все вмес
А гипотенуз
правда?» (И
вали эти за
шения: «Во
чится конус
Что кас
туемые, от
словесные
дело со «сл
Привед
представи

Типичная индивидуальная сетка представителей
аналитического типа (уч. С. К.)

Задачи	Тесты				
	Н	С ₁	С ₂	М ₁	М ₂
1	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$
2	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$
3	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{H}\bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$
4	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{H}\bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$
5	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$
6	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{H} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ \bar{M} \end{smallmatrix}$

задачах можно было аналитически «схватить» данные отношения, а в последней — совершенно невозможно.

Задачи на определение в уме без чертежа формы тела вращения по заданной фигуре вращения и оси вращения учащиеся решали сложным путем, рассуждая (хотя форму тела вращения можно было легко увидеть мысленно). Вот ход рассуждения ученика С.: «Прямоугольный треугольник вращается вокруг катета? Сейчас соображу... Верхняя точка вращаться не будет — она на катете. Точки на другом катете будут вращаться на разном расстоянии от оси, но каждая будет двигаться на равном расстоянии. А раз на равном — каждая опишет окружность, а все вместе — круг. Значит, внизу — круг, вверху — точка. А гипотенуза при вращении соединит их. Получится конус, правда?» (Представители геометрического типа квалифицировали эти задачи как «детские» — они просто «видели» тело вращения: «Вот я представляю, как он вращается и видно, что получится конус»).

Что касается задач XXIV серии, то все без исключения испытуемые, отнесенные к аналитическому типу, ориентировались на словесные формулировки, а не на чертеж и предпочитали иметь дело со «словесным» вариантом задачи.

Приведем некоторые характерные примеры решений задач представителями аналитического склада ума.

Ни один из них, решая задачу «сколько весит кирпич, если он весит 1 кг плюс полкирпича?», даже не попытался наглядно изобразить данные отношения, а решал ее рассуждением. В то же время все представители геометрического типа рисовали схему (см. рис. 68) или представляли ее в уме и «видели», что



Рис. 68.

решая задачу «сколько весит кирпич, если полкирпича?», даже не попытался наглядно отношения, а решал ее рассуждением. В то представители геометрического типа рисовали или представляли ее в уме и «видели», что кирпич весит 2 кг. Характерным было решение задачи ХХIII—Н—6. Учащиеся, как правило, начинали решать эту задачу аналитически и обычно запутывались в сложных уравнениях и рассуждениях. Однако лишь после упорных попыток решить задачу аналитически они по предложению эксперимен-

татора переходили на наглядный способ решения, изображая схематически циферблат и рассуждая с опорой на наглядные средства («раз кончил между 17 и 18 часами, значит, раньше большая стрелка стояла между 5 и 6. Значит, было около 12 час. 28 мин.» и т. д.). Это же относится и к решению задачи XXV—Б—10 (определить формы различного сечения кольца). В то время как «геометры» мысленно проводили сечение и видели его форму, «аналитики» погружались в сложные расчеты и лишь после неудачи обращались к чертежу, но и тут не видели формы сечения, а рассуждали с опорой на чертеж.

Любопытный случай произошел с Димой Л. Он правильно в уме аналитически решил простую задачу: «В треугольнике ABC угол B равен 46° , а угол C равен 66° . Прямая MN , проведенная через вершину угла A и проходящая вне треугольника, образует со стороной AB угол в 24° . Определить угол, который образует прямая MN со стороной AC ». После этого экспериментатор попросил изобразить все это на чертеже. И оказалось, что Дима, уже решив задачу, совершенно не представляет наглядно ее условий и решения и не может сразу выполнить задания.

Много интересного материала относительно особенностей мышления представителей «полярных» типов — аналитического и геометрического — собрал С. И. Шапиро. Например, на вопрос: «Могут ли \sin и \cos одного аргумента быть равны нулю?» — сразу и почти одновременно прозвучали два своеобразных ответа: «Нет, так как их сумма квадратов не была бы равна 1» («аналитик» Д.), «Нет, \sin равен нулю на концах горизонтального диаметра, а \cos — вертикального» («геометр» Ш.). Некоторые из его способных учеников хорошо знали особенности графического изображения четных, монотонных, взаимно обратных функций и тем не менее не могли провести исследование функций по этим особенностям. Другие, наоборот, запоминают аналитические определения этих классов функций, но беспомощны при использовании их графических особенностей. Неплохо зная, например, свойства логарифмической функции и умея их приме-

...сидит за
...в Гр
Мадонна
...матери
...рически
...типа н
...зается не
...ия.

К этому
испытываемых.
которые уча
Мышлении
хорошо раз
с этим усло
развитым
испытывают
абстрактно
стрируют бо
смысле, усл
ность. Но ес
зовать пред
задач, то ов
упорно пыт
и представ
легко реша
вание нагл
нено

Например
сторону кв
тому площ
Определит
рата». Зада
ков безусл
уравнением
представит
способом.
том по не
«Это (х) с
площадь е
приходится
значит, др
Эти уч
операции,
полняются
с анализом
23 Заказ 639

нять, они затрудняются при геометрической интерпретации этих свойств в графике.

Академик А. Н. Колмогоров писал: «Везде, где возможно, математики стремятся сделать изучаемые ими проблемы геометрически наглядными» [180, стр. 10]. Школьники аналитического типа не стремятся делать это, и в этом, по-видимому, сказывается некоторая односторонность их математического развития.

Геометрический тип

К этому типу было отнесено 5 человек из основной группы испытуемых. Сюда же относятся Боря Г. (из группы ОСП), некоторые учащиеся класса С. И. Шапиро (Б., Ш. и другие).

Мышление представителей этого типа характеризуется очень хорошо развитым наглядно-образным компонентом. В связи с этим условно можно говорить о преобладании его над хорошо развитым словесно-логическим компонентом. Эти учащиеся испытывают потребность в наглядной интерпретации выражения абстрактно математических отношений и зависимостей и демонстрируют большую изобретательность в этом отношении: в этом смысле, условно говоря, образность часто заменяет им логичность. Но если им не удастся создать наглядные опоры, использовать предметную или схематическую наглядность при решении задач, то они с трудом оперируют отвлеченными схемами. Они упорно пытаются оперировать наглядными схемами, образами и представлениями даже там, где задача легко решается рассуждением, а использование наглядных опор излишне или затруднено.

Например, решается задача: «Каждую сторону квадрата увеличили на 3 см и потому площадь его увеличилась на 39 см^2 . Определить сторону получившегося квадрата». Задача для способных шестиклассников безусловно легкая, и они решают ее уравнением $(x+3)^2 - x^2 = 39$ за несколько секунд. Но почти все представители геометрического типа решали ее более сложным способом. Прежде всего они строили чертеж (см. рис. 69), а потом по нему рассуждали (стрелками показаны их пояснения): «Это (x) обязательно квадрат и обязательно со стороной 3, т. е. площадь его — 9 см^2 . Значит, на два таких прямоугольника (y) приходится 30 см^2 , а на каждый по 15 см^2 . Одна сторона — 3, значит, другая — 5 см. Значит, было 5, а стало 8 см».

Эти учащиеся легко ориентируются в образном материале, операции, связанные с анализом схем, чертежей, графиков, выполняются ими значительно легче, чем операции, связанные с анализом понятий и определений.

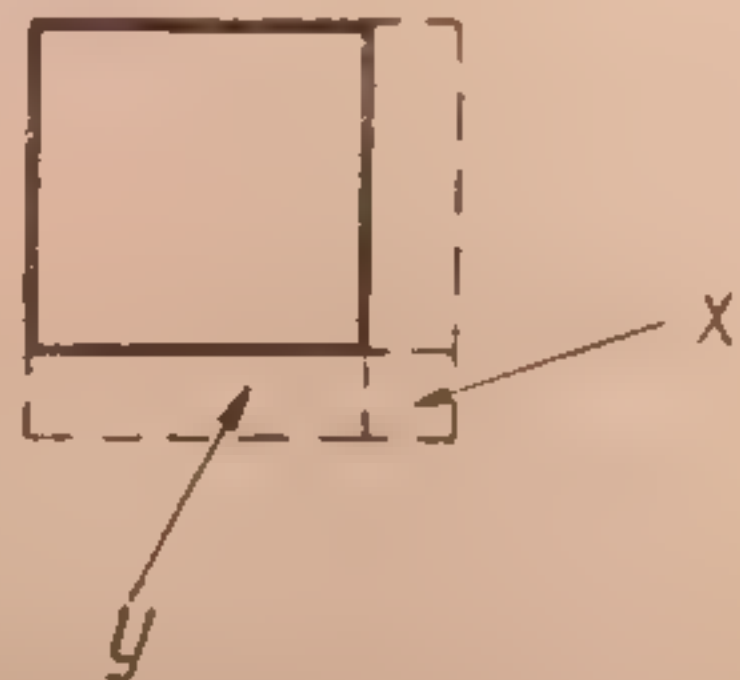


Рис. 69.

Индивидуальные сетки, построенные по результатам решения способными учащимися геометрического склада ума задач XXIII серии, также очень показательны. (См. табл. 23. Предлагаем сравнить ее с приведенной выше индивидуальной сеткой представителя аналитического типа.)

Таблица 23

Типичная индивидуальная сетка представителя геометрического типа (уч-ца С. Рук.)

Задачи	Тесты				
	Н	С ₁	С ₂	М ₁	М ₂
1	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ М \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$
2	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$
3	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ М \end{smallmatrix}$
4	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ МН \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ МН \end{smallmatrix}$
5	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ МН \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ М \end{smallmatrix}$
6	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ Н \end{smallmatrix}$	не решала	

Как видно, с опорой на схематические наглядные средства решались не только задачи С₁ и С₂ (кроме задачи С₁—1), но и большая часть задач М₁ и М₂. Только в 3 случаях из 28 совершенно не использовались наглядные средства. Наглядно-образные средства использовались и там, где их применение было затрудненным и нерациональным.

Представители геометрического типа отличаются очень хорошим развитием пространственных представлений. Даже самые сложные задачи XXV серии (например, XXV—Б—10, XXV—Б—11) решались в уме быстро и безошибочно. При этом учащиеся всячески подчеркивали, что они не решают задачу, а видят то, что спрашивается.

Интересны были результаты решения задач XXIV серии. В случаях расхождения словесной формулировки и соответствующего чертежа (тест XXIV—Б) почти все учащиеся ориентировались на чертеж, вследствие чего и допускали грубые ошибки. Надо было видеть их смущение, когда экспериментатор

доказывал, что все поспешно решенные ими задачи оказались решенными ошибочно. «Я это знал, только чертеж обманул меня!» — сокрушались они. В задачах теста XXIV—В все испытуемые геометрического типа без колебаний предпочитали иметь дело с наглядным вариантом задачи. Если давался словесный вариант, все они немедленно переводили данные на язык чертежа.

Как уже упоминалось, учащиеся «геометры» обнаруживали большую изобретательность в попытках переводить задачу в наглядно-образный план, находчивость в поисках средств наглядно-схематического выражения отношений и функциональных зависимостей. Их возможности в этом отношении казались неисчерпаемыми.

Вот как все представители геометрического типа решали задачу XXIII—М₁—4 (решение уч-ка VI кл. Д. Л.): прежде всего чертилась схема (см. рис. 70), дальше шло короткое рассуждение: « $2 = \frac{5}{12}$ неизвестного. Кафтан стоит 4 руб. 80 коп.»

А вот как они решали задачу XXIII—М₂—2 (решение Бори Г. — 9 лет, см. рис. 71): «Сдвинем вниз вторую черту так, чтобы снизу появился кусочек, равный 5. Тогда и сверху будет кусочек, равный 5. На 5 позже вышел, на 5 позже придет и догонит на полдороге».

Приведем, наконец, оригинальное графическое решение Д. Л. (VI кл.) довольно сложной задачи, решаемой обычно составлением системы



Рис. 70.

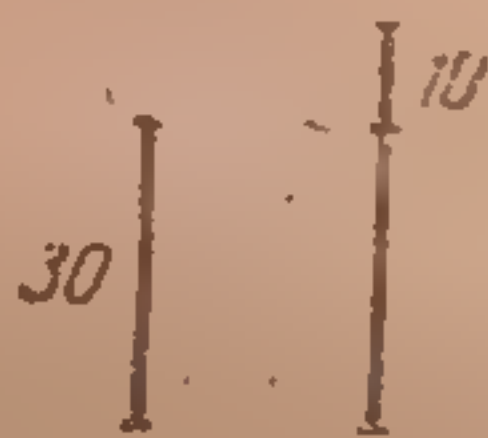


Рис. 71.

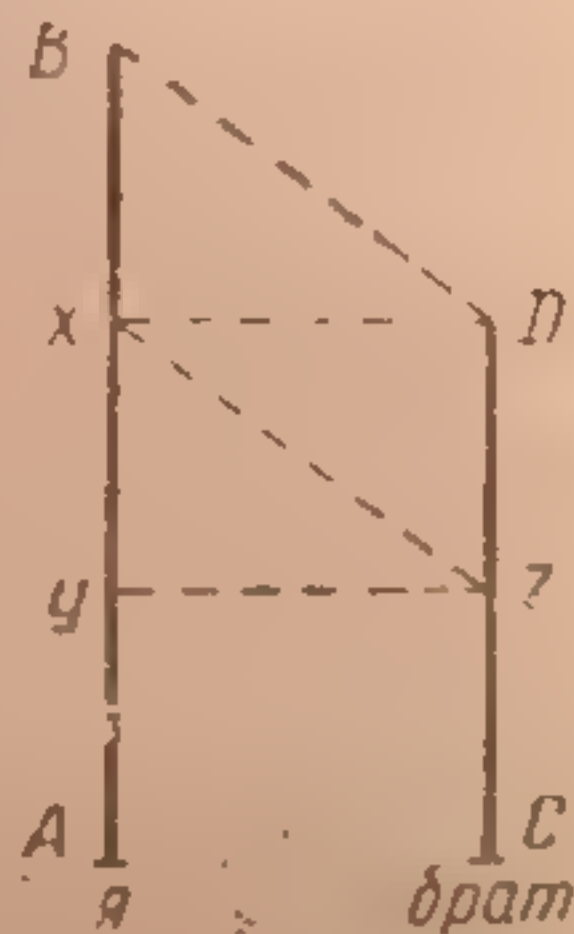


Рис. 72.

уравнений (см. рис. 72): «Сейчас мне вдвое: больше лет, чем было брату. тогда, когда мне было столько же лет, сколько ему теперь. Нам обоим вместе 63. Сколько лет каждому из нас?»

« Bx — разница наших лет. Когда мне было Ax , ему Cz ; $Cz = \frac{AB}{2}$ (по условию) и $Ay = \frac{AB}{2}$. Но $Bx = Dz$. Значит, $Bu = 2Bx$; $AB = 4xV$, а $CD = 3xV$; 63 года = 7 частей; $KV = 9$ лет. Ответ: 36 и 27 лет».

В своем стремлении придать даже абстрактным математическим проблемам графическую наглядность способные учащиеся

(особенно способные старшеклассники) порой приходили к своеобразным «открытиям». Прочитав о большой проблеме Ферма (равенство $a^n + b^n = c^n$ невозможно ни при каких целых положительных a, b, c, n , если $n > 2$), Д. «с места» дал ей геометрическую интерпретацию:

$a^1 + b^1 = c^1$ — возможно: c — сумма двух отрезков;

$a^2 + b^2 = c^2$ — возможно: c — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b . Что же геометрически означает невозможность равенства $a^3 + b^3 = c^3$? Д. придумал следующую интерпретацию: не существует трех кубов, у которых ребра выражены целыми числами так, что один куб равновелик двум другим (С. И. Шапиро [434]).

Учащимся была предложена задача: «Для любых комплексных чисел x и y доказать:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2[|x|^2 + |y|^2].$$

Способные учащиеся геометрического склада ума сразу увидели в этом равенстве теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма. Основой использованной модели послужили геометрические представления о модуле суммы и разности двух комплексных чисел как диагоналях параллелограмма, построенного на соответствующих векторах. «Комплексные числа можно рассматривать как векторы. Тогда $|x+y|$ как модуль суммы векторов является диагональю параллелограмма, построенного на векторах» (уч. С.) — (см. С. И. Шапиро [435, стр. 229–230]).

В классе изучался предел последовательности. Дан пример последовательности, которая может «проходить» и через предел. Многие ученики растерялись: ведь только что они усвоили понятие о бесконечно малой и пределе последовательности. Но ученик Ш. нашел наглядную интерпретацию: «Ясно... проходит через предел. Даже много раз. Об этом я раньше не думал. Проходит... но не останавливается. Как маятник с затухающими колебаниями... нет, не совсем как маятник. Тот в конце концов останавливается. А тут проходит через ноль и одновременно продолжает неограниченно приближаться».

При решении задачи: «Для данных двух чисел a и b найти зависимость между их наибольшим общим делителем (НОД) и наименьшим общим кратным (НОК)» — ученица Б. использовала «для наглядности», как она пояснила, оригинальный прием замены умножения и деления чисел сложением и вычитанием отрезков. Вот ее рассуждение: «Если вставить одну в другую две трубки разного диаметра (каждая трубка изображает число), то НОД чисел, выражающих их длины, можно мыслить как общую часть этих трубок, а НОК — как длину всей полученной трубки (см. рис. 73). $x+y=a+b$, а поскольку умножение было заменено сложением, то получится: $\text{НОД}(ab) \cdot \text{НОК}(ab) = ab$.

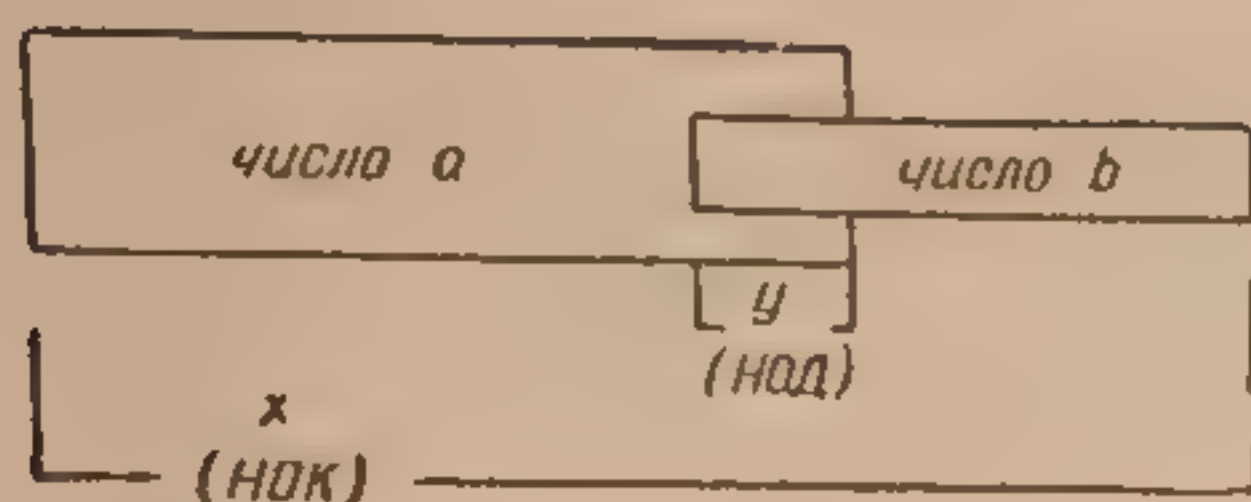


Рис. 73.

Во многих случаях мы обнаруживали, что определенная функциональная зависимость, формула становилась только тогда по-настоящему ясной и убедительной для испытуемого, когда он мог дать ей геометрическую интерпретацию. Когда шестиклассница С. Р. впервые познакомилась с формулой сокращенного умножения — «квадрат суммы двух чисел», она постаралась геометрически осмыслить ее и сделала следующий чертеж (см. рис. 74). «Вот теперь я увидела и поняла по-настоящему формулу!» — удовлетворенно заявила она.

В дальнейшем она так же геометрически интерпретировала и все другие формулы, даже если это было весьма сложным делом (например, в случае куба суммы или куба разности двух чисел, когда ей пришлось чертить сложное стереометрическое изображение).

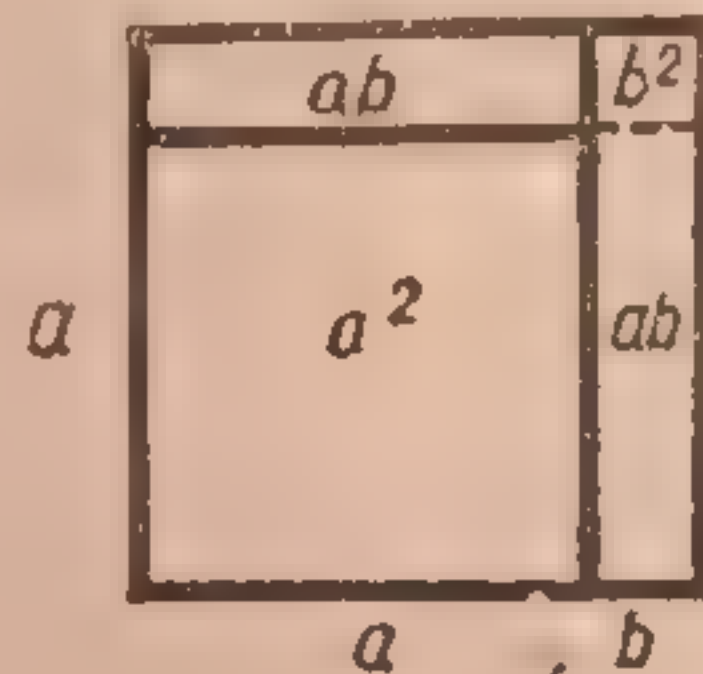


Рис. 74.

Возникает естественный вопрос: если всем способным к математике школьникам свойственна способность и потребность в обобщении математического материала, обобщенная память, то не является ли помехой этому «прикованность» представителей геометрического склада ума к наглядно-образным схемам, тенденция мыслить с использованием наглядно-образных схем?

До некоторой степени, конечно, это имеет место (поэтому мы и говорим о некоторой ограниченности математического мышления школьников этого типа). Но лишь до некоторой степени! Дело в том, что графические схемы, которые применяются этими учениками, представляют собой своеобразный синтез конкретного и абстрактного. Как указывала и М. Э. Боцманова [54], графическая схема есть весьма абстрактная форма наглядности, графическое выражение математических отношений и зависимостей является абстрагированным и обобщенным. Хотя оно и является определенным видом наглядности, но его наглядность и конкретность специфична и относительна. М. Э. Боцманова убедительно показала, что в чертеже — графической схеме имеет место схематизация и известная обобщенность наглядного образа. Опора мысли и даже «привязывание» ее к такому обобщенному наглядному образу не может препятствовать обобщенному мышлению. В таком случае этот образ является в каком-то смысле «носителем» смысла и содержания абстрактного понятия.

тия. II учащиеся-«геометры» испытывают потребность осмыслить задачу в общем плане, но этот общий план все время опирается у них на такие образы. Этим они и отличаются от малоспособных учеников — у тех наглядные образы действительно сковывают мышление, толкают его в конкретный план, мешают осмыслению задачи в общей форме.

Конечно, не все наглядно-образные схемы, применяемые способными школьниками-«геометрами», носят относительно обобщенный характер. Есть и очень частные, конкретные, наглядные образы. В этом случае, конечно, они могут оказывать отрицательное влияние на обобщенность мышления.

Все сказанное касается и памяти учащихся-«геометров». Несравненно быстрее, легче и прочнее запоминается ими образный материал. При запоминании словесно-логического материала они пытаются «привязать» обобщение к наглядному образу и в такой форме и хранят обобщение в памяти. У наиболее способных «геометров» запоминание даже геометрического материала носило «наглядно-обобщенный» характер — они запоминали, например, не весь геометрический чертеж, а его обобщенную схему. О соответствующей способности многих математиков-«геометров» писал, например, Д. Мордухай-Болтовский: «Пространственная память геометра — это не зрительная память. Он не помнит зрительный образ чертежа, а помнит только взаимное расположение линий и поверхностей или их частей» [300, стр. 528].

Гармонический тип

К этому типу относится значительное большинство изученных нами способных школьников (23 чел. из 34 чел. основной группы). Для этого типа характерно относительное равновесие хорошо развитых словесно-логического и наглядно-образного компонентов при ведущей роли первого. Пространственные представления у представителей этого типа развиты хорошо — все они успешно справились с задачами XXV серии. Они весьма изобретательны в наглядной интерпретации абстрактных отношений и зависимостей, но наглядные образы и схемы подчинены у них словесно-логическому анализу. Опираясь наглядными образами, эти учащиеся четко осознают, что содержание обобщения не исчерпывается частными случаями. Успешно осуществляют они и аналитический и образно-геометрический подход к решению многих задач.

Например, С. И. Шапиро предложил своим ученикам задачу: $a^2 + b^2 = c^2$; $a, b, c > 0$. Что можно сказать о зависимости между первыми степенями этих чисел?

Многие способные ученики (отнесенные к гармоническому типу) продемонстрировали и аналитический, и геометрический подход к решению:

$$1. a^2 + b^2 = c^2; a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab; (a+b)^2 = c^2 + 2ab;$$

$(a+b)^2 > c^2; a+b > c.$

2. a, b и c здесь — стороны прямоугольного треугольника и, следовательно, $c < a+b$.

Представители же аналитического типа заметили только первую возможность, геометрического типа — вторую.

Гармонический тип наблюдался нами в двух модификациях. В основном их различие сводится к следующему. При равновесии хорошо развитых словесно-логического и наглядно-образного компонентов модификацию «А» отличает тяготение к мыслительным операциям без применения наглядно-образных средств, модификацию «Б» — тяготение к мыслительным операциям с применением наглядно-образных схем. Поэтому мы и решили говорить об абстрактно-гармоническом подтипе и образно-гармоническом подтипе. Представители и того и другого подтипов одинаково хорошо могут изображать математические отношения и зависимости наглядно-образными средствами, но первые не испытывают в этом потребности, не стремятся делать это, вторые же, наоборот, испытывают в этом потребность и чаще опираются при решении на графические схемы. Первым такая опора мало помогает, вторым — облегчает решение. При необходимости первые могут прибегнуть к помощи наглядных образов, а вторые — решить задачу без опоры на наглядно-образные модели. При анализе математического материала первые предпочитают отталкиваться от вербально-логических формулировок, вторые — от наглядно-образных моментов. Из хорошо изученных нами очень одаренных школьников к первому подтипу относится, например, Соня Л., ко второму — Володя Л. (оба в возрасте 9—11 лет).

Очень наглядно разница между этими двумя модификациями может быть видна на сетках задач XXIII серии. Иллюстрируем сказанное индивидуальными сетками (табл. 24 и 25). Соня Л.

Таблица 24

Индивидуальная сетка абстрактно-гармонического подтипа (Соня Л.) по результатам опытов по XXIII серии

Задачи	Тесты				
	Н	C_1	C_2	M_1	M_2
1	$\begin{smallmatrix} + \\ MN \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ MN \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$
2	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$
3	$\begin{smallmatrix} + \\ H \end{smallmatrix}$	не решила	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ MN \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$
4	$\begin{smallmatrix} + \\ HM \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ M \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ HM \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ M \end{smallmatrix}$	не решила

Индивидуальная сетка образно-гармонического подтипа
(Володя Л.) по результатам опытов по XXIII серии

Задачи	Тесты				
	Н	С ₁	С ₂	М ₁	М ₂
1	\bar{H}	\bar{MH}	\bar{H}	\bar{H}	\bar{MH}
2	\bar{HM}	\bar{H}	\bar{H}	\bar{HM}	\bar{H}
3	\bar{H}	не ре- шал	\bar{H}	\bar{H}	\bar{MH}
4	\bar{H}	\bar{H}	\bar{HM}	\bar{HM}	не ре- шал

и Володи Л. (в эксперименте с ними в 1959—1960 гг. использовался упрощенный вариант XXIII серии).

Для понимания некоторых особенностей абстрактно-гармонического подтипа дадим характеристику некоторых особенностей решения задач Соней Л. Соня отличается хорошим развитием пространственных представлений, но она не любит решать задачи, требующие этих представлений, хотя может решать их довольно успешно. Например, она правильно и быстро решала самые разнообразные задачи соответствующей серии (XXV), в том числе и довольно сложные, например: «Карандаш закреплен одним концом, а другой конец принимает всевозможные положения в пространстве. Какую поверхность опишет этот конец?» (ответ правильный — «поверхность шара», через 3 сек.); «Даны 2 прямые, скрещивающиеся в пространстве. При каких условиях они проецируются в: а) прямую и точку вне ее; б) в две параллельные прямые?» (правильный ответ последовал через 6 и 9 сек.).

Наряду с этим у Сони Л. должна быть отмечена еще одна особенность. При решении целого ряда задач она очень мало нуждается в опоре на наглядные образы, даже тогда, когда задача «наталкивает» на это. Могло показаться, что она просто не умеет опираться на наглядные образы при решении задач. Но оказалось, что это не так. Когда мы специально ставили перед ней цель сделать задачу наглядной, решить ее с опорой на образы, то она в подавляющем большинстве случаев успешно справлялась с этой задачей, а очень часто демонстрировала и большую изобретательность в этом отношении.

Тогда у нас возникло другое предположение: а может быть у Сони столь яркие наглядные представления («эйдетического» характера), что она всегда использует их, не обращаясь к помощи бумаги и карандаша? Но этому противоречило следующее

наблюдение: мы обратили внимание, что Соня неохотно наблюдала, как мы графически «осмысливали» задачу, «подсказывали» ей ход решения. Она смотрела явно «из вежливости», а иногда незаметно створачивалась от чертежа и продолжала решать задачу, устремив взор в пространство. Когда мы спрашивали ее, почему она, умея графически «осмысливать» задачу, практически все же предпочитает не пользоваться этим методом, она отвечала, что «так привыкла», что ей «так легче», «проще». Это подтверждалось и анализом решения ею экспериментальных задач. Она без помощи наглядных опор иной раз решала даже такие задачи: «Чему равен угол, образованный пересечением биссектрис острых углов прямоугольного треугольника?» И не пытаясь вычертить условия этой задачи, она, отведя глаза в сторону и подумав непродолжительное время, говорила: «Половины 2 углов, которые в сумме дают 90° — это 45° , а из 2 d вычесть $45^\circ = 135^\circ$ ». По-видимому, в каком-то смысле логика, рассуждение в ряде случаев заменяют ей опору на наглядные образы, она не испытывает трудностей при оперировании абстрактными схемами, поэтому и не испытывает потребности «привязать» их к наглядным образам.

Многие средние, и особенно неспособные к математике, ученики также не опираются в процессе решения задач на наглядные схемы, но потому, что не умеют, а Соня потому, что не испытывает потребности в этом.

Надо отметить, что с возрастом указанные типологические различия (в отношении всех типов) становятся резче, ярче и выразительнее. Особо подчеркиваем, что выделенные нами типы — это те типы, которые проявляются в школьном возрасте. Естественно, что они не исчерпывают всего многообразия возможных индивидуальных и типологических различий в математических способностях, которые могут наблюдаться, например, у взрослых математиков.

Следует отметить также, что мы не пытались установить типологию на основе других параметров. Например, известные различия среди способных школьников обнаруживались по быстроте схватывания математического материала (такое же деление наблюдается и среди сложившихся математиков — крупных ученых. Известно, что, например, Гильберт усваивал новые идеи очень медленно).

Не пытались мы строить типологию и на основе развития вычислительных способностей, хотя не только среди школьников, но и среди крупных ученых наблюдаются большие индивидуальные различия в этой области — например, К. Гаусс и Л. Эйлер были превосходными вычислителями, А. Ампер в раннем детстве проявлял такие способности, но потом утерял их. А. Пуанкаре же писал о себе: «Я принужден сознаться, что положительно не способен сделать без ошибки сложение» [498].

Установленные нами типы имеют, по-видимому, общее значение. Наличие их подтверждается многими другими исследованиями. З. И. Калмыкова, например, отмечала индивидуальные различия в способности к наглядному представлению соотношений величин [154], И. С. Якиманская подчеркивала, что одним ученикам в процессе усвоения геометрии легче анализировать словесный, а другим — наглядный материал — «одни учащиеся испытывают трудности при анализе чертежа, но гораздо легче осуществляют анализ условия задачи, другие — наоборот... а третьи легко и быстро справлялись как с анализом условий задачи, так и чертежа» [470]. Э. Ш. Басырова [37] также писала об ориентации одних учащихся на словесно-обозначенные признаки, а других — на наглядные признаки, данные в чертеже. Л. Н. Ланда [238] констатировал трудности, которые вызывают у разных учащихся операции, связанные с анализом чертежа. и операции, связанные с анализом понятий.

§ 2. Возрастная динамика развития структуры математических способностей

В зарубежной психологии до настоящего времени широко распространены представления о возрастных особенностях математического развития школьника, исходящие из ранних исследований Ж. Пиаже. В то время, как известно, Пиаже считал, что ребенок только к 12 годам становится способным к абстрактному мышлению [493-а]. Анализируя стадии развития математических рассуждений подростка, Л. Жоанно пришел к выводу, что в плане наглядно-конкретном школьник мыслит до 12—13 лет, а мышление в плане формальной алгебры (связанное с овладением операциями, символами) складывается лишь к 17 годам [620, стр. 51].

Ф. Отта в работе, относящейся к 1956 г. [614], также утверждает, что лишь с 11—12 лет ребенок начинает проявлять в математике способность к абстрагированию и начинает рассуждать в отвлеченной форме.

Исследования советских психологов дают, как уже указывалось, совершенно иные результаты. Еще П. П. Блонский писал об интенсивном развитии у подростка (11—14 лет) обобщающего и абстрагирующего мышления, умения доказывать и разбираться в доказательствах [42, стр. 503—505].

В последнее время проведен ряд исследований некоторых возрастных особенностей математического мышления школьников, в том числе исследования А. В. Скрипченко [372], О. Я. Лихачевой [262], А. А. Бодалева [46], [48]. Л. Н. Проколиенко [337], [338] выявил некоторые особенности рассуждения подростка и старшего школьника в процессе решения геометрических задач. Однако представляется, что Л. Н. Проколиенко уж очень «жест-

ко» определил рамки возрастов, игнорируя при этом индивидуальные различия, — едва ли можно согласиться с таким резким делением: ученики VI класса отличаются репродуктивным подходом к решению задач, а VII класса — творческим; ученики IX класса рассуждают индуктивным способом и мышление их развернуто («стараясь не пропустить ни одного звена в рассуждении»), а ученики X класса чаще используют дедуктивный метод и стремятся рассуждать в сокращенной форме [338, стр. 304].

Задача нашего исследования математических способностей включала и выявление возрастных особенностей развития компонентов математических способностей на протяжении всего периода школьного обучения от младшего к старшему школьному возрасту. Были исследованы возрастные особенности структуры математических способностей, специфика проявления формирующихся компонентов на различных возрастных этапах в младшем, среднем и старшем школьном возрастах под влиянием школьного обучения.

Возникает законный вопрос: в какой мере можно говорить о математических способностях по отношению к младшим школьникам, особенно учащимся I—II—III классов?

Исследование, проведенное под нашим руководством И. В. Дубровиной [122], [123], дает основания ответить на этот вопрос следующим образом. Конечно, исключая случаи особой одаренности, мы не можем говорить о сколько-нибудь сформированной структуре собственно математических способностей применительно к этому возрасту. Поэтому понятие «математические способности» в известной степени условно в применении к младшим школьникам — детям 8—10 лет, и при исследовании компонентов математических способностей в этом возрасте речь обычно может идти лишь об элементарных формах таких компонентов. Но отдельные компоненты математических способностей формируются уже и в начальных классах. Своеобразные «зачаточные», «зародышевые» формы выделенных нами компонентов можно наблюдать у отдельных учеников уже во II классе, причем заметное развитие их в процессе школьного обучения и под влиянием его наблюдается от II к IV классу. И наличие таких элементарных, зародышевых проявлений вполне естественно: трудно было бы предположить, что более или менее сложившиеся в VI—VII классах структуры «школьных» математических способностей не имели бы «проекции» в младшем школьном возрасте. Кроме того, ведь речь идет не о всей массе учеников, — математические способности мы изучаем на более способных, тех, кто успешнее других осуществляет школьную математическую деятельность. С другой стороны, мы не можем при изучении возрастных особенностей ориентироваться и на особо одаренных детей (типа Сони Л., Володи Л. и других), представляющих своеобразное исключение, «выпадающих» из общей характеристики возраста. Естественно,

возрастные особенности развития математических способностей изучались на основной массе средних и способных школьников. При этом надо отметить, что индивидуальные различия в пределах возраста (особенно, если сравнить наиболее сильных и наиболее слабых учащихся) оказывались весьма значительными.

Выявленные особенности развития математических способностей мы не стремились очень «жестко» привязывать к определенным возрастам. Исследования Д. Б. Эльконина и В. В. Давыдова, Л. В. Занкова, А. В. Скрипченко и других показали, что при изменении содержания и методики преподавания возможны серьезные сдвиги этих особенностей в довольно широких пределах в более младший возраст.

Опытное обучение, которое осуществляют в ряде школ сотрудники Института психологии (Д. Б. Эльконин, В. В. Давыдов), показывает, что при специальной методике обучения младшие школьники приобретают гораздо большую способность к отвлечению и рассуждению, чем принято думать. Однако, хотя возрастные возможности школьника в большой мере зависят от условий, в которых осуществляется обучение, считать, что они целиком создаются обучением, было бы неверно. Поэтому неправильна крайняя точка зрения на этот вопрос, высказываемая, например, Г. П. Щедровицким [459], который считает, что не существует никакой закономерной линии естественного психического развития. Мы думаем, что более эффективная, чем сейчас существующая, система обучения может «сжать» весь процесс, но до известных пределов, может несколько изменить последовательность развития, но не может придать линии развития совершенно иной характер. Произвольности здесь быть не может. Не может, например, способность к обобщению сложных математических отношений и методов сформироваться раньше, чем способность к обобщению простых математических отношений.

Таким образом, возрастные особенности развития математических способностей, о которых мы говорим, — это несколько условное понятие. По сути дела, наша задача заключалась в исследовании общей тенденции, общего направления развития основных компонентов структуры математических способностей под влиянием обучения. Лишь оговариваясь, что имеется в виду современный уровень преподавания, мы ориентировочно соотносим отдельные ступени, уровни этого развития с возрастом школьника.

Анализ возрастных особенностей развития математических способностей проводился по следующим параметрам: 1) формализованное восприятие математического материала; 2) обобщение математического материала; 3) свернутость математического мышления — тенденция мыслить в процессе математической деятельности сокращенными структурами; 4) гибкость мыслитель-

ного процесса; 5) стремление к своеобразной экономии умственных усилий — к «изяществу» решений; 6) математическая память. Эта схема соответствует, в общем, сложившемуся у нас представлению о структуре математических способностей. Рассмотрение возрастных особенностей развития каждого компонента в отдельности предпринято только для того, чтобы представить процесс развития в более четкой и определенной форме. На самом же деле происходит, конечно, развитие целостного комплекса компонентов, неразрывно связанных друг с другом.

Ниже дается анализ возрастного развития компонентов математических способностей в соответствии с данной выше схемой. Помимо собственных исследований, автор использовал материалы выполненных под его руководством работ И. В. Дубровиной [122] и С. И. Шапиро [435].

Формализованное восприятие математического материала

В своего рода «зародышевой» форме этот компонент начинает проявляться уже во II—III классах. У более способных учащихся под влиянием обучения формируется стремление разобраться в условиях задачи, сопоставить ее данные. Их начинают интересоваться в задаче не просто отдельные величины, а именно отношения величин. Если менее способные ученики воспринимают отдельные, конкретные элементы задачи, как не связанные друг с другом, и сразу после чтения задачи начинают производить различные операции со всеми данными числами, не задумываясь над смыслом задачи и не пытаясь вычленить основные отношения, то у более способных появляется своеобразная потребность при восприятии условий задачи вскрывать эти отношения, связывать отдельные показатели и величины. Пока это еще процесс более или менее «растянутый» во времени, «схватывания» отношений «с места» не наблюдается (или наблюдается лишь в совсем простых задачах у наиболее способных).

Постепенно более способные учащиеся начинают видеть в задаче отношения между определенными величинами. Поэтому они часто не придают большого значения тому, о каких конкретных предметах идет речь в задаче. Они порой даже путают названия предметов, о которых говорится в задаче. Менее способные ученики держатся за точное название предметов. В задаче они видят не какие-то математические отношения, а лишь конкретные предметы, с которыми нужно что-то делать. Например, Вера Я. (II кл.) решала задачу про яблони. Когда экспериментатор несколько раз нарочно называл их деревьями, Вера каждый раз вопросительно смотрела на него, несколько раз поправляла, сама говорила только о яблонях. То же самое наблюдалось и при составлении задач. Менее способные обычно начинали с предположения содержания («буду составлять задачу на яблоки»), а

потом уж с трудом вводили отношения, более способные начинали с отношений («буду составлять задачу на «больше — меньше»), а потом уж «опредмечивали» их.

Вычленив отношения, более способные и многие средние учащиеся уже во II—III классе начинают дифференцировать данные — выделять именно те, которые необходимы для решения, осознавать, каких величин недостает, какие являются лишними, ненужными. Постепенно процесс первичной ориентировки в условиях задачи начинает свертываться. «Свернутый» характер восприятия отчетливее виден на решении более легких задач, где меньше данных, следовательно, легче сразу охватить всю систему отношений в целом. Тенденция к «свернутости» восприятия усиливается от II к IV классу.

У более способных учеников IV класса И. В. Дубровина наблюдала явно выраженную тенденцию к своеобразному аналитико-синтетическому восприятию условий задачи. Они воспринимают не только единичные элементы, а и своеобразные «смысловые математические структуры», комплексы взаимосвязанных математических величин и категорий. Разумеется, указанная особенность проявляется на сравнительно несложном арифметическом материале и, следовательно, на более или менее элементарном уровне.

Разница в восприятии условий задачи способными и малоспособными младшими школьниками может быть проиллюстрирована примерами из исследования И. В. Дубровиной. В одной из серий она давала учащимся задачи с относительно сложным для запоминания условием. Читала задачу один раз (о чем предупреждала их) и просила рассказать все, что они запомнят. Ее интересовало, что воспримет ученик в задаче после одного чтения, на что обратит внимание в первую очередь. Менее способные ученики пересказывали задачу, не думая, можно ли по таким данным решить задачу. Часто они точно запоминали цифры, конкретные данные, но в каком отношении они находятся друг с другом, обычно не помнили.

Способные дети воспроизводили те данные, по которым можно было решить задачу (и, что особенно важно, часто только в общем виде), так как была схвачена, осмыслена суть, хотя цифры и названия иногда забывались.

Дальнейшее развитие аналитико-синтетического восприятия условий задачи идет по пути свертывания (сокращения) этого процесса. В среднем школьном возрасте процесс первичного анализа-синтеза условий не очень сложной задачи у весьма способных учащихся уже максимально «свернут», предельно ограничен во времени, так что практически «срастается» с моментом восприятия — отсутствуют сколько-нибудь «дробная» аналитико-синтетическая работа, сколько-нибудь заметные элементы рассуждения.

Тенденция к формализации восприятия, выделению формальной структуры в среднем возрасте приобретает у более способных учащихся широкий характер.

В среднем школьном возрасте намечается, а в старшем школьном возрасте достигает значительного развития еще одна особенность восприятия способными школьниками математического материала (исследование С. И. Шапиро). Имеется в виду своеобразная многосторонность, многоплановость восприятия, когда одна и та же задача, одно и то же математическое выражение воспринимаются, оцениваются с разных точек зрения. В одной из экспериментальных серий учащиеся X класса анализировали тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Менее способные учащиеся указывали только, что оно дает возможность вычислять \sin (или \cos) угла по данному его \cos (или \sin). Способные же учащиеся, осмысливая данное равенство, кроме этого, указывали и на ряд других моментов, в частности: 1) «это значит, что $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ никогда не бывают больше единицы»; 2) «если сумма квадратов двух чисел равна единице, то одно из них является синусом угла, а второе — косинусом того же угла».

У школьников старшего школьного возраста С. И. Шапиро отметил и еще одну особенность — возникновение и развитие под влиянием обучения тенденции исследовать задачу на достаточность (полноту), совместность (непротиворечивость), тенденции отделять постулируемое от выводимого. Эти черты математического мышления С. И. Шапиро связывает с формированием так называемого аксиомосообразного мышления.

Все сказанное выше говорит о возникновении под влиянием школьного обучения тенденции к формализации математического материала в процессе его восприятия, способности усматривать в конкретном математическом выражении или задаче их формальную структуру. Ученик при этом отвлекается от конкретных данных и воспринимает, в первую очередь, лишь чистые соотношения между величинами. Указанная тенденция возникает у способных учеников уже в конце младшего школьного возраста и заметно усиливается к старшему возрасту. При этом ученику требуется анализировать все меньше и меньше однотипных выражений для усмотрения формальной структуры типа. В итоге возникает способность «схватить» формальную структуру типа в результате анализа лишь одного явления без сопоставления его с рядом других сходных явлений.

Обобщение математического материала

Способность к обобщению математического материала как способность улавливать общее в разных задачах и примерах и соответственно видеть разное в общем начинает складываться раньше всех других компонентов. Уже в I классе можно наблю-

дать ее проявления, разумеется, в весьма элементарных формах. На этом этапе еще трудно говорить об этой способности как специфической способности к обобщению именно математического материала. Скорее, здесь можно говорить об общей способности к обобщению, как одном из проявлений свойств обучаемости. Сказанное не относится к очень одаренным ученикам — у тех и в I классе и даже в старшем дошкольном возрасте способность к обобщению выступает как специфическая способность. Эксперименты, проведенные И. В. Дубровиной на математическом и нематематическом материале, изучение развития группы очень одаренных школьников, изучение биографических данных многих крупных ученых позволяет сделать этот вывод.

На начальных ступенях школьного обучения математические обобщения обычно «вызревают» постепенно и распространяются на сравнительно ограниченный круг явлений. С возрастом обобщение становится все более широким, распространяется на больший круг однородных математических явлений. В младшем школьном возрасте наблюдается относительно более простой вид обобщения — движение от частного к известному общему — умение увидеть в частном уже известное общее, иначе говоря, подвести частный случай под общее правило. Этот вид обобщения достигает большого развития в среднем школьном возрасте. Чем способнее ученик, тем успешнее справляется он с задачами на соответствующее обобщение. Как правило, только в начале среднего школьного возраста мы наблюдали обобщение индуктивного характера — от частного к неизвестному общему.

Развитие способности к обобщению идет по линии постепенного сокращения количества специальных однотипных упражнений, являющихся предпосылкой такого обобщения. У наиболее способных учащихся среднего школьного возраста такое обобщение наступает сразу, путем анализа одного отдельно взятого явления в ряду сходных явлений, как способность усмотреть еще неизвестное общее в единичном. Путь обобщения «от частных (многих) к неизвестному общему» постепенно трансформируется в качественно совершенно особый путь «от частного (одного) к неизвестному общему».

Эта способность тесно связана со способностью к формализованному восприятию математического материала, и по аналогии с «формализованным восприятием» мы должны говорить о «формализованном решении». Иллюстрируем сказанное примером. Способный к математике подросток У., не знакомый еще с формулами сокращенного умножения, на одном из экспериментальных занятий решает пример $(2a+7b)^2$. Вот протокольная запись его решения и рассуждений: «Взять в квадрате — это значит умножить само на себя или, как говорят по-ученому, взять сомножителем дважды... Будет $4a^2+14ab+14ab+49b^2$. Или в середине $28ab$... Э, да ведь всегда два средних члена должны быть одина-

ковы... Они всегда должны быть произведением двух данных членов. Поэтому такие примеры я буду решать сокращенно — перемножать оба члена и удваивать. А первый и последний — это квадраты первого и второго. Значит, в таких примерах проще просто складывать — первое в квадрате, второе в квадрате и двойное их произведение. Хоть немножко проще, а все-таки проще... Интересно, а если в скобках будет минус?... Тогда квадраты-то всегда останутся плюсовыми, так как минус на минус всегда будет плюс, а двойное произведение уже будет с минусом, так как всегда это будет перемножение членов с разными знаками. Значит, при возведении в квадрат скобки с двумя членами надо складывать первый в квадрате и второй в квадрате, а потом брать двойное их произведение со знаком плюс (если в скобке плюс) или со знаком минус (если в скобке минус). Вот и все. Теперь так и буду решать».

Для способных подростков вообще характерно обобщенное решение задач (тенденция решать каждую конкретную задачу в общей форме). В элементарной форме эта тенденция может быть отмечена и у способных младших школьников. Такие ученики без затруднений переходят к решению задач в буквенной форме. Второклассник Сережа Т. совершенно свободно решил первую в своей жизни задачу такого типа: «Магазин получил 8 мешков муки по a кг в каждом. В течение дня продано 3 мешка муки. Сколько килограммов муки осталось?»

Как отмечает С. И. Шапиро, для способных к математике старших школьников характерно не только обобщение конкретного материала, но и перевод уже обобщенной задачи в более общий план. Если подросток, решая данную задачу в общей форме, решает тем самым все задачи данного типа, то старший школьник старается решить не только данный тип задач, но и более общую задачу, частным случаем которой является та, которую он решает. Именно поэтому, кстати, способные старшеклассники стремятся обычно к тригонометрическому решению геометрических задач, как более общему методу. Очень понравилась им, например, теорема косинусов, — ведь она объединяет целых три теоремы геометрии.

В исследовании С. И. Шапиро имеются интересные наблюдения. Способные к математике десятиклассники А. и Ш. решают задачу: «Доказать, что $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2$, если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ».

Взглянув на условие, ученик А. дал задаче неожиданную интерпретацию: надо доказать, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей, если векторы параллельны. Векторная интерпретация позволила А. обобщить задачу:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Прежняя задача является теперь только частным случаем более общей задачи. Ученик Ш., решая ту же задачу, сразу поставил вопрос: «Частным случаем какой более общей задачи может являться данная задача?» Пытаясь ответить на этот вопрос, он самостоятельно вывел известную в математике формулу Коши — Буняковского, отправляясь от ее частного случая. В связи с этим С. И. Шапиро обратил внимание на то, что у способных к математике старшеклассников обобщения могут образовываться и функционировать сразу на нескольких уровнях. (Подробнее об этом ниже — в разделе о математической памяти.)

Наконец, было установлено, что способные к математике старшеклассники поднимаются до уровня обобщения методов, принципов подхода к анализу и решению задач разных типов. Эти методы отличаются разной степенью обобщенности.

В заключение этого раздела коснемся мотивационной стороны деятельности обобщения. Чем направляется (побуждается) обобщение? Совершенно четко вырисовывается здесь линия развития — от внешней необходимости к внутренней потребности. На первых порах (в младшем и отчасти среднем школьном возрастах) обобщение вызывается каким-либо внешним стимулом (указание учителя, требование экспериментатора, логика задачи). Потребности в обобщении здесь чаще всего нет. С развитием наблюдается все большая независимость обобщения от внешних стимулов. В среднем школьном возрасте уже явно обнаруживается потребность в обобщении (даже тогда, когда никакой внешней необходимости в этом нет). Особенного развития она достигает в старшем школьном возрасте. Как отмечается в исследовании С. И. Шапиро, в случае выбора между изящным, но единственным решением и более сложным, но общим многие способные учащиеся склонны ко второму, настолько высоко они ценят фактор общности.

Свернутость мышления

Свернутость, сокращенность рассуждения и системы соответствующих действий в процессе математической деятельности является специфичной для способных к математике учащихся в основном старшего школьного возраста (хотя отчетливо усматривается и в среднем школьном возрасте). Как показало исследование И. В. Дубровиной, указанный компонент математических способностей в младшем школьном возрасте проявляется лишь в самой элементарной форме. Ей удалось наблюдать свернутый процесс мышления при решении способными учениками II класса лишь самых простых задач. Как только задача чуть сложнее, она обдумывается и решается шаг за шагом, рассуждение развернуто и детализировано. Процесс свертывания

яснее выражен у способных учащихся III и IV классов, особенно после решения ряда однотипных задач и примеров. При этом чаще опускаются отдельные звенья рассуждения, действия же обычно сохраняются и воспроизводятся на бумаге последовательно.

Способная ученица III класса Галя К. решает задачу: «Для школьной выставки ребята сделали 32 рисунка. 5 учеников III класса дали по 4 рисунка, остальные рисунки сделали 6 учеников II класса поровну. По сколько рисунков сделали для выставки ученики второго класса?» Галя говорит сразу после первого чтения задачи: «Двенадцать разделить на 6, по два рисунка». По просьбе экспериментатора Галя демонстрирует развернутое решение и всю систему соответствующих действий: $(4 \cdot 5 = 20; 32 - 20 = 12; 12 : 6 = 2)$.

Можно наметить две линии развития указанного компонента от среднего к старшему школьному возрасту. С одной стороны, многократность повторения однотипного рассуждения и системы соответствующих действий, являющаяся на ранних возрастных этапах необходимым условием начала процесса свертывания, постепенно перестает быть таким необходимым условием. Рассуждение и система соответствующих действий начинают свертываться сразу же при решении даже нового типа задач. Что же касается очень способных к математике учащихся VII—VIII и особенно старших классов, то у них зачастую вообще нельзя усмотреть процесса свертывания. Они, по сути дела, в математике мыслят уже свернутыми структурами, что обеспечивает им своеобразное «дальновидение» при решении задач и большую скорость переработки математической информации.

Вторая линия развития касается осознания школьниками опущенных звеньев рассуждения. Насколько осознаются ими те ходы мысли и действия, которые выпали из системы? На первых порах опущенные звенья осознаются. Ученики не выявляют их внешне ни словесно, ни письменно, но они явно «застревают» при мышлении вслух и воспроизведении на бумаге соответствующих действий, и можно наблюдать паузы, приходящиеся как раз на те звенья, которые выпускаются. В дальнейшем редуцированные звенья уже не осознаются в данный момент. Учащиеся, по-видимому, не нуждаются в этом, пауз в соответствующих местах уже не наблюдается, процесс рассуждения непрерывен, а если и наблюдаются паузы, то, как это ни странно на первый взгляд, чаще там, где процесс рассуждения развернут. Однако рассуждение легко может быть развернуто, восстановлены все опущенные звенья, и это может быть сделано учеником в любой момент — при возникновении трудностей или по требованию экспериментатора. Наконец, на более поздних этапах развития, когда ученик, как мы уже указывали, не свертывает рассуждение, а мыслит уже свернутыми структурами, он испытывает известные трудности.

сти, если сталкивается с необходимостью развернуть процесс рассуждения с возможной полнотой. В отдельных случаях учащиеся явно затрудняются обосновать свой ход мысли, заявляя, что для них это и так ясно, что они никогда не задумывались над тем, «как объяснять то, что совершенно очевидно». Например, ученик Д. (X кл.) решает задачу: найти зависимость между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным двух чисел. Он сразу говорит: «Произведение НОД на НОК равно произведению самих чисел». В развернутом виде его рассуждение выглядит так: «НОД двух чисел — это их общие множители, НОК — это произведение самих чисел, в которые общая часть входит только один раз». Ясное ему самому рассуждение не было понято большинством его товарищей.

Гибкость мыслительного процесса

В зачаточной форме этот компонент был обнаружен лишь у способных к математике младших школьников. Почти ни у кого из исследованных школьников II класса не обнаружено явной тенденции, например, искать несколько различных путей решения одной и той же задачи, переключаясь с одного хода мысли на другой. Такой переход оказывался для них трудным. Соответствующее требование экспериментатора часто вызывало у них недоумение. Для многих из них неприемлема сама мысль о том, что задача может иметь несколько решений (и все правильные). Но способные к математике учащиеся III—IV классов уже демонстрируют известную гибкость мыслительных процессов в ходе поисков других решений (правда, никогда это не происходило по собственной инициативе, всегда после наводящих вопросов экспериментатора). Менее способные к математике учащиеся даже более старших классов с трудом переключаются с одной умственной операции на другую (качественно иную), они обычно очень скованы первоначально найденным способом решения, склонны к шаблонным и трафаретным ходам мысли. Интересно, что в подобных случаях дело заключается не в том, что трудно переключиться с простого на более сложный способ решения. Зачастую трудно переключиться и с более трудного на более легкий способ, если первый является привычным, знакомым, а второй — новым и незнакомым. Один способ решения тормозится другим.

Развитие гибкости мышления идет по пути все более полного освобождения от сковывающего влияния предшествующего хода мысли. У более способных к математике подростков и старшеклассников ломка и перестройка сложившихся способов мышления совершаются быстро и безболезненно. Они уже по собственной инициативе находят различные пути решения задач.

Стремление к экономии умственных усилий, рациональности («изяществу» решения)

Тенденция к оценке ряда возможных способов решения и выбору из них наиболее ясного, простого и экономного, наиболее рационального решения в младшем школьном возрасте еще не четко выражена. Лишь наиболее способные оценивали различные решения как «более простое» и «более сложное», «лучшее» и «худшее», исходя при этом только из количества производимых операций. Только 31% исследованных И. В. Дубровиной более способных учащихся II—III классов решали задачу сразу более простым и экономным способом, ясно видя при этом и другие способы и оценивая относительную их рациональность.

Указанная тенденция начинает заметно проявляться лишь в среднем школьном возрасте. Если для учеников со средними способностями цель заключается в том, чтобы решить задачу, то для способных к математике она заключается в том, чтобы решить ее наилучшим, наиболее экономным способом. Хотя подросткам и не всегда удается найти наиболее рациональное решение задачи, в большинстве случаев они избирают путь, который быстрее и легче приводит к цели.

Особенного развития отмеченный компонент достигает в старшем школьном возрасте. С. И. Шапиро подчеркивает, что указанная тенденция свойственна всем исследованным им способным к математике старшеклассникам и проявляется при этом в очень яркой и выразительной форме. После первого решения задач обычно начинаются творческие поиски, направленные на исследование и улучшение найденного способа, с целью найти наиболее экономный и рациональный.

Математическая память

Проявлений собственно математической памяти в ее развитых формах (когда помнились бы только обобщения и мыслительные схемы) в младшем школьном возрасте нами не наблюдалось. Способные ученики в этом возрасте, по наблюдению И. В. Дубровиной, обычно равно запоминают и конкретные данные и отношения. В их памяти хранится рядоположенно общее и частное, существенное и несущественное, нужное и ненужное. Но основным для них все-таки постепенно становится отношение данных задачи. Если они что-то и забудут, то это скорее не математические отношения, а числа, конкретные данные.

С годами все большее значение приобретает запоминание отношений, все меньшее — запоминание конкретных данных. Память постепенно освобождается от хранения частного, конкретного, ненужного для дальнейшего развития.

Память способных к математике подростков уже по-разному проявляется по отношению к различным элементам математиче-

ских систем (задач). Она носит обобщенный и «срочный» характер. Быстро запоминаются и прочно сохраняются типы задач и обобщенные способы их решения, схемы рассуждений, доказательств. Конкретные данные запоминаются хорошо, но в основном лишь на срок решения задачи, после чего быстро забываются. Лишние, ненужные данные запоминаются плохо. Запоминается не вся математическая информация, а преимущественно та, которая «очищена» от конкретных значений.

Качественно новые особенности приобретает математическая память у способных к математике старшеклассников. Здесь следует отметить две особенности, изученные С. И. Шапиро. Первая из них заключается в следующем. Выше уже указывалось, что у способных старшеклассников обобщения образуются и функционируют на разных уровнях общности. К этому надо добавить, что один и тот же математический материал может храниться в памяти одновременно на разных уровнях обобщения, которые сосуществуют друг с другом. Например, в памяти хранится самый широкий функциональный образ формулы без деталей, отражающий самый общий характер функциональной зависимости, наряду с этим — более конкретная ее форма и, наконец, собственно формула. Это позволяет, во-первых, легко вывести формулу (если она забылась), исходя из общего характера функциональной зависимости и, во-вторых, легко предварительно «прикидывать» возможность применения данной формулы в том или ином конкретном случае.

Исследование показало, например, что формула площади треугольника хранилась в памяти некоторых способных десятиклассников одновременно на трех уровнях: 1) самый широкий функциональный образ формулы — площадь треугольника является функцией двух сторон и угла между ними; 2) менее обобщенный образ, но не содержащий еще самой формулы — площадь треугольника является функцией двух сторон и синуса угла между ними; 3) собственно формула площади ($S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin c$).

Большинство способных десятиклассников также помнили формулу тангенса двойного угла на двух уровнях:

$$1) \operatorname{tg} 2\alpha = f(\operatorname{tg} \alpha) \text{ и } 2) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Другая особенность математической памяти способных старшеклассников заключается в том, что они хорошо помнят общие методы подхода к решению задач, часто в виде самых общих указаний, без деталей. Например, основной идеей решения описанной выше геометрической задачи (см. стр. 340) является идея замены равновеликих площадей. Что навело ученика на эту мысль? Оказывается, в прошлом учащийся решал задачи с подобной идеей («У Рыбкина такие задачи есть и я их решал»), но

ни одной из них он не мог припомнить, как ни старался. Сохранился в памяти только сам метод, сама идея.

Такова самая общая и ориентировочная картина возрастного развития компонентов, занимающих существенное место в структуре математических способностей школьников. На различных возрастных ступенях эти компоненты отличаются качественным своеобразием, специфической формой проявления.

Исследование показало наличие закономерных количественных и качественных изменений в проявлении этих компонентов по возрастам. Каждый новый этап подготовлен всем предыдущим ходом развития, возникает на основе его и является предпосылкой для перехода на новый, более высокий уровень развития. Эта линия развития складывается под решающим влиянием школьного обучения, хотя и не определяется только им.

Не все компоненты математических способностей начинают формироваться одновременно. Развитие способностей к математике во всех исследованных нами случаях начиналось с формирования первичного компонента — способности к обобщению математических объектов, отношений и действий. Способность к свертыванию процесса рассуждения, обобщенная память, стремление к экономности и рациональности решений формировалась на более поздних этапах. Есть основания считать, что эти компоненты математических способностей формируются на основе первичной способности — способности к обобщению математического материала. Но разумеется, этот вопрос еще требует специального исследования.

Дальнейшая задача состоит в исследовании условий, позволяющих овладеть процессом возрастного развития математических способностей с целью сознательного и целенаправленного руководства и управления им в процессе школьного обучения.

§ 3. О половых различиях в характеристике математических способностей

Оказывают ли какое-нибудь влияние на характер развития математических способностей и на уровень достижений в соответствующей области половые различия? Имеют ли место качественно своеобразные особенности математического мышления мальчиков и девочек, девушек и юношей в школьном возрасте?

Соответствующие исследования в советской психологии отсутствуют. Видимо, считается само собой разумеющимся, что никаких принципиальных различий в этой области нет, а существующие различия целиком объясняются традицией, условиями воспитания и обучения.

В зарубежной психологии имеется некоторое (относительно небольшое) количество работ, где сделана попытка выявить отдельные качественные особенности математического мышле-

ния мальчиков (юношей) и девочек (девушек). В некоторых работах прямо говорится о превосходстве мальчиков над девочками в этом отношении, в других отрицается это, хотя и указывается на те или иные особенности мышления мальчиков и девочек.

Еще В. Штерн в своей известной книге, посвященной анализу одаренности детей и подростков [506], говорит о своем несогласии с той точкой зрения, согласно которой различия в умственной области мужчин и женщин есть результат неодинаковости воспитания, школьного образования. По его мнению, причины кроются в различных внутренних задатках. Поэтому можно говорить, замечает Штерн, о том, что женщины менее склонны к абстрактному, логическому, отвлеченному мышлению и менее способны в этом отношении [506, стр. 33].

В 1963 г. была опубликована работа Е. П. Торранс [721]. Автор предлагал мальчикам и девочкам различного школьного возраста разные задачи, требующие несложных форм творческого научного мышления. По данным автора, мальчики превосходили девочек в нахождении идей и принципов творческого решения задач (они указывают на большее количество возможностей, идеи их оцениваются более высоко и т. д.).

Что касается собственно математического мышления, то определенные высказывания на этот счет, основанные на наблюдениях и экспериментах, имеются у Ч. Спирмена и Э. Торндайка. Спирмен высказал мнение, что половые различия в математическом мышлении, если и существуют, то они, во-первых, незначительны, а во-вторых, могут зависеть от среды больше, чем от внутренних условий [658, стр. 20]. Торндайк в книге «Психология алгебры» [715] пишет, ссылаясь на повседневный опыт и специальные исследования, что между мальчиками и девочками не существует сколько-нибудь заметных различий в способности к алгебре. Наряду с этим Торндайк отмечает у мальчиков больший интерес к алгебре, связывая это с интересом их к физике и инженерным специальностям. В книге «Принципы обучения, основанные на психологии», Торндайк также пишет, что «в отношении способностей большой разницы между полами не замечается» [502, стр. 103]. Но при этом он отмечает большую склонность девочек к детализированию, запоминанию подробностей, более точное воспроизведение ими данных.

А. Кеймерон в работе 1925 г. [545] также, считая, что нет существенных различий в математических способностях мальчиков и девочек, указывает вместе с тем на различие между ними в способности к пространственным представлениям — у мальчиков она более развита. Автор указывает, что возможно это различие является результатом обучения, упражнений, так как если мальчики и девочки обучались вместе, то это превосходство становится мало заметным. Но и в этом случае, отмечает Кеймерон,

«превосходство мальчиков в воображении более сложных геометрических форм сохраняется» [545, стр. 29, 43].

А. Блэкуэлл [529] в 1940 г., исследуя с помощью факторного анализа результаты решения 100 мальчиками и 100 девочками различных тестов, выделил у мальчиков 3 специфических фактора, а у девочек в этих же условиях — 4. У девочек был выделен специальный фактор, отсутствующий у мальчиков, условно названный фактором x , — фактор точности и аккуратности, способность удерживать и сохранять данные в относительно педантично точной форме. Кроме того, обнаружились якобы различия и в проявлении вербального фактора. У девочек это — чисто вербальный фактор, а у мальчиков он скорее должен быть назван фактором вербального рассуждения (как «способность манипулировать мыслями в вербальной форме»). Автор предполагает, что поэтому всякого рода словесно-логическая работа мальчиками выполняется с большей легкостью, чем девочками. Другое факторное исследование, проведенное на десятилетие позже — в 1951 г. (Б. Мак-Аллистер [651]), также обнаружило некоторые различия между мальчиками и девочками. В формальной стороне арифметических операций достижения были примерно одинаковы, но мальчики обнаружили превосходство над девочками в двух тестах — в одном из тестов на общий интеллект и в одном из тестов на арифметическое рассуждение.

В большом обобщающем труде по дифференциальной психологии А. Анастаси (1958 г.) приводятся данные, показывающие, что мальчики превосходят девочек в тестах на вычислительные операции и в тестах на арифметические рассуждения, причем этой разницы не наблюдается в элементарной школе, а в средней школе и особенно в колледжах она становится весьма заметной [514, стр. 476—477]. Наконец, упомянем опубликованную в 1956 г. статью Ф. Отиа [614], где приводятся результаты экспериментов на несложное математическое рассуждение. Мальчики превосходили девочек по уровню решения — большее в процентном отношении число мальчиков, чем девочек, решило задачу на более высоком, обобщенном уровне.

Обобщая результаты всех этих исследований, можно сказать, что, по их данным, мальчики превосходят девочек в способности к логическому рассуждению, а девочки — мальчиков в точности, строгости, аккуратности, своего рода «педантичности» мышления. Остается, конечно, открытым вопрос, насколько эти данные достоверны и насколько эти особенности являются «природными» — на это указывают и сами исследователи.

Мы должны сказать со всей определенностью, что наше исследование, а также исследования И. В. Дубровиной и С. И. Шапиро не обнаружили каких-либо качественных, специфических особенностей в математическом мышлении мальчиков и девочек. Не указали на эти различия и опрошенные нами учителя.

Разумеется, фактически мальчики чаще обнаруживают математические (равно как и технические) способности. В младших классах это почти незаметно, в старших становится весьма ощутимым. Победителями в математических олимпиадах чаще бывают мальчики, чем девочки, больше их учится и в специальных математических школах и классах. В физико-математическом классе школы № 6 г. Курска, где преподавал и вел эксперименты С. И. Шапиро, учились 21 юноша и 9 девушек. В физико-математической школе-интернате при МГУ из 357 человек было всего 38 девочек (данные А. В. Зосимовского [131]), окончили эту школу в 1966 г. 91 юноша и 10 девушек¹. В московской школе № 2 (с математическим уклоном) училось 637 мальчиков и 260 девочек. Среди экспериментально исследованных нами очень одаренных детей было 14 мальчиков и всего 2 девочки.

Но это фактическое различие, как нам кажется, надо отнести за счет разницы в традициях, в воспитании мальчиков и девочек, за счет распространенного взгляда на мужские и женские профессии. Это приводит к тому, что математика часто оказывается вне направленности интересов девочек. По крайней мере сегодня мы не располагаем никакими данными, которые обязали бы нас сделать иной вывод.

Глава VIII

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ И ЛИЧНОСТЬ

Как уже отмечалось выше, успешность осуществления математической деятельности требует определенного сочетания качеств личности.

Одни способности сами по себе, не сочетающиеся с соответствующей общей направленностью личности, направленностью ее эмоционально-волевой сферы, не могут привести к высоким достижениям даже при наличии способностей высокого уровня.

Зарубежные исследования идут главным образом по линии изучения одаренных детей с целью выявления особенностей их личности в сравнении с обычными, «средними» детьми.

С конца XIX в. и примерно до 1920 г. в психологической литературе США доминировало мнение о том, что одаренные дети уступают обычным, нормальным средним детям во всех отношениях, кроме интеллекта. Высокая одаренность в умственной сфере якобы органически сочетается у них с рядом дефектов в эмоционально-волевой и социальной сферах (см. В. Барб [521]; Г. Картер [548]; П. Витти [738]). Одаренные дети якобы физически слабы, хилы и малопривлекательны, эмоционально неустой-

¹ «Вечерняя Москва» 20/VI, 1966.

чивы, склонны к неврозам, в характере их заметна эксцентричность, черты анархизма и индивидуализма.

Дальнейшие исследования не только не подтвердили этого, но привели к установлению почти во всех отношениях обратной картины. Эти исследования, начиная с тридцатых годов, стали носить менее описательный и более активно-исследовательский характер, направленный на изучение определенных сторон личности. Например, Д. Брей [531] выделил 3 фактора, определяющие выдающиеся достижения, — способности, личностные факторы и благоприятное стечение обстоятельств. В. Абрахам [508] специально изучал отношение к деятельности, интересы как источник творческой активности школьников, К. Джамуар [617], [618] — социальные черты личности одаренных детей, а также ее эмоциональную сторону, Д. Холланд [609] — черты характера одаренных подростков.

Многочисленные исследования, среди которых в первую очередь надо отметить работы Л. Холлингворт [611], [612], Л. Термена [710], П. Витти [733], показали, прежде всего, что физическое развитие, здоровье одаренных учащихся, их «физический стандарт» выше среднего уровня. Д. Бентли [527, стр. 15—16] утверждал, что имеется положительная корреляция между физическими параметрами тела и здоровьем, с одной стороны, и уровнем интеллекта — с другой. Е. Мартенс [648] указывал на большую социальную приспособленность одаренных детей, Л. Холлингворт — на их большую «кооперативность». Многие исследователи отмечали большую эмоциональную стабильность и психическую уравновешенность одаренных детей, живость характера, чувство юмора, оригинальность, любознательность и пытливость, отмечалась также привлекательность черт их характера и темперамента, их «большая склонность к правильному поведению»; они превосходят обычных детей в отношении вежливости, дисциплинированности, самокритичности, самостоятельности, отзывчивости, они более заслуживают доверия. Отмечалась и такая черта: вследствие опережающего возраст развития порой возникает отчужденность одаренных детей от их сверстников — они тянутся к детям более старшего возраста или склонны к одиночеству.

В Советском Союзе разные стороны личности, образующие со способностями единый «ансамбль» свойств, обеспечивающий высокие достижения, особенно плодотворно изучаются ленинградскими психологами — Б. Г. Ананьевым, А. Г. Ковалевым, В. Н. Мясищевым и другими.

Исследуя математические способности, мы в течение продолжительного времени изучали, как уже отмечалось, группу очень одаренных к математике детей разного возраста, причем изучались и их личностные проявления. Выше были приведены характеристики некоторых из этих детей. Эти характеристики, биогра-

фические данные ряда крупных ученых-математиков, ответы на некоторые вопросы анкеты, которая была распространена среди учителей и ученых-математиков, а также материалы опубликованных исследований позволяют довольно четко выделить и охарактеризовать те стороны личности, которые необходимы для успешной работы в области математики. Ниже дается характеристика этих особенностей.

С. Л. Рубинштейн подчеркивал, что «для формирования любой сколько-нибудь значительной способности нужно прежде всего создать жизненную потребность в определенном виде деятельности» [351, стр. 294]. Это положение целиком относится и к математическим способностям.

Прежде всего следует отметить характеризующее способных математиков и совершенно необходимое для успешной деятельности в области математики «единство склонностей и способностей в призвании» (В. Н. Мясищев [304, стр. 17—18]), выражающееся в избирательно-положительном отношении к математике, наличии глубоких и действенных интересов в соответствующей области, стремлении и потребности заниматься ею, страстной увлеченности делом. Подобного рода склонность как потребность в математической деятельности является сильнейшей побудительной силой развития способностей (В. Н. Мясищев [303, стр. 13]). Нельзя стать творческим работником в области математики, не переживая увлеченности этой работой — она порождает стремление к поискам, мобилизует трудоспособность, активность. Без склонности к математике не может быть подлинных способностей к ней. Если ученик не чувствует никакой склонности к математике, то даже хорошие способности вряд ли обеспечат вполне успешное овладение математикой. Роль, которую здесь играют склонность, интерес, сводится к тому, что интересующийся математикой человек усиленно занимается ею, а следовательно, энергично упражняет и развивает свои способности. На это указывают постоянно сами математики, об этом свидетельствуют вся их жизнь и творчество; способности всегда связаны со склонностью — «избыток силы всегда стремится проявиться», — писал математик Д. Мордухай-Болтовский [300, стр. 507].

Большое значение в плане рассматриваемого вопроса имеет плодотворно разрабатываемое Н. Ф. Добрыниным понятие значимости для человека той или иной деятельности [117], [118], [119], [120]. Жизненная, общественная значимость той или иной деятельности, осознаваемая и переживаемая человеком, становится для него личной значимостью. Влияние значимости на процесс обучения, на процесс формирования способностей на математическом (геометрическом) материале показали Г. В. Воробьев [73], А. В. Степанов [394].

Изучая роль эмоционально-положительного отношения к деятельности в учебной работе школьников, Ю. А. Самарин [360],

[361] отмечает, что «нет ничего хуже, чем состояние равнодушия» [361, стр. 82]. Человек, обладающий способностями при отсутствии интереса к соответствующей деятельности, даст меньше, чем человек с обостренным интересом к деятельности, не обладающий сколько-нибудь яркими способностями к ней (А. А. Люблинская [266]).

Исследования А. А. Бодалева [46], [47], [49] показали на конкретном материале, что отношение учащегося к учебному предмету накладывает определенный отпечаток на особенности его восприятия, мышления, памяти, воображения. Отсутствие же у учащихся такого отношения препятствовало развитию имеющих у них способностей к этой деятельности.

Специальное изучение влияния как положительного, так и негативного отношения к математике на успешность математической деятельности проводилось и за рубежом. Интересна в этом отношении работа Л. Эйкена и Р. Дрегера, относящаяся к 1961 г. [512], где изучалось влияние «эффекта отношения к математике» на успешность в этой области. Результаты тестовых исследований сопоставлялись с успеваемостью по математике в школе и материалами анкеты-опросника, где выявлялось отношение к математике (любовь или нелюбовь к ней, приносит ли решение задач удовлетворение или преобладает безразличное отношение и т. д.). Корреляционный анализ показал соответствующую зависимость всех трех показателей. Влияние положительного отношения к математической деятельности на ее успешность изучали также К. Браун и Ф. Джонсон [535] и получили в общем аналогичные данные.

Составленные нами характеристики одаренных учащихся ярко свидетельствуют о том, что способности действительно развиваются только при наличии склонностей или даже своеобразной потребности в математической деятельности (в относительно элементарных ее формах). Все без исключения наблюдаемые нами дети обладали, как это можно видеть из характеристик, обостренным интересом к математике, склонностью заниматься ею, ненасытным стремлением к приобретению знаний по математике, решению задач.

Но если способности, как правило, связаны со склонностью, то это не носит все-таки характера всеобщего закона. Ошибочно было бы, скажем, диагностировать наличие или отсутствие способностей по тому, имеется ли и как ярко выражена склонность к соответствующему виду деятельности. В отдельных случаях здесь может быть и расхождение. Об этом писал еще А. Ф. Лазурский, на это указывают и Н. Д. Левитов [245], В. Н. Мяснищев [301], [305], А. А. Бодалев [47].

В школе нередко встречаются такие случаи: способный к математике ученик мало интересуется ею и не проявляет особых успехов в овладении этим предметом. Но если учитель сумеет

пробудить у него интерес к математике и склонность заниматься ею, то такой ученик, «захваченный» математикой, может быстро добиться больших успехов. Подобные случаи имели место и в жизни известных ученых-математиков (Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, Н. Н. Лузин и другие).

Однако, повторяем, неизмеримо чаще в практике приходится наблюдать случаи совпадения способностей и интересов, склонностей: склонность заниматься определенной деятельностью приводит к упражняемости и соответственному развитию способностей, развивающиеся способности положительно влияют на успешность деятельности, а успех, в свою очередь, «подкрепляет» склонности и интересы.

В. И. Ленин писал: «Без «человеческих эмоций» никогда не бывало, нет и быть не может человеческого искания истины» [7, стр. 112]. Переживаемые человеком эмоции являются важным фактором развития способностей к любой деятельности, не исключая и математической. Радость творчества, чувство удовлетворения от напряженной умственной работы, эмоциональное наслаждение этим процессом повышают умственный тонус человека, мобилизуют его силы, заставляют преодолевать трудности. Равнодушный человек не может быть творцом. Все изученные нами одаренные дети отличались глубоким эмоциональным отношением к математической деятельности, переживали настоящую радость, вызванную каждым новым достижением. Как правильно отмечают Д. Н. Богоявленский и Н. А. Менчинская [44, стр. 267—268], это радостное чувство маленького открытия не сводится только к переживанию успешного результата, а включает в себя чувство удовлетворения от сознания, что успешно преодолены трудности, что самостоятельные усилия привели к цели.

Большое значение в математическом творчестве имеют своеобразные эстетические чувства. Известный математик А. Пуанкаре писал о подлинно эстетическом чувстве, которое переживают математики, — чувстве математической красоты, гармонии чисел и форм, о чувстве геометрического изящества [498, стр. 18]. «Математик творит, потому что красота мыслительных построений приносит ему радость», — писал Г. Ревеш [676]. Это переживание изящества решения было очень характерным для наблюдаемых нами способных учащихся. «Красивое решение!», «Вот этот прием, как хорошая шахматная комбинация, вызывает у меня чувство удовольствия», — говорили школьники. И весь их облик свидетельствовал о переживаемом ими эстетическом чувстве — их глаза радостно блестели, они довольно потирали руки, смеялись, приглашали друг друга полюбоваться остроумным ходом мысли, особенно «изящным» решением.

Возможность полного и интенсивного развития математических способностей, как и способностей вообще, всецело зависит

от уровня развития характерологических черт, особенно волевых черт характера. Как показал Б. Г. Ананьев [19], имеет место взаимосвязь в развитии способностей и характера. Это же касается и математической деятельности — в процессе ее формируются и развиваются математические способности, в процессе этой же деятельности складываются и характерологические черты. Влияние характерологических черт на развитие способностей изучала в свое время В. Е. Сыркина [398]. Здесь, в первую очередь, надо указать на целеустремленность, упорство, настойчивость.

Ученого-математика характеризует и такая черта, как инициативность, чувство нового. Новое в науке рождается в борьбе

со старым, отжившим. Новатор в науке «не только конструирует нечто новое, но и разрушает старое» (М. С. Бернштейн [40]).

Разумеется, все сказанное выше о характерологических чертах ученого-математика надо понимать в том смысле, что указанные черты могут проявляться избирательно, только в математической деятельности, не характеризуя других сторон его жизни и деятельности. Совершенно правильно указывают А. Г. Ковалев и В. Н. Мясищев [174, стр. 147], что ученый, в том числе и математик, может иметь слабую волю, плохую работоспособность, быстро утомляться, но в математической деятельности он же может проявлять совсем другие черты: высокую организованность, настойчивость, работоспособность.

Еще одна черта характера свойственна подлинному ученому — критическое отношение к себе, своим возможностям, своим достижениям, скромность, правильное отношение к своим способностям. Надо иметь в виду, что при неправильном отношении к способному школьнику — захваливании его, чрезмерном преувеличении его достижений, афишировании его способностей, подчеркивании его превосходства над другими — очень легко внушить ему веру в свою избранность, исключительность, заразить его «стойким вирусом зазнайства». Одно время наша печать злоупотребляла заметками под броскими и крикливыми заголовками типа: «Школа будущих Ломоносовых», «Поиск Ломоносовых продолжается». Открылась в Москве школа юных математиков, и названа она в газетной заметке школой будущих Ломоносовых¹. Следовательно, каждый ученик может считать: «Я — будущий Ломоносов!» А одна из публикаций об учащихся математической школы шла под таким заголовком: «Сто двадцать Ньютонов» [438, стр. 59]. Никто не подумал о том, как это может отразиться на 14—15-летнем подростке, принимая во внимание, что это как раз тот возраст, когда происходит интенсивное становление личности, формирование отношения к себе и другим².

И наконец, последнее. Математическое развитие человека невозможно без повышения уровня его общей культуры. Нужно всегда стремиться к всестороннему, гармоничному развитию личности. Своеобразный «нигилизм» ко всему, кроме математики, резко одностороннее, «однобокое» развитие способностей не могут способствовать успешности в математической деятельности.

¹ «Московская правда», 6/XI 1963.

² Эта книга уже была сдана в издательство, когда в «Вечерней Москве» от 13/VII 1966 г. появилась заметка «Школа будущих Лобачевских», где деловито сообщалось, что в столичной школе-интернате № 18 «воспитывают будущих Лобачевских и Эйнштейнов».

Глава IX

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

§ 1. Общая схема структуры. Взаимоотношение компонентов

Собранный нами экспериментальный и неэкспериментальный материал, изучение специальной литературы позволяют говорить о компонентах, занимающих существенное место в структуре такого интегрального качества ума, как математическая одаренность.

Общая схема структуры математических способностей в школьном возрасте представляется нам следующим образом (рассматривать ее будем, как и ранее, исходя из основных этапов решения задач):

1. Получение математической информации

- а) Способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи.

2. Переработка математической информации

- а) Способность к логическому мышлению в сфере количественных и пространственных отношений, числовой и знаковой символики. Способность мыслить математическими символами.

- б) Способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий.

- в) Способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий. Способность мыслить свернутыми структурами.

- г) Гибкость мыслительных процессов в математической деятельности.

- д) Стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений.

- е) Способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении).

3. Хранение математической информации

- а) Математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).

4. Общий синтетический компонент

а) Математическая направленность ума.

Выделенные компоненты тесно связаны, влияют друг на друга и образуют в своей совокупности единую систему, целостную структуру, своеобразный синдром математической одаренности, математический склад ума.

Не входят в структуру математической одаренности те компоненты, наличие которых в этой структуре не обязательно (хотя и полезно). В этом смысле они являются нейтральными по отношению к математической одаренности. Однако их наличие или отсутствие в структуре (точнее, степень развития) определяют тип математического склада ума. Не являются обязательными в структуре математической одаренности следующие компоненты:

1. Быстрота мыслительных процессов как временная характеристика. Индивидуальный темп работы не играет решающего значения. Математик может размышлять неторопливо, даже медленно, но очень обстоятельно и глубоко.

2. Вычислительные способности (способности к быстрым и точным вычислениям, часто в уме). Известно, что есть люди, способные производить в уме сложные математические вычисления (почти мгновенное возведение в квадрат и куб трехзначных чисел, извлечение кубического корня из шестизначных чисел), но не умеющие решить сколько-нибудь сложной задачи. Известно также, что существовали и существуют феноменальные «счетчики», не давшие математике ничего, а выдающийся французский математик А. Пуанкаре писал о себе, что без ошибки не может сделать даже сложения.

3. Память на цифры, числа, формулы. Как указывал академик А. Н. Колмогоров, многие выдающиеся математики не обладали сколько-нибудь выдающейся памятью такого рода.

4. Способность к пространственным представлениям.

5. Способность наглядно представить абстрактные математические отношения и зависимости.

Следует подчеркнуть, что схема структуры математических способностей имеет в виду математические способности школьника. Нельзя заранее, до специального изучения, сказать, в какой мере ее можно считать общей схемой структуры математических способностей, в какой мере ее можно отнести к вполне сложившимся одаренным математикам.

Разумеется, конкретное содержание структуры способностей в немалой степени зависит от методов обучения, так как она складывается в процессе обучения. Но установленные нами компоненты при всех условиях должны входить в эту структуру. Невозможно представить, например, чтобы при какой-либо систе-

ме обучения способность к обобщению или математическая память не входили в структуру математических способностей.

Анализируя схему структуры математической одаренности, мы можем заметить, что определенные моменты в характеристике перцептивной, интеллектуальной и мнемической сторон математической деятельности имеют общее значение. Например, формализованное восприятие задачи — это восприятие обобщенное, свернутое, гибкое; математическая память — это память на обобщенные, свернутые и гибкие системы. Если мы говорим о формализованном (обобщенном) восприятии условий задачи, то можно говорить и о формализованном (обобщенном) решении и о формализованном (обобщенном) запоминании. Поэтому развернутую схему структуры можно представить и в иной, чрезвычайно сжатой формуле: математическая одаренность характеризуется обобщенным, свернутым и гибким мышлением в сфере математических отношений, числовой и знаковой символики и математическим складом ума. Эта особенность математического мышления приводит к увеличению скорости переработки математической информации (что связано с заменой большого объема информации малым объемом — за счет обобщения и свертывания) и, следовательно, экономии нервно-психических сил (см. также С. Тейлор и Ф. Баррон [707]). В терминах ассоциативной теории это звучало бы так: математические способности — это способности к образованию на математическом материале обобщенных, свернутых, гибких и обратимых ассоциаций и их систем. Указанные способности в разной степени выражены у способных, средних и неспособных учеников. У способных при некоторых условиях такие ассоциации образуются «с места», при минимальном количестве упражнений. У неспособных же они образуются с чрезвычайным трудом. Для средних же учащихся необходимым условием постепенного образования таких ассоциаций является система специально организованных упражнений, тренировка.

Произведя первоначальный анализ математических способностей, получив представление об их структуре, мы не считаем, что на этом исследование компонентов математических способностей может быть закончено. Необходимо углубленное изучение каждого компонента с целью проникнуть в его природу, выявить его физиологические основы.

Как уже указывалось, компоненты структуры тесно связаны друг с другом, образуют единую систему, целостное образование — математический склад ума. Их тесная связь в процессе решения задач была показана выше на многочисленных примерах. Некоторые компоненты настолько тесно связаны, что это дает основания ряду исследователей предполагать, что они являются разными проявлениями одного и того же свойства. Подобную мысль высказал, например, С. Л. Рубинштейн в отношении

таких компонентов, как обобщение и свертывание [355, стр. 130—131]. В одной из своих работ он пишет, что мера свернутости мыслительных процессов является производным выражением соотношения обобщения и анализа. Мыслительный процесс тем более свернут, чем в большей степени он оперирует уже сложившимися или быстро складывающимися обобщениями [356]. П. А. Шеварев также считает, что свертывание есть следствие обобщения — обобщенные ассоциации являются и свернутыми ассоциациями. Такой же точки зрения придерживается А. М. Матюшкин [280], считающий, что по мере углубления процесса обобщения развернутое действие приобретает новую форму — форму сокращенного действия. Близка к этому и точка зрения П. Я. Гальперина.

Все это верно. Но если одно вытекает из другого, определяется другим, то это не значит, что между ними можно ставить знак равенства. Производное нельзя отождествлять с исходным только на том основании, что оно — производное. Поэтому трудно согласиться с утверждением С. Л. Рубинштейна о том, что, следовательно, «второй показатель не выходит за пределы первого» [356, стр. 9]. Нам кажется, что если один компонент (свертывание) и является производным другого (обобщения), то они все-таки должны рассматриваться как два разных компонента, так как это совершенно разные психологические проявления. Вполне возможно, что и все остальные компоненты формируются на основе первоначально складывающихся — способности к обобщению и математической направленности ума. Но и в этом случае мы должны говорить о различных компонентах математического склада ума, не сводя все их к способности к обобщению и математической направленности ума.

§ 2. Специфичность математических способностей

Возникает вопрос: в какой степени выделенные нами компоненты являются специфически-математическими способностями? Может быть, это общие способности, а специфичной является только математическая направленность ума? Тогда и математические способности не что иное, как общие умственные способности, а математика лишь хорошее «поле» для их проявления? Совершенно так же ставят вопрос в отношении всех специальных научных способностей А. Г. Ковалев и В. Н. Мяснищев: «Может быть, в этом случае (когда говорят о научных способностях. — В. К.) речь идет о здоровом мозге с достаточной пластичностью, деятельность которого направляется, с одной стороны, потребностью в деятельности, а с другой стороны, стечением обстоятельств?» [174, стр. 130].

Рассмотрим с этой точки зрения одну из основных способностей, выделенных нами в структуре математической одаренно-

сти,— способность к обобщению математических объектов, отношений и действий.

Разумеется, способность к обобщению — по природе своей общая способность и обычно характеризует общее свойство обучаемости. На это неоднократно указывала, например, Н. А. Менчинская. Также разумеется, что способность к обобщению является, как отмечал С. Л. Рубинштейн, необходимым компонентом всех способностей, так как способность как свойство личности должна выражаться в действиях, допускающих перенос из одних условий в другие, с одного материала на другой.

Но речь-то идет в данном случае не о способности к обобщению, а о способности к обобщению количественных и пространственных отношений, выраженных в числовой и знаковой символике.

Чем можно аргументировать нашу точку зрения, заключающуюся в том, что способность к обобщению математического материала есть специфическая способность?

Во-первых, тем, что эта способность проявляется в специфической сфере и может не коррелировать с проявлением соответствующей способности в других областях. Об этом говорят биографические данные многих выдающихся талантов — математиков и нематематиков, высказывания специалистов, в частности опрошенных нами ученых-математиков. Академик М. А. Лаврентьев подчеркивал: «Мне в моей жизни не раз доводилось встречаться с людьми, очень способными в какой-то одной определенной области и бездарными в другой. Пожалуй, наиболее резко такой контраст проявляется у людей с ярко выраженными способностями к науке, которая очень близка мне,— в математике» [232, стр. 40]. Иными словами, талантливый математик может быть бездарным в других областях. Математики А. Пуанкаре и Д. Мордухай-Болтовский утверждали, что специфический характер математической способности делает математику доступной не всем [670], [300, стр. 533]. Иными словами, человек, талантливый вообще, может быть бездарным в математике. Д. И. Менделеев в школе отличался большими успехами в области математики и физики и получал нули и единицы по языковым предметам [174, стр. 136]. А. С. Пушкин, судя по биографическим данным, учась в лицее, пролил много слез над математикой, приложил много трудов, но «успехов приметных не оказал».

Правда, есть немало случаев и сочетания математической и, например, литературной одаренности. Математик С. Ковалевская была талантливой писательницей, ее литературные произведения оценивались весьма высоко. Известный математик XIX в. В. Я. Буняковский был поэтом. Английский профессор математики Ч. Л. Доджсон (XIX в.) был талантливым детским писателем, написал под псевдонимом Льюиса Керрола известную книгу

«Алиса в стране чудес». С другой стороны, поэт В. Г. Бенедиктов написал популярную книгу по арифметике. А. С. Грибоедов успешно учился на математическом факультете университета. Известный драматург А. В. Сухово-Кобылин получил математическое образование в Московском университете, проявлял большие способности к математике и за работу «Теория цепной линии» получил золотую медаль. Серьезно интересовался математикой Н. В. Гоголь. М. Ю. Лермонтов очень любил решать математические задачи. Серьезно занимался методикой преподавания арифметики Л. Н. Толстой (И. К. Андронов [23]).

Во-вторых, можно указать на целый ряд зарубежных исследований, которые показали (правда, основываясь только на тестовой методике и корреляционном и факторном анализе) слабую корреляцию между показателем интеллекта (известно, что способность к обобщению — одна из важнейших характеристик общего интеллекта) и тестами на достижения в математике (см. П. Симондс [704], Е. Дункан [560]). Д. Гетцельс и П. Джексон [579], И. Флешер [566] показали такое же несоответствие общей умственной одаренности и творческой одаренности в отдельных областях. По данным Б. Бакингема [537, стр. 213], тесты на интеллект показали наиболее высокую корреляцию с историей (0,54), с английским языком (0,52) и наименьшую — с математикой (0,21). Другое исследование такого же рода дало корреляцию для различных типов школ между тестами на интеллект и оценками по алгебре — 0,25 и 0,38, с оценками по геометрии — 0,40. Д. Гетцельс и П. Джексон в другой своей работе [578] показали, что общий интеллект связан больше со стереотипным мышлением, стандартными действиями, в то время как «высокое творческое начало» имеет тенденцию отклоняться от стереотипного мышления в сторону оригинальности¹.

В-третьих, для обоснования нашей точки зрения можно сослаться на учебные показатели (оценки) детей в школе. Многие учителя указывают, что способность к быстрому и глубокому обобщению может проявляться в каком-нибудь одном предмете, не характеризуя учебной деятельности школьника по другим предметам. Некоторые из наших испытуемых, проявляющих, например, способность к обобщению «с места» в области математики, не обладали этой способностью в области литературы, истории или географии. Имели место и обратные случаи: учащиеся, хорошо и быстро обобщающие и систематизирующие материал по литературе, истории или биологии, не проявляли подобной способности в области математики.

¹ Разумеется, здесь многое зависит от характера самих тестов, которые применялись указанными исследователями для изучения общего интеллекта и творческих способностей. Поэтому безоговорочно принять полученные ими данные нельзя.

А. А. Бодалев в ряде своих работ [46], [48] также отмечает, что уровень обобщающей способности ученика часто не проявляется одинаково в различных областях знаний. А. А. Бодалев делает вывод, что есть категории учащихся, у которых способность к обобщению «с места» может проявляться в сравнительно узкой области. Определенный материал в этом отношении дают и характеристики стиля умственной работы старших школьников, которые составил Ю. А. Самарин [366].

В какой-то, пусть грубо приближенной, степени учебные оценки могут характеризовать и способности учащихся. И с этой точки зрения представляет интерес сопоставление успеваемости учащихся по различным предметам. С этой целью в 1964/65 учебном году в ряде школ г. Москвы были изучены годовые учебные оценки 1086 учащихся с VI по XI класс (32 класса). Взяты были школы с разным уровнем преподавания математики. Мы интересовались случаями резкого расхождения в оценках по математическим и нематематическим предметам (разница в 2 балла между условными средними оценками по математике и нематематическим предметам). В числе учащихся, хорошо успевающих по математике и значительно хуже успевающих по другим предметам, были учащиеся и с такими оценками (первые оценки — по математическим предметам, вторые — по нематематическим): 5, 4 — 3, 3, 3, 2; 3, 3 — 2, 2, 2, 2; 4, 4 — 3, 2, 3, 2. В числе плохо успевающих по математике и значительно лучше по другим предметам — учащиеся и с такими оценками: 2, 3 — 4, 4, 4, 4; 3, 3 — 4, 5, 4, 5; 3, 3 — 5, 5, 5, 5. Сводные данные представим в виде таблицы 26.

Т а б л и ц а 26

Классы	Общее количество учащихся	По математике — хорошая успеваемость, по остальным предметам — значительно хуже	По математике — плохая успеваемость, по другим предметам — значительно лучше
VI	64	—	2
VII	168	10	8
VIII	336	12	19
IX	270	9	11
X	186	3	16
XI	62	3	4
	1086	37 (3,4%)	60 (5,5%)

С. И. Шапиро, изучая учащихся своего IX класса, с помощью учителей других предметов распределил учащихся по группам способностей по математике, физике и литературе (он взял наиболее «близкий» и наиболее «далекый» от математики предметы).

Из 30 учащихся только 16 человек попали в одну группу по математике и литературе, 23 — в одну группу по математике и физике; 12 оказались в одной группе по всем трем предметам. Вычисленный им коэффициент корреляции между способностями к различным предметам оказался таким: математика — физика — 0,75, математика — литература — 0,49; физика — литература — 0,21.

В-четвертых, известный интерес для аргументации нашей точки зрения должна представлять попытка сравнения результатов наших экспериментов на решение математических и нематематических тестов.

Первое такое сравнение было произведено на тестах XV серии. Наряду с математическими тестами на резкую перестройку закрепленной стереотипной системы действий, на переключение с одного способа действий на другой, в этой серии имеется и специальный тест — на резкую перестройку стереотипного действия в условиях нематематической деятельности (работа с корректурными таблицами). Никакой корреляции между успешностью работы по математическим тестам и нематематическому тесту получено не было. По-видимому, обе деятельности абсолютно не коррелируют друг с другом. В ряде случаев наблюдалась обратная корреляция — учащиеся, успешно справившиеся с математическими тестами и обнаружившие большую подвижность мышления в математической деятельности, показывали значительно худшие результаты по специальному тесту и наоборот. Мы не даем более детального анализа по двум причинам. Во-первых, через специальный тест было пропущено пока еще мало учащихся (всего 15 чел.), чтобы делать какие-нибудь определенные выводы, а во-вторых, мы не добились того, чтобы специальный тест выполнялся учащимися с интересом. Некоторые учащиеся выполняли его равнодушно, без особого интереса, указывали на бессодержательность и однообразие действий. В этих условиях, когда не удалось уравнивать фактор интереса, конечно, нельзя придавать большого значения полученным данным. Поэтому мы и не будем делать вывод о том, что задачи XV серии показали специфичность проявления гибкости мыслительных процессов, и оценим полученные результаты как очень ориентировочные и требующие дополнительной проверки.

Более содержательные данные получены по XII серии, тесты которой на нематематическое обобщение связаны с образованием искусственных понятий. Задачи этой серии вызвали интерес у учащихся. Через задачи этой серии было проведено 24 способных учащихся. По среднему показателю решения тестов этой серии были вычислены ранговые места всех 24 испытуемых. Дальше мы решили прибегнуть к следующему приему. Мы рассмотрели матрицу интеркорреляций серий на математическое обобщение (см. стр. 262) и выбрали две пары серий — одна объединяла се-

рии, которые меньше всего коррелируют друг с другом, другая — серии, которые больше всего коррелируют друг с другом. Затем к каждой из этих пар мы «подстраивали» XII серию. Исчислялся коэффициент корреляции ранговых мест 24 испытуемых между результатами серий — XII и каждой из выделенных серий¹. Таким образом, мы получили 2 матрицы интеркорреляций третьего порядка — одна включала XII серию (на обобщение нематематического материала) и две серии на обобщение математического материала, которые меньше всего коррелируют друг с другом, другая — ту же XII серию и две серии, которые больше всего коррелируют друг с другом. Это было сделано для того, чтобы оценить место XII нематематической серии в ряду двух самых «далеких» и двух самых «близких» друг к другу математических серий.

Наименьшая корреляция (см. стр. 262) оказалась между VII и X сериями — 0,37. Была получена следующая матрица интеркорреляций (см. табл. 27).

Таблица 27

Серии	VII	X	XII
VII	—	0,37	0,34
X	0,37	—	0,41
XII	0,34	0,41	—

Таким образом, успешность решения задач этих серий положительно коррелирует друг с другом. Полученные нами коэффициенты корреляции статистически значимы на уровне 0,05. Полученные данные были подвергнуты факторному анализу. Факторизация была проведена на основе однофакторной модели Спирмена.

Результат факторизации по однофакторному решению представим в виде факторной матрицы (см. табл. 28).

Таблица 28

Показатели	Факторные веса по g
VII	0,55
X	0,67
XII	0,61

¹ Формулы все опускаем — они приведены на стр. 247—248. Там же поясняется вся процедура факторного анализа.

Репродуцированная корреляционная матрица совпадает с исходной, остаточные коэффициенты корреляции равны нулю.

Получены значительные, статистически значимые, но не очень высокие веса.

Все три серии имеют значимые веса по общему фактору (общий фактор здесь, конечно, способность к обобщению). Это значит, что общий (единый) фактор для всех этих серий имеет место, хотя он выражен и не очень ясно.

Теперь сделаем то же самое с другой парой серий. Наибольшая корреляция (см. стр. 262) оказалась между IX и X сериями — 0,68.

Была получена следующая матрица интеркорреляций (см. табл. 29).

Таблица 29

Серии	IX	X	XII
IX	—	0,68	0,46
X	0,68	—	0,41
XII	0,46	0,41	—

Как видно, успешность решения задач этих серий также положительно коррелирует друг с другом. Полученные коэффициенты корреляции статистически значимы на уровне 0,01 (IX—X серии) и на уровне 0,05 (остальные серии). Полученные данные были подвергнуты факторному анализу (см. табл. 30).

Таблица 30

Показатели	Факторные веса по g
IX	0,87
X	0,78
XII	0,53

Репродуцированная корреляционная матрица совпадает с исходной, остаточные коэффициенты корреляции равны нулю.

Получены статистически значимые веса. IX и X серии имеют очень высокие веса по общему фактору. XII серия, хотя и имеет значимый вес, но она все-таки явно выпадает. Совершенно определенно факторную матрицу можно интерпретировать следующим обра-

зом: на решении всех трех серий сказывается, конечно, общий фактор (общая способность к обобщению), но IX и X серии явно

объединяются, и в пределах их действует групповой фактор (который не предусмотрен моделью Спирмена). Этот групповой фактор по всем данным и есть способность к обобщению математического материала.

Итак, XII серия «вписывается» в группу серий на математическое обобщение на уровне наименьшей корреляции между этими сериями. Общий вывод можно было бы сформулировать следующим образом: способность к обобщению как общая способность сказывается на решении всех тестов на обобщение — и математических, и нематематических, но математические тесты объединяет что-то вроде группового фактора. В этом нас убеждает еще и тот факт, что, чем способнее учащиеся, тем меньшая корреляция имеет место между показателями решения тестов на обобщение математического материала и показателями решения тестов XII серии. Следующей нашей задачей будет проверить это предположение — провести большую группу испытуемых через все 8 тестов на обобщение и провести факторизацию на основе бифакторной модели Холзингера (см. Б. М. Теплов [410]).

В-пятых, важной аргументацией в пользу нашего предположения о специфичности математических способностей, в частности способности к обобщению математического материала, являются опыты И. В. Дубровиной [122], [123]. И. В. Дубровина специально разработала для младших школьников ряд серий задач на обобщение нематематического материала (на материале русского языка, литературы, неучебном материале).

Поскольку не было достаточных оснований считать, что серии на обобщение математического и нематематического материала представляют одинаковые трудности для учащихся, основной анализ шел по линии обучаемости — выяснялось, как успешно продвигались учащиеся в области формирования способности к обобщению математического и нематематического материала.

В таблице, составленной И. В. Дубровиной [122], представлены сводные результаты выполнения задач на обобщение математического и нематематического материала. Данные приводятся в процентах ко всему количеству учащихся определенной группы способностей (см. табл. 31).

Если мы сравним результаты обобщения математического и нематематического материала учащимися двух крайних групп — ОС и МС, то увидим, что все дети группы ОС обобщают математический материал на V уровне, а при обобщении нематематического материала нередко опускаются до III уровня. Дети группы МС производят обобщение математического материала на самом низком, I уровне, а при обобщении нематематического материала могут подниматься до IV уровня.

Если у основной массы младших школьников (средние по способностям школьники не показаны в таблице) способность к обобщению выступает как общая способность, у детей, весьма

Таблица 31

Группа	Серии	Типы задач	Уровни обобщения				
			I (низший)	II	III	IV	V (высший)
Очень способные к математике	Математические	A					100
		Б					100
		В					100
		Г					100
	Нематематические	a				37,5	62,5
		б			25	62,5	12,5
		в			25	62,5	12,5
		г				75	25
Способные к математике	Математические	A				38	62
		Б				42	58
		В				46	54
		Г				39	61
	Нематематические	a				23	77
		б				46	54
		в				46	54
		г				38	62
Малоспособные к математике	Математические	A	83	17			
		Б	83	17			
		В	100				
		Г	100				
	Нематематические	a	58,3	16,7	25		
		б	42	8	42	8	
		■	42	12,5	33	12,5	
		г	50	17	33		

способных к математике, уже в этом возрасте (III—IV классы), наблюдается заметное превалирование обобщения в математической сфере над обобщением в других областях (даже при хорошем развитии последнего). Эти «ножницы» заметно увеличиваются от начала III к концу IV класса. Способные к математике младшие школьники обнаруживают значительно более эффективное продвижение, легкую обучаемость в области обобщения

лессы)
темати-
при хо-
величч.
матные
эффек-
щения

лэссы)
темати-
при хо-
велич.
матные
эффек-
щения

лэссы)
темати-
при хо-
велич.
матные
эффек-
щения

лэссы)
темати-
при хо-
величч.
матные
эффек-
щения

§ 3. Некоторые соображения о природе математических способностей

Частично соображения по вопросу о врожденности и приобретенности математических способностей, о роли задатков были изложены нами в соответствующих главах первого раздела книги. Напомним, что наша позиция по этому вопросу сводится к тому, что математические способности не врожденные, а приобретенные в жизни свойства, причем формирование этих свойств происходит на основе определенных задатков. Роль задатков различна, в зависимости от того, о каких способностях идет речь,—эта роль минимальна в случаях развития обычных способностей к математике, и эта роль исключительно велика, когда речь идет о случаях выдающейся математической одаренности ученых-математиков.

Материалы нашего исследования — анализ многочисленной литературы, анализ случаев чрезвычайно высокой математической одаренности в детском и зрелом возрастах (последнее — по биографическим материалам) позволяют выделить некоторые факты, представляющие особый интерес для постановки вопроса о природе математической одаренности. Эти факты таковы: 1) частое (хотя и не обязательное) весьма раннее формирование способностей к математике, нередко в неблагоприятных условиях (например, при явном противодействии родителей, опасавшихся столь раннего яркого проявления способностей) и при отсутствии на первых порах систематического и целенаправленного обучения; 2) острый интерес и склонность к занятиям математикой, также часто проявляющиеся в раннем возрасте; 3) большая (и часто избирательная) работоспособность в области математики, связанная с относительно малой утомляемостью в процессе напряженных занятий математикой, и 4) характеризующая очень способных к математике людей математическая направленность ума как своеобразная тенденция воспринимать многие явления через призму математических отношений, осознавать их в плане математических категорий.

Все это позволяет выдвинуть гипотезу о роли прирожденных функциональных особенностей мозга в случаях особой (подчеркиваем это!) математической одаренности — мозг некоторых людей своеобразно ориентирован (настроен) на выделение из окружающего мира раздражителей типа пространственных и числовых отношений и символов и на оптимальную работу именно с такого рода раздражителями. В ответ на раздражители, имеющие математическую характеристику, связи образуются относительно быстро, легко, с меньшими усилиями и меньшей затратой сил. Аналогично, неспособность к математике (имеются в виду также крайние случаи) имеет своей

первопричиной большую затрудненность выделения мозгом раздражителей типа математических обобщенных отношений, функциональных зависимостей, числовых абстрактов и символов и затрудненность операций с ними. Иными словами, некоторые люди обладают такими прирожденными характеристиками строения и функциональных особенностей мозга, которые крайне благоприятствуют (или, наоборот, весьма неблагоприятствуют) развитию математических способностей.

И на сакраментальный вопрос: «Математиком можно стать или им нужно родиться?» — мы гипотетически ответили бы так: «Обычным математиком можно стать; выдающимся, талантливым математиком нужно и родиться». Впрочем, здесь мы не оригинальны, — многие выдающиеся ученые утверждают это же. Мы уже приводили слова академика А. Н. Колмогорова: «Талант, одаренность... в области математики... даны от природы не всем». О том же говорит и академик И. Е. Тамм: «Творить новое... под силу только специально одаренным людям»¹ (речь идет о научном творчестве высокого уровня. — В. К.).

Все это сказано пока лишь в порядке гипотезы. Мы предполагаем, что проверка этой гипотезы может идти по следующим основным направлениям, тем более что накоплены физиологические факты, в какой-то мере проясняющие этот вопрос:

1. Дальнейшее развитие положения, выдвинутого Б. М. Тепловым, о том, что наряду с общими типологическими свойствами, характеризующими нервную систему в целом, существуют и более частные типологические свойства, характеризующие работу отдельных областей коры, разных систем мозга, разных анализаторов, которые могут быть отнесены к задаткам, лежащим в основе специальных способностей [250, стр. 87], [407, стр. 74—75]. Как мы предположили, вероятно, можно говорить и о своего рода парциальности свойств нервных процессов (в частности, силы) человека применительно к характеру той или иной его деятельности. Выше мы уже попытались показать, что основные характеристики силы нервных процессов (умственная выносливость, работоспособность, высокая сопротивляемость утомлению, способность к длительному поддержанию напряжения, сосредоточенность и т. д.) у особо одаренных к математике детей и-slotочившихся, зрелых математиков могут относиться только к их математической деятельности и не характеризовать их других проявлений. Это значит, что сила нервных процессов получает одну характеристику в процессе математической деятельности и другую — в других видах деятельности или, вообще говоря, разную характеристику в зависимости от характера деятельности.

2. Развитие учения о специализации функций различных участков мозговой коры. А. Р. Лурия успешно разрабатывает

¹ Акад. И. Е. Тамм. Поиск талантов. «Известия», 3/1 1962.

учение о том, что «различные участки мозговой коры... имеют свои строго специализированные функции» [263, стр. 116]. В книге А. Р. Лурии «Мозг человека и психические процессы», изданной в 1963 г. [265], в его разных публикациях последнего времени [263], [264] приводятся интересные материалы, имеющие отношение к рассматриваемому вопросу. Например, в одной из статей («Мозг и психика») А. Р. Лурия пишет: «При поражении затылочно-теменных отделов мозговой коры левого полушария нарушается... оперирование геометрическими отношениями, счет в уме» [263, стр. 116]. В другой работе он поясняет, что в затылочно-теменной области находятся корковые аппараты зрительно-пространственного анализа и синтеза [265, стр. 51].

Большой интерес в этом плане представляет исследование А. А. Генкина, о котором он доложил на конференции по проблеме способностей в Ленинграде летом 1960 г. в докладе «Психоневрологический подход к изучению неспособности к математике» [85].

Электрофизиологические исследования А. А. Генкина показали, что «оперирование неспособных к математике учащихся математическими символами» вызывает сравнительно большую реакцию зрительных областей коры по сравнению с нижнетеменной областью, тогда как «согласно с неврологическими представлениями именно реакция нижнетеменной области является адекватной для оперирования с символами» [85, стр. 43—44]. Далее, автор указывает, что у учащихся, нормально усваивающих математику, в этих же условиях наблюдалась преимущественно реакция нижнетеменной доли. Все это дало А. А. Генкину возможность выдвинуть гипотезу такого рода: при ярко выраженной неспособности к математике наблюдается низкий уровень функциональной зрелости нижнетеменной области коры и ее связей с другими отделами мозга.

3. Интерес может представить и третье направление, пока еще слабо разрабатывающееся. С. И. Шапиро и Л. И. Уманский в статье «О применении теории информации к изучению способностей человека» сформулировали проблему в следующем виде: «Для людей одного возраста и примерно одинаковой тренированности существует та или иная средняя величина, характеризующая способность их каналов к извлечению, проведению и хранению определенного вида информации. В этом отношении имеются и значительные индивидуальные различия — способности» [436, стр. 76].

Выяснение физиологической природы математических способностей является важной задачей дальнейших исследований в этой области. Современный уровень развития психологии и физиологии вполне позволяет поставить вопрос о физиологической природе и физиологических механизмах некоторых специфических способностей человека.

- ЛИ
1. К. А.
 2. К. М.
 - издат, 1956.
 3. К. М.
 4. Ф. З.
 5. В. И.
 6. В. И.
 7. В. И.
 8. В. И.
 9. В. И.
 10. В. И.
 11. В. И.
 12. В. И.
 - ПСС, т. 39.
 13. «Пр
 - политиздат,
 14. Аг
 - ков. Четвер
 - пединститут
 15. Аг
 - май, июнь
 16. Ай
 - 1964, № 1.
 17. Ал
 - № 116.
 18. Ал
 - средней шк
 - Канд. дисс.
 19. Ан
 - тера. «Докл
 - АПН РСФС
 20. Ан
 - «Проблемы
 21. Ан
 - способности
 22. Ан
 - тематически
 23. Ан
 - тического об
 24. Ан
 - учпедгиз, 19
 - 26 Заказ 639

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Маркс. Капитал, т. I, Госполитиздат, М., 1955.
2. К. Маркс и Ф. Энгельс. Из ранних произведений. М., Госполитиздат, 1956.
3. К. Маркс и Ф. Энгельс. Немецкая идеология. Соч., т. 3.
4. Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. М., Госполитиздат, 1953.
5. В. И. Ленин. Еще одно уничтожение социализма. ПСС, т. 25.
6. В. И. Ленин. Либеральный профессор о равенстве. ПСС, т. 24.
7. В. И. Ленин. Рецензия. ПСС, т. 25.
8. В. И. Ленин. Государство и революция. ПСС, т. 33.
9. В. И. Ленин. Как организовать соревнование? ПСС, т. 35.
10. В. И. Ленин. Очередные задачи Советской власти. ПСС, т. 36.
11. В. И. Ленин. Речь на собрании уполномоченных. ПСС, т. 37.
12. В. И. Ленин. Итоги партийной недели в Москве и наши задачи ПСС, т. 39.
13. «Программа Коммунистической партии Советского Союза». М., Госполитиздат, 1962.
14. Агаев Ш. С. Развитие геометрических представлений у школьников. Четвертая объединенная научная конференция физиологов закавказских пединститутов. Тезисы докладов. Ереван, 1957.
15. Аграновский А. Письма из Казанского университета. «Известия», май, июнь 1960.
16. Айдарова Л. О способных и «неспособных». «Семья и школа», 1964, № 1.
17. Александров А. Воспитатели талантов. «Известия», 16/V 1963, № 116.
18. Александров В. А. Преподавание начал алгебры в 6 классах средней школы и развитие математического мышления на уроках алгебры. Канд. дисс. М., 1956.
19. Ананьев Б. Г. О взаимосвязи в развитии способностей и характера. «Доклады на совещании по вопросам психологии личности». М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.
20. Ананьев Б. Г. О соотношении способностей и одаренности. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
21. Ананьев Б. Г. Формирование одаренности. Сб. «Склонности и способности». Л., Изд-во ЛГУ, 1962.
22. Андреевский Н. В. Методы, формы и содержание работы математических кружков по элементарной математике. Канд. дисс. М., 1950.
23. Андронов И. К. Деятельность Л. Н. Толстого в области математического образования. «Математика в школе», 1960, № 6.
24. Андронов И. К. и Бродис В. М. Арифметика, изд. 2. М., Учпедгиз, 1962.

25. Анохин П. К. Акцептор действия как афферентный аппарат опережающего распространения возбуждений в условном рефлекс. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. 3. М., 1959.
26. Анохин П. К. Новые данные об особенностях афферентного аппарата условного рефлекса. «Материалы совещания по психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.
27. Анохин П. К. Особенности афферентного аппарата условного рефлекса и их значение для психологии. «Вопросы психологии», 1955, № 6.
28. Анохин П. К. Теория функциональной системы как предпосылка к построению физиологической кибернетики. Сб. «Биологические аспекты кибернетики». М., Изд-во АН СССР, 1962.
29. Анохин П. К. Физиология и кибернетика. Сб. «Философские вопросы кибернетики». М., Изд-во социально-экономической литературы, 1961.
30. Антонова Г. П. Индивидуальные особенности мыслительной деятельности младших школьников. «Вопросы психологии», 1965, № 6.
- 30-а. Антонова Г. П. О соотношении индивидуальных различий в мыслительной деятельности школьников и особенностей их высшей нервной деятельности. «Вопросы психологии», 1966, № 1.
31. Аристова Н. П. Самостоятельная работа учащихся на уроках арифметики в V кл. Сб. «Готовить к жизни и труду». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
32. Артемов В. А. Курс лекций по психологии. Гл. 34 «Способности и одаренность», изд. 2. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1958.
33. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике. М., Соцэкгиз, 1963.
34. Афонина С. И. Внеклассная работа по математике в старших классах средней школы. Автореферат канд. дисс. Ташкент, 1952.
35. Балк М. Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике. М., Учпедгиз, 1956.
36. Басyroва Э. Ш. Индивидуально-психологические особенности усвоения геометрических понятий. «Советская педагогика», 1962, № 12.
37. Басyroва Э. Ш. Индивидуальные различия в формировании умственных действий в зависимости от соотношения сигнальных систем. «Вопросы психологии», 1965, № 4.
38. Белый Б. И. К вопросу об эвристическом и лекционном методах обучения математике. «Математика в школе», 1959, № 6.
39. Бернштейн М. С. Обучение и воспитание одаренных детей в США. «Советская педагогика», 1961, № 6.
40. Бернштейн М. С. Психология научного творчества. «Вопросы психологии», 1965, № 3.
41. Битов О. От поиска — к открытию. «Учительская газета», 21/VII 1962.
42. Блонский П. П. Избранные педагогические произведения. М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.
43. Богоявленский Д. Н. Психологические предпосылки развивающего обучения. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
44. Богоявленский Д. Н. и Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
45. Богоявленский Д. Н. Формирование приемов умственной работы учащихся как путь развития мышления и активизации учения. «Вопросы психологии», 1962, № 4.
46. Бодалев А. А. Об учебных способностях подростка и их проявлении. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
47. Бодалев А. А. О соотношении потребности в деятельности и способности к ней у подростка. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. 3. М., 1959.
48. Бодалев А. А. О способностях подростка к обобщениям и их проявлении. Сб. «Склонности и способности». Изд-во ЛГУ, 1962.

49. Бодалев А. А. Попытка изучения «учебных способностей» подростка в связи с его интересами. Сб. «Способности и потребности». «Ученые записки ЛГУ», № 287. Изд-во ЛГУ, 1960.

50. Бойко Е. И. К постановке проблемы умений и навыков в современной психологии. «Советская педагогика», 1955, № 1.

51. Бонгард М. Моделирование процесса узнавания. «Наука и жизнь», 1965, № 6.

52. Борисова М. Н. Исследование явлений относительного преобладания первой и второй сигнальных систем в условиях зрительного запоминания. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.

53. Борисова М. Н. Методика определения соотношения первой и второй сигнальных систем в условиях зрительного запоминания. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.

54. Боцманова М. Э. О роли графического анализа в решении арифметических задач. «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 6.

55. Боцманова М. Э. Психологические вопросы применения графических схем учащимися начальных классов в процессе решения арифметических задач. Сб. «Применение знаний в учебной практике школьников». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.

56. Бочковская О. Т. Об ошибках при самостоятельном решении арифметических задач учащимися и причинах их возникновения. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 2.

57. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М., Учпедгиз, 1959.

58. Брейтерман М. Д. Развитие мышления учащихся при решении задач. «Математика в школе», 1952, № 3.

59. Брушлинский А. В. Исследование направленности мыслительного процесса. Канд. дисс. М., 1964.

60. Брушлинский А. В. Обобщенный замысел в решении задачи. Сообщение I. Мыслительный процесс как реализация обобщенного замысла. «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 5.

61. Брушлинский А. В. Обобщенный замысел в решении задачи. Сообщение II. «Доклады АПН РСФСР», 1961, № 2.

62. Брушлинский А. В. О детерминации мыслительного процесса. «Советская педагогика», 1965, № 10.

63. Бударный А. А. Преодолевать неуспеваемость. Приложение к журн. «Народное образование», 1963, № 10.

64. Бударный А. А. Пути и методы предупреждения и преодоления неуспеваемости и второгодничества. Автореферат канд. дисс. М., 1965.

65. Быкова Н. И. Психолого-педагогическая характеристика ученика III класса в процессе обучения арифметике. Сб. «Пути повышения успеваемости по математике». М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.

66. Ваганов Ш. И. В тесном содружестве. Сб. «За прочные знания по математике». Казань, Татиздат, 1965.

67. Веденов А. В. О формировании способностей школьников к учению. «Начальная школа», 1953, № 6.

68. Виленкин Н. Я. О научном содержании внеклассной работы по математике. «Математика в школе», 1965, № 6.

69. Виноградова А. Д. Понимание и усвоение школьниками IV—VI классов функциональной математической зависимости. «Ученые записки Ленинградского гос. пединститута им. Герцена», т. 96, 1954.

70. Владимирский Г. А. Экспериментальное обоснование системы и методики упражнений в развитии пространственного воображения. «Известия АПН РСФСР», вып. 21, 1949.

71. Власова Т. Н. К вопросу о психолого-педагогических предпосылках осуществления индивидуального подхода как средства активизации мыш-

- ления. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». «Тезисы докладов МГПИ им. Ленина». М., 1964.
72. Вопросы формирования и развития пространственных представлений и пространственного воображения учащихся. «Труды Института методов обучения». «Известия АПН РСФСР», вып. 21, 1949.
73. Воробьев Г. В. Формирование геометрических понятий на основе восприятий и представлений. Автореферат канд. дисс. М., 1951.
74. Воронец А. М., Попов Г. Н. Дети и юноши математики. М. - Л., Госиздат, 1928.
75. «Всесибирская физико-математическая олимпиада». «Наука и жизнь», 1962, № 3.
76. Выготский Л. С. Избранные психологические исследования. М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.
77. Выготский Л. С. Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте. Избранные психологические исследования. М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.
78. Гальперин П. Я. Несколько разъяснений к гипотезе умственных действий. «Вопросы психологии», 1960, № 4.
79. Гальперин П. Я. Опыт изучения формирования умственных действий. «Доклады на совещании по вопросам психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1954.
80. Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий. «Психологическая наука в СССР», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
81. Гальперин П. Я. Управление процессами учения. «Новые исследования в педагогических науках», сб. IV. М., «Просвещение», 1965.
82. Гальперин П. Я. и Талызина Н. Ф. Формирование начальных геометрических понятий на основе организованного действия учащегося. «Вопросы психологии», 1957, № 1.
83. Гаткевич Д. И. Особенности раскрытия семиклассниками существенных отношений в процессе решения математических задач. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». «Тезисы докладов МГПИ им. Ленина». М., 1964.
84. Гельфанд М. Б., Павлович В. С. Внеклассная работа по математике в восьмилетней школе. М., «Просвещение», 1965.
85. Генкин А. А. Психоневрологический подход к изучению способности к математике. Конференция по проблеме способностей. Тезисы докладов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
86. Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. М., Учпедгиз, 1960.
87. Гибш И. А. Активность учащихся как условие, необходимое для работы учителя над повышением качества обучения. «Математика в школе», 1959, № 6.
88. Гибш И. А. Принципы, формы и методы обучения математике. «Известия АПН РСФСР», 1958, № 92.
89. Гибш И. А., Семушин А. Д., Фетисов А. И. Развитие логического мышления учащихся в процессе преподавания математики в средней школе, изд. 2. М., Учпедгиз, 1958.
90. Гинзбург Р. Л. К типологии усвоения учебного материала школьниками. «Вопросы психологии», 1956, № 5.
91. Глушков В. Электронные вычислительные машины и будущее математики. «Наука и жизнь», 1965, № 6.
92. Гнеденко Б. В. О воспитании учителя математики. «Математика в школе», 1964, № 6.
93. Гнеденко Б. В. О перспективах математического образования. «Математика в школе», 1965, № 6.
94. Гнеденко Б. В. Роль математики в развитии техники и производства. «Математика в школе», 1962, № 1.

95. Говоркова А. Ф. Опыт изучения некоторых интеллектуальных умений. «Вопросы психологии», 1962, № 2.
96. Гоноболин Ф. Н. К вопросу о понимании геометрических доказательств учащимися. «Известия АПН РСФСР», вып. 54, 1954.
97. Гоноболин Ф. Н. О творческом труде московского учителя. Моск. гор. институт усоверш. учителей. М., 1957.
98. Гончаров В. Л. Математика как учебный предмет. «Известия АПН РСФСР», вып. 92, 1958.
99. Груденов Я. И. Одна из основных причин слабой успеваемости учащихся 6 класса по геометрии. «Доклады АПН РСФСР», 1962, № 5.
100. Груденов Я. И. О психологических основах построения системы упражнений по математике и методика преподавания геометрии. Канд. дисс. М., 1965.
101. Груденов Я. И. Самостоятельная работа учащихся с учебником при выполнении математических упражнений. «Новые исследования в педагогических науках», сб. IV. М., «Просвещение», 1965.
102. Грузенберг С. О. Гений и творчество. Основы теории и психологии творчества. Изд. П. П. Сойкина, Л., 1924.
103. Гузьяев В. Ф. Пути повышения эффективности обучения решению текстовых алгебраических задач. Сб. «Вопросы перестройки обучения математики в школе». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
104. Гурова Л. Л. Особенности решения арифметических задач неуспевающими учащимися V—VI классов. Автореферат канд. дисс. М., 1953.
105. Гурова Л. Л. Осознание школьниками своих действий при решении арифметической задачи. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 1.
106. Гурова Л. Л. Творческий подход к решению учебных задач и проблема алгоритмизации. Сб. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». (Тезисы). Мос. гор. пединститут им. Ленина, М., 1964.
107. Гурьянов Е. В., Менчинская Н. А., Шеварев П. А. XVIII Международный конгресс прикладной психологии. «Вопросы психологии», 1958, № 4.
108. Гусарская Г. Развивать способности всех учащихся. «Народное образование», 1962, № 2.
109. Гусева В. А. Развитие самостоятельного мышления у учащихся на уроках математики. Сб. «Мыслительная активность учащихся в обучении», под ред. Б. П. Есипова. М., Изд-во АПН РСФСР, 1960.
110. Давыдов В. В. Опыт введения элементов алгебры в начальной школе. «Советская педагогика», 1962, № 8.
111. «Да здравствует математика!» «Неделя», 12—18/I 1964, № 3.
112. Данилова Е. Ф. Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач, изд. 2. М., Учпедгиз, 1961.
113. Депман И. Я. Рассказы о математике. Л., 1954.
114. Добласв Л. П. Мыслительные процессы при составлении уравнений. «Известия АПН РСФСР», вып. 80, 1957.
115. Добролюбов Н. А. Ученики с медленным пониманием. В сб.: Н. Г. Чернышевский и Н. А. Добролюбов. «Избранные педагогические высказывания». М.—Л., Изд-во АПН РСФСР, 1949.
116. Добронравов Б. К. Развитие мышления на уроках математики. Сб. «Труды первой научно-педагогической конференции учителей в г. Ленинграде», Л., Ленгоруно, 1940.
117. Добрынин Н. Ф. Активизация мышления и творческой деятельности в свете принципа значимости. Сб. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». Тезисы докладов МГПИ им. В. И. Ленина. М., 1964.
118. Добрынин Н. Ф. Проблема активности личности и принцип общественной значимости в психологии. «Доклады на совещании по вопросам психологии личности». М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.

119. Добрынин Н. Ф. Проблема значимости в психологии. «Материалы совещания по психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.
120. Добрынин Н. Ф. Проблема усвоения школьниками значимости учебного материала. «Ученые записки МГПИ им. В. П. Потемкина», т. XIX, вып. 4. М., 1958.
121. Добрынина М. Ф. Мыслительные процессы при составлении уравнений. Сб. «Решение задач в средней школе». М., Изд-во АПН РСФСР, 1952.
122. Дубровина И. В. Анализ компонентов математических способностей в младшем школьном возрасте. Канд. дисс. Рукопись. Институт психологии АПН РСФСР.
123. Дубровина И. В. Индивидуальные различия в способности к обобщению математического и нематематического материала в младшем школьном возрасте. «Вопросы психологии», 1966, № 5.
124. Дырченко И. И. Развитие математических способностей учащихся на внеклассных занятиях. Канд. дисс. М., 1963.
125. Есенин-Вольпин А. С. Об аксиоматическом методе. «Вопросы философии», 1959, № 7.
126. Жорикова М. А. Индивидуальные различия, проявляющиеся у учащихся 5 классов при решении арифметических задач. «Вторая республиканская научная конференция по педагогике и психологии». Тезисы докладов. Ташкент, 1959.
127. Жуйков С. Ф. Проблема активизации учащихся в исследованиях по психологии обучения. «Советская педагогика», 1966, № 8.
128. Журавлев Б. О математическом зрении. «Математика в школе», 1940, № 5.
129. Занков Л. В. (ред.). Развитие учащихся в процессе обучения. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
130. Захаров А. Н. Об использовании информации в задачах, решаемых с помощью проб. Сб. «Мышление и речь». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
131. Зосимовский А. В. Интересный эксперимент. «Советская педагогика», 1965, № 6.
132. Зыкова В. И. Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний. М., Учпедгиз, 1955.
133. Зыкова В. И. Психология усвоения геометрических понятий учащимися VI классов. «Известия АПН РСФСР», вып. 61, 1954.
134. Зятловский В. В. Школа юных математиков. «Математика в школе», 1963, № 1.
135. Ибрагимов Р. В. Воспитание интереса учащихся к математике и развитие их математических способностей. Сб. «За прочные знания по математике». Казань, Татиздат, 1965.
136. Ибрагимов Р. В. Задумайся, найди и убедись! «Учительская газета» от 8/VI 1965 г.
137. Иваницына Е. П. Об актуализации знаний при решении геометрических задач. «Доклады АПН РСФСР», 1962, № 2.
138. Иваницына Е. П. Рациональный и иррациональный способы мышления (на материале решения геометрических задач на доказательство). «Вопросы психологии», 1965, № 3.
139. Иванов П. И. Общая психология, гл. XV. Спосособности. Госиздат, «Средняя и высшая школа», Ташкент, УзССР, 1964.
140. Иванов-Смоленский А. Г. Очерки патофизиологии высшей нервной деятельности. М., Медгиз, 1949.
141. Игнатъев Е. Анализ причин неуспеваемости по математике в средней школе. «Математика и физика в школе», 1963, № 3.
142. Игнатъев Е. И. Вопросы психологического анализа процесса рисования. «Известия АПН РСФСР», вып. 25, 1950.
143. Игнатъев Е. И. В царстве смекалки, кн. 1—3, изд. 2. М.—Л., 1924—1925.

144. Игнатьев Е. И., Громов М. Д., Лукин Н. С. Психология, гл. XVIII. Способности. М., «Просвещение», 1965.

145. Индик Н. К. Мыслительные процессы при формировании нового действия. Канд. дисс. М., 1951.

146. Ительсон Л. Б. Математические методы в педагогике и педагогической психологии. Докторская диссертация. Азерб. пединститут им. Ахундова, 1965.

147. Кабанова-Меллер Е. Н. Психологический анализ применения географических понятий и закономерностей. «Известия АПН РСФСР», вып. 28, 1950.

148. Кабанова-Меллер Е. Н. Психология формирования знаний и навыков у школьников (проблема приемов умственной деятельности). М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.

149. Кабанова-Меллер Е. Н. Роль чертежа в применении геометрических теорем. «Известия АПН РСФСР», вып. 28, 1950.

150. Калмыкова З. И. Активизация поисковых путей решения задач как один из ведущих принципов развивающего обучения. «О психологических особенностях творческой активности учащихся». «Тезисы докладов МГПИ им. Ленина». М., 1962.

151. Калмыкова З. И. Зависимость уровня усвоения знаний от активности учащихся в обучении. «Советская педагогика», 1959, № 7.

152. Калмыкова З. И. К вопросу о критериях умственного развития. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

153. Калмыкова З. И. Некоторые приемы диагностики умственного развития в процессе обучения. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся» (Тезисы докладов). М., МГПИ им. Ленина, 1964.

154. Калмыкова З. И. Процессы анализа и синтеза при решении арифметических задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 61, 1954.

155. Калмыкова З. И. Процессы анализа и синтеза при решении арифметических задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 71, 1955.

156. Калмыкова З. И. Психологический анализ формирования понятия о типе задачи. «Известия АПН РСФСР», вып. 12, 1947.

157. Калмыкова З. И. Психологические особенности применения знаний к решению физических задач. «Доклады АПН РСФСР», 1957, № 4.

158. Калмыкова З. И. Темп продвижения как один из показателей индивидуальных различий учащихся. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 6.

159. Калмыкова З. И. Темп продвижения как один из показателей индивидуальных различий учащихся. «Вопросы психологии», 1961, № 2.

160. Калмыкова З. И. Уровни применения знаний к решению физических задач. Сб. «Психология применения знаний к решению учебных задач». М., Изд-во АПН РСФСР, 1958.

161. Калмыкова З. И. Эффективность применения знаний по физике в зависимости от различных условий их усвоения. Сб. «Применение знаний в учебной практике школьников». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.

162. Канин Е. С. Упражнения как средство сознательного овладения алгеброй учащимися 5—7 классов. «Математика в школе», 1965, № 3.

163. Качурин М. Всестороннее развитие личности школьника — задача сегодняшнего дня. Приложение к журн. «Народное образование», 1964, № 10.

164. Кедров Б. Логико-психологический анализ открытия. «Наука и жизнь», 1965, № 12.

165. Киреенко В. И. Исследование основных способностей к рисованию. «Известия АПН РСФСР», вып. 13, 1948.

166. Киреенко В. И. К вопросу об экспериментальных исследованиях художественных способностей. «Доклады на совещании по вопросам психологии личности». М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.

167. Киреенко В. И. О способных и неспособных учениках. «Советская педагогика», 1964, № 9.

168. Киреенко В. И. Психология способностей к изобразительной деятельности. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
169. Киршгольд Л. А. Психолого-педагогические характеристики ученика I класса в процессе обучения арифметике. Сб. «Пути повышения успеваемости по математике». М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.
170. Ковалев А. Г. Диагностика способностей в практике работы учителя. Сб. «Склонности и способности». Л., Изд-во Лен. ун-та, 1962.
171. Ковалев А. Г. К вопросу о структуре способности к изобразительной деятельности. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
172. Ковалев А. Г. К теории литературных способностей. Сб. «Способности и потребности», «Ученые записки ЛГУ», № 287. Изд-во ЛГУ, 1960.
173. Ковалев А. Г. Психология личности. Гл. 9 «Способности». Л., Изд-во Лен. гос. пед. инст. им. Герцена, 1963.
174. Ковалев А. Г. и Мясищев В. Н. Психические особенности человека, т. II «Способности». Изд-во ЛГУ, 1960.
175. Кованцов Н. И. Являются ли врожденными математические способности? «Вопросы психологии», 1965, № 3.
176. Козлов С. Ф. Способность и одаренность. «Советская педагогика», 1940, № 6.
- 176—а. Колбановский В. Н. Роль пространственного воображения в развитии технических способностей. Сб. «Способности и интересы». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
177. Колмогоров А. Н. Аксиома (аксиоматический метод в математике). БСЭ (Большая советская энциклопедия), изд. 2, т. I.
178. Колмогоров А. Н. Математика. Большая советская энциклопедия. Изд. 2, т. 26.
179. Колмогоров А. Н. Наука требует горения. «Известия», 1962, № 44.
180. Колмогоров А. Н. О профессии математика, изд. 3. Изд-во МГУ, 1959.
181. Колмогоров А. Н. Поиск таланта. «Известия», 1963, № 83.
182. Колпачев В. П. Роль установления двусторонних связей в усвоении географического материала. «Вопросы психологии», 1957, № 4.
183. Кольцова М. М. Учение И. П. Павлова о сигнальных системах действительности. М., «Знание», 1955.
184. Компанийц П. А. Опыт, интуиция и логика в обучении математике. Сб. «Активизация деятельности учащихся при обучении математике». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.
185. Константинов Б. Таланты вокруг нас. «Известия», № 89, от 13 апреля 1963 г.
186. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М., Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1956.
187. Кордемский Б. А. Очерки о математических задачах на смекалку. М., Учпедгиз, 1958.
188. Косарева Н. В. Психолого-педагогическая характеристика ученика VI класса в процессе усвоения геометрических знаний. Сб. «Пути повышения успеваемости по математике». М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.
189. Коссов Б. Б. Некоторые принципы формирования обобщенных ассоциаций. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся» (Тезисы докладов). М., Изд-во МГПИ им. Ленина, 1964.
190. Коссов Б. Б. Особенности усвоения начальных алгебраических знаний школьниками с различным типологическим соотношением первой и второй сигнальных систем. «Вопросы психологии», 1956, № 4.
191. Костюк Г. С. Вопросы психологии мышления. «Психологическая наука в СССР», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
192. Костюк Г. С. Предисловие к книге Е. И. Машбица и В. М. Бондаровской «Зарубежные концепции программированного обучения». Киев, Изд-во «Квирту», 1964.

193. Костюк Г. С. (ред.) Психология (на укр. языке). Киев, 1957.
194. Костюк Г. С. Психологические вопросы руководства развитием способностей. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. 3. М., 1959.
195. Костюк Г. С., Проколенко Л. Н., Синица И. Е. О путях руководства умственным развитием учащихся в процессе обучения. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
196. Крайзман М. Л. О развитии творческого мышления учащихся в преподавании геометрии. «Математика в школе», 1955, № 6.
197. Кругляк М. И. О проблемном изложении учебного материала. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся» (Тезисы докладов). М., Изд-во МГПИ им. Ленина, 1964.
198. Крутецкий В. А. Анализ индивидуальной структуры математических способностей у школьников. Сб. «Способности и интересы». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
199. Крутецкий В. А. Возрастные особенности развития математических способностей у школьников. «Советская педагогика», 1965, № 11.
200. Крутецкий В. А. Вопросы диагностики математических способностей у школьников (на укр. языке). «Радянська школа», 1963, № 1.
201. Крутецкий В. А. Дети-математики. «Семья и школа», 1961, № 9.
202. Крутецкий В. А. Изучение и развитие способностей детей в СССР (на чешском языке). «Педагогика», Прага, 1962, № 6.
203. Крутецкий В. А. К вопросу о математических способностях у школьников. Сб. «Способности и интересы». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
204. Крутецкий В. А. К типологии школьников малоспособных к математике. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., «Просвещение», 1964.
205. Крутецкий В. А. Математические способности. «Семья и школа», 1961, № 6.
206. Крутецкий В. А. Математические способности. Сб. «О воспитании способностей у детей в семье». М., «Знание», 1962.
207. Крутецкий В. А. Математические способности. Сб. «Как развивать и воспитывать способности у детей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
208. Крутецкий В. А. Математические способности и их развитие у школьников. «Советская педагогика», 1962, № 9.
209. Крутецкий В. А. Некоторые особенности мышления школьников, малоспособных к математике (на рум. языке). «Румыно-советские записки», 1962, № 2.
210. Крутецкий В. А. О математических способностях школьников. Сб. «Вопросы психологии личности», под ред. Е. И. Игнатьева. М., Учпедгиз, 1960.
211. Крутецкий В. А. О некоторых особенностях мышления школьников, малоспособных к математике. «Вопросы психологии», 1961, № 5.
212. Крутецкий В. А. О природе относительной неспособности школьников к математике и некоторых путях ее преодоления. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., «Просвещение», 1964.
213. Крутецкий В. А. О психологической природе относительной неспособности школьников к математике. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. II. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
214. Крутецкий В. А. Опыт анализа структуры математических способностей. Сб. «Конференция по проблеме способностей». Тезисы докладов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
215. Крутецкий В. А. Опыт изучения математических способностей школьников (на рум. языке). «Румыно-советские записки», 1959, № 3.
216. Крутецкий В. А. Опыт изучения способностей к усвоению математики у школьников. «Вопросы психологии», 1959, № 1.
217. Крутецкий В. А. Опыт психологического анализа математиче-

ских способностей школьников. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.

218. Крутецкий В. А. и Лукин Н. С. Очерки психологии старшего школьника. Гл. «Некоторые особенности учебной деятельности старших школьников». М., Учпедгиз, 1963.

219. Крутецкий В. А. и Лукин Н. С. Психология подростка. Гл. «Способности подростка», изд. 2. М., «Просвещение», 1965.

220. Krutetsky V. A. A study of mathematical abilities. XVII, International Congress of Psychology. Washington, 1963.

221. Krutetsky V. A. A study of structure, ways of development and diagnosis of mathematical abilities. Proceedings of XVII International Congress of Psychology. Amsterdam, 1964.

222. Krutetsky V. A. Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics, «Educational psychology in the USSR». London, 1963.

223. Krutetsky V. A. Studies an abilities of schoolchildren i the USSR. The annual report of educational psychology in Japan, vol. 2, 1963.

224. Krutetsky V. A. The study and development of schoolboys' and schoolgirls' abilities. «The Tohokn Journal of educational psychology», vol. I, No. 1, 1963.

225. Крылов Н. И. Зависимость процесса автоматизации от структуры упражняемых действий. Сб. «Вопросы изучения высшей нейродинамики в связи с проблемами психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.

226. Кудрявцев Т. В. Переключение от одной умственной операции к другой (в учебной работе младших школьников). Сб. «Психология применения знаний к решению учебных задач». М., Изд-во АПН РСФСР, 1958.

227. Кузьмин А. М. Пути повышения активизации учащихся на уроках геометрии в седьмом классе. «Математика в школе», 1962, № 5.

228. Кузьмина Н. В. Психологическая структура деятельности учителя и формирование его личности. Гл. IX «Педагогические способности». Докторская диссертация. Л., 1964.

229. Кузьмицкая М. И. Основные трудности в решении арифметических задач учащимися вспомогательных школ. Автореферат канд. дисс. М., 1954.

230. Куликов В. Н. Понимание математической зависимости младшими школьниками. «Вопросы психологии», 1957, № 2.

231. Куликов В. Н. Понимание функциональной зависимости (на материале решения примеров и задач учащимися IX классов). Автореферат канд. дисс. М., 1952.

232. Лаврентьев М. Искать таланты. «Народное образование», 1962, № 1.

233. Лаврентьев М. О некоторых загадках природы. «Наука и жизнь», 1965, № 7.

234. Лаврентьев М. Факел таланта. «Известия», 23/III 1963. № 71.

235. Лазурский А. Ф. (ред.). Сб. «Естественный эксперимент и его школьное применение». Петроград, 1918.

236. Лазурский А. Ф. Классификация личностей. Петроград, Госиздат, 1921.

237. Ланда Л. Н. К психологии формирования методов рассуждения (на материале решения геометрических задач на доказательство учащимися VII—VIII кл.). Автореферат канд. дисс., М., 1955.

238. Ланда Л. Н. Некоторые данные о развитии умственных способностей. «Доклады АПН РСФСР», 1957, № 3.

239. Ланда Л. Н. Обучение учащихся методам рационального мышления и проблема алгоритмов. «Вопросы психологии», 1961, № 1.

240. Ланда Л. Н. О некоторых недостатках изучения мышления учащихся. «Советская педагогика», 1956, № 11.

241. Ланда Л. Н. О некоторых недостатках умственной деятельности

учащихся, затрудняющих самостоятельное решение задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 115, 1961.

242. Ланда Л. Н. О роли поисковых проб в процессе мышления. «Тезисы докладов на совещании по вопросам психологии познания (20—22 мая 1957 г.)». М., 1957.

243. Ланда Л. Н. О формировании у учащихся общего метода мыслительной деятельности при решении задач. «Вопросы психологии», 1959, № 3.

244. Ланда Л. Н. О формировании у учащихся VII—VIII классов общего метода самостоятельного доказательства. «Материалы сессии АПН РСФСР, посвященной вопросам учебно-воспитательной работы школы на разных ступенях обучения». М., Изд-во АПН РСФСР, 1958.

245. Левитов Н. Д. О психологических компонентах технической деятельности. «Вопросы психологии», 1958, № 6.

246. Левитов Н. Д. О психических состояниях человека. М., «Просвещение», 1964.

247. Левитов Н. Д. Проблема компенсации в психологии. Сб. «Способности и интересы». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.

248. Левитов Н. Д. Проблема экспериментального изучения способностей. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.

249. Левитов Н. Д. Психология труда. Раздел «Способности к труду». М., Учпедгиз, 1963.

250. Лейтес Н. С. Индивидуальные различия в способностях. Сб. «Психологическая наука в СССР», т. II. М., Изд-во АПН РСФСР, 1960.

251. Лейтес Н. С. К вопросу о возрастных особенностях школьников. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. V, М., «Просвещение», 1967.

252. Лейтес Н. С. Об умственной одаренности. М., Изд-во АПН РСФСР, 1960.

253. Лейтес Н. С. Одаренность и возрастные особенности. «Вопросы психологии», 1962, № 5.

254. Лейтес Н. С. Склонность к труду как фактор одаренности. «Известия АПН РСФСР», вып. 25, 1950.

255. Лейтес Н. С. Способности. Глава учебника «Психология» (под ред. А. А. Смирнова, А. Н. Леонтьева, С. Л. Рубинштейна и Б. М. Теплова), изд. 2. М., Учпедгиз, 1962.

256. Леонтьев А. Н. Опыт экспериментального исследования мышления. «Доклады на совещании по вопросам психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1954.

257. Леонтьев А. Н. О социальной природе психики человека. «Вопросы философии», 1961, № 1.

258. Леонтьев А. Н. О формировании способностей. «Вопросы психологии», 1960, № 1.

259. Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.

260. Леонтьев А. Н., Гальперин П. Я., Эльконин Д. Б. Реформа школы и задачи психологии. «Вопросы психологии», 1959, № 1.

261. Линькова Н. П. К вопросу о пространственном мышлении. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., «Просвещение», 1964.

262. Лихачева О. Я. Формирование основных алгебраических понятий у учащихся VI класса. «Материалы сессии АПН РСФСР, посвященной вопросам учебно-воспитательной работы школы на разных ступенях обучения». М., Изд-во АПН РСФСР, 1958.

263. Лурия А. Р. Мозг и психика. «Коммунист», 1964, № 6.

264. Лурия А. Р. Мозг человека и психические процессы. «Материалы к совещанию по философским вопросам физиологии высшей нервной деятельности и психологии». М., Изд-во АН СССР, 1962.

265. Лурия А. Р. Мозг человека и психические процессы. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

266. Люблинская А. А. О методе диагностики умственного развития

детей. Сб. «Вопросы психологии». Материалы II Закавказской конференции психологов». Ереван, 1960.

267. Людмилов Д. С. Важное средство развития логического мышления. «Математика в школе», 1963, № 1.

268. Лысенко Н. Ф. Чарлз Дарвин о качествах ума ученого. «Вопросы психологии», 1961, № 5.

269. Ляпунов А. А. О фундаменте и стиле современной математики. «Математическое просвещение», 1960, № 5.

270. Маергойз Д. М. О литературе по психологии обучения математике. «Вопросы психологии», 1957, № 3.

271. Майбунова Д. К вопросу о роли интуиции в школьном курсе геометрии. «Материалы III Узбекской республиканской научной конференции по вопросам психологии», вып. II. Ташкент, 1964.

272. Малков Н. Е. Индивидуально-типологические особенности подвижности нервных процессов в мыслительной деятельности старших школьников. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

272-а. Малков Н. Е. Проявление индивидуально-типологических различий нервных процессов в умственных способностях. «Вопросы психологии», 1966, № 1.

273. Малькова З. Вопросы обучения одаренных детей в педагогической печати США. «Народное образование», 1958, № 8.

274. Манзон Б. А. Активизация учащихся на уроках математики. «Математика в школе», 1960, № 3.

275. Манзон Б. А. О повышении эффективности урока по математике. «Математика в школе», 1959, № 2.

276. Марков А. А. Логика математическая. БСЭ (Большая советская энциклопедия), изд. 2, т. 25.

277. Маркушевич А. И. К вопросу о реформе курса математики. «Математика в школе», 1964, № 6.

278. Маркушевич А. И. Математическая наука и школьное образование. «Советская педагогика», 1965, № 1.

279. Маслова Г. Г. Развитие пространственных представлений учащихся восьмилетней школы при решении задач по геометрии. «Математика в школе», 1964, № 3.

280. Матюшкин А. М. Анализ и обобщение отношений. Сб. «Процесс мышления и закономерности анализа, синтеза и обобщения», под ред. С. Л. Рубинштейна. М., Изд-во АПН СССР, 1960.

281. Матюшкин А. М. Некоторые проблемы психологии мышления. Сб. «Психология мышления». М., «Прогресс», 1965.

282. Матюшкин А. М. Исследование психологических закономерностей процесса анализа. «Вопросы психологии», 1960, № 3.

283. Матюшкин А. М. О двух путях обобщения отношений. «Доклады АПН», 1959, № 3.

284. Машбиц Е. И. Зависимость усвоения учащимися способа решения математических задач от метода обучения. Автореферат канд. дисс. Киев, 1965.

285. Машбиц Е. И. Формирование обобщенных операций как путь подготовки учащихся к самостоятельному решению геометрических задач. «Известия АПН РСФСР», 1963, № 129.

286. Машбиц Е. И. и Бондаровская В. М. Зарубежные концепции программированного обучения. Киев, Изд-во «Квирту», 1964.

287. Меделян Г. А. Психологический анализ ошибок при решении арифметических задач учащимися V—VI классов. «Известия АПН РСФСР», 1955, № 71.

288. Мельников М. А. Опыт дифференцированного обучения в советской средней школе. «Советская педагогика», 1962, № 9.

289. Менчинская Н. А. Интеллектуальная деятельность при решении арифметических задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 3, 1946.

290. Менчинская Н. А. Очерки психологии обучения арифметике. Изд. 2. М., Учпедгиз, 1950.
291. Менчинская Н. А. Психология обучения арифметике. М., Учпедгиз, 1955.
292. Менчинская Н. А. и Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. М., «Просвещение», 1965.
293. Мерлин В. С. Влияние интересного задания на проявления подвижности нервных процессов. «Вопросы психологии», 1963, № 3.
294. Мерлин В. С. Очерк психологии личности. Пермское книжное издательство, 1959.
295. Миткевич Г. Г. Психолого-педагогическая характеристика ученика IV—V классов в процессе обучения арифметике. Сб. «Пути повышения успеваемости по математике». М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.
296. Михайлова К. К. Методы активизации мыслительной деятельности учащихся при изучении математики. Сб. «Вопросы перестройки обучения математике в школе». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
297. Михальков Г. Из практики индивидуального подхода в обучении математике. «Народное образование», 1963, № 11.
298. Михальский К. А. Решение сложных арифметических задач в вспомогательной школе. «Известия АПН РСФСР», вып. 41, 1952.
299. Молодший В. Н. Аксиоматический метод. Сб. «Вопросы преподавания математики в средней школе» ред. П. В. Стратилатов. М., Учпедгиз, 1961.
300. Мордухай-Болтовский Д. Психология математического мышления. «Вопросы философии и психологии». М., 1908, книга IV (94).
301. Мясищев В. Н. О связи склонностей и способностей. Сб. «Склонности и способности», отв. ред. Мясищев В. Н., Л., Изд-во ЛГУ, 1962.
302. Мясищев В. Н. Проблема способностей в советской психологии и ближайшие задачи ее разработки. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. 3. М., 1959.
303. Мясищев В. Н. Проблема способностей в советской психологии и ее ближайшие задачи. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
304. Мясищев В. Н. Способности и потребности. Сб. «Способности и потребности». «Ученые записки Ленинградского университета», № 287. Изд-во ЛГУ, 1960.
305. Мясищев В. Н., Рыбалко Е. Ф. Способности ребенка в связи с его отношениями. «Вопросы психологии обучения и воспитания» (на укр. языке). Тезисы докладов. Изд. Укр. отделения об-ва психологов, Киев, 1961.
306. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. М., Учпедгиз, 1958.
307. Насыров А. Использовать развивающее влияние математики. «Народное образование», 1965, № 3.
308. Насыров А. З. Самостоятельная работа учащихся на уроках математики в V—X классах. Автореферат канд. дисс. М., 1955.
309. Небылицын В. Д. Современное состояние факториального анализа. «Вопросы психологии», 1960, № 4.
310. Небылицын В. Д. Факториальная структура интеллекта. «Вопросы психологии», 1961, № 2.
311. Неелова А. П. Особенности аналитико-синтетической деятельности при самостоятельном выполнении учебных заданий по геометрии. «О психологических особенностях творческой активности учащихся». Тезисы докладов. М., изд-во МГПИ им. Ленина, 1962.
312. Нефедьев А. А. К вопросу об организации самостоятельной работы учащихся по математике. «Ученые записки Иркутского пединститута», вып. 13, 1957.
313. Никитин Б. П. Опыт объективной оценки уровня развития технических способностей школьников. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников», М., «Просвещение», 1964.

314. Никитин Н. И. О различных способах доказательства теорем. «Математика в школе», 1962, № 6.
315. Нуйкин А. На науку — равняйся! «Комсомольская правда», 21/X 1965.
316. Овчинникова И. Способности надо развивать. Журнал «Наука и жизнь», 1964, № 12.
317. Ольшанникова А. Е. Показатели утомляющей деятельности и сила нервной системы по отношению к процессу возбуждения. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. V, М., «Просвещение», 1967.
318. «Опыт экспериментальной работы учителей начальных классов школы памяти В. И. Ленина», ред. Менчинская Н. А., Моро М. И. М., «Просвещение», 1964.
319. «О состоянии и мерах улучшения преподавания математики в школах РСФСР». Приказ министра просвещения РСФСР № 57 от 21/II 1962. «Математика в школе», 1962, № 3.
320. Островский А. И. и Кордемский Б. А. Геометрия помогает арифметике. М., Физматгиз, 1960.
321. Павлов И. П. Полное собрание сочинений, т. III, кн. 2, изд. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951.
322. «Павловские клинические среды», тт. II и III. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1954.
323. Переверзева А. Искать новые приемы в преподавании математики, «Народное образование», 1962, № 1.
324. Переверзева А. А. Новое в уроке математики. Сб. «Организация урока в передовых школах Липецкой области». Липецк, 1962.
325. Перельман Я. И. Живая математика, изд. 4. М., Изд-во технико-теоретической литературы, 1955.
326. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. М.—Л., Госиздат, 1959.
327. Перельман Я. И. Занимательная арифметика. М.—Л., Госиздат, 1959.
328. Перельман Я. И. Занимательная геометрия, изд. 7. М.—Л., Изд-во технико-теоретической литературы, 1950.
329. Песков Т. Пространственные представления учащихся средней школы. «Математика в школе», 1940, № 1.
330. Песков Т. А. Самостоятельная работа учащихся по математике в V—VIII классах. М., Учпедгиз, 1962.
331. Петраков И. С. Вторая Всероссийская математическая олимпиада. «Математика в школе», 1962, № 4.
332. Пинский Б. И. Психологические особенности деятельности умственно отсталых школьников. М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
333. Платонов К. К. Выступление на совещании по философским вопросам физиологии высшей нервной деятельности и психологии. Сб. «Философские вопросы физиологии высшей нервной деятельности и психологии». М., Изд-во АН СССР, 1963.
334. Поляк Г. Б. Занимательные задачи. М., Учпедгиз, 1953.
335. Пономарев Я. А. Психология творческого мышления. М., Изд-во АПН РСФСР, 1960.
336. Пономарева А. В. Развивать способности учащихся в средней школе. «Советская педагогика», № 12, 1963.
- 336-а. «Программы средней школы». М., «Просвещение», 1966.
337. Проколиенко Л. Н. Некоторые особенности развития мышления подростков. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 2. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
338. Проколиенко Л. Н. Особенности рассуждений учащихся 8—10 классов при обосновании способа решения задачи. Сб. «Вопросы психологии». «Материалы II Закавказской конференции психологов». Ереван, 1960.
339. Протополова Л., Герцик А. Познание математики. «Учительская газета», 16 сентября 1965 г.

340. Пути повышения успеваемости по математике, под ред. Н. А. Менчинской и В. И. Зыковой. М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.
341. Пушкин В. Н. Эвристическая деятельность человека. «Наука и жизнь», 1964, № 10.
342. Пушкин В. Н. Эвристика и кибернетика. М., «Знание», 1965.
343. Рабинович С. Я. и Шуберт А. М. Два случая математической одаренности у детей. «Психология и дети». М., 1917, № 3—4.
344. Рамуль К. А. Введение в методы экспериментальной психологии. Тарту, изд. Тартуск. университета, 1963.
345. Ребус Б. М. Пространственное воображение как важная способность к технической деятельности. Канд. дисс. Ставрополь, 1965.
346. Репьев В. В. К вопросу о самостоятельной работе учащихся на уроках математики. «Математика в школе», 1962, № 4.
347. Ровенский З., Усмов А., Усмова Е. Машина и мысль. М., Госполитиздат, 1960.
348. Ройтман П. Б. Связь обучения и воспитания на уроках математики. «Математика в школе», 1964, № 6.
349. Россинский С. Д. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский (1858—1923). Изд-во МГУ, 1950.
350. Ростовецкая Л. А. Об индивидуальных особенностях развития самостоятельности мышления школьников при алгебраическом обучении (рукопись). Ростов, 1965.
351. Рубинштейн С. Л. Бытие и сознание. М., Изд-во АН СССР, 1957.
352. Рубинштейн С. Л. Вопросы психологической теории. «Вопросы психологии», 1955, № 1.
353. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. М., Изд-во АН СССР, 1958.
354. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. М., Учпедгиз, 1940.
355. Рубинштейн С. Л. Принципы и пути развития психологии. М., Изд-во АН СССР, 1959.
356. Рубинштейн С. Л. Проблема способностей и вопросы психологической теории. «Вопросы психологии», 1960, № 3.
357. Рубинштейн С. Л. Психологические воззрения И. М. Сеченова и советская психологическая наука. «Вопросы психологии», 1955, № 5.
358. Рубинштейн С. Л. Теоретические вопросы психологии и проблема личности. «Вопросы психологии», 1957, № 3.
359. Рудик П. А. Психология, гл. XVIII «Способности», изд. 2. М., «Физкультура и спорт», 1964.
360. Самарин Ю. А. Знания, потребности и умения как динамическая основа умственных способностей. Сб. «Проблемы способностей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
361. Самарин Ю. А. К вопросу о проявлении и соотношении способностей и интересов в школьном возрасте. Сб. «Склонности и способности», Отв. ред. В. Н. Мясищев. Изд-во ЛГУ, 1962.
362. Самарин Ю. А. Об ассоциативной природе умственной деятельности. «Вопросы психологии», 1957, № 2.
363. Самарин Ю. А. Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьника. М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
364. Самарин Ю. А. Проблемы развития общих и специальных способностей к обучению. Сб. «Способности и потребности». «Ученые записки ЛГУ», № 287. Изд-во ЛГУ, 1960.
365. Самарин Ю. А. Системность и динамичность умственной деятельности как основы творчества. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся» (Тезисы докладов). М., изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1964.
366. Самарин Ю. А. Стиль умственной работы старших школьников. «Известия АПН РСФСР», вып. 17, 1948.

367. Самодурова З. С. Из опыта преподавания алгебры в 6—7 классах. «Математика в школе», 1957, № 2.
368. «Самостоятельная работа учащихся на уроках», под ред. чл.-корр. Акад. пед. наук Б. П. Есипова. М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.
- 368-а. Самохвалова В. И. Об индивидуальных различиях в запоминании разных видов материала. «Вопросы психологии», 1962, № 4.
369. Серебровская Е. К. Опыт внеклассной работы по математике в V—VII классах. М., Учпедгиз, 1954.
370. Серебрякова Р. О. Опыт психологического анализа так называемой «неспособности к обучению» у школьников. Конф. по пробл. способностей. Тезисы докладов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
371. Сеченов И. М. Элементы мысли, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1943.
372. Скрипченко А. В. Особенности мышления учащихся VII—VIII классов при составлении уравнений. «Вопросы психологии». «Материалы II Закавказской конференции психологов». Ереван, 1960.
373. Скрипченко А. В. Психологические особенности усвоения учащимися отрицательных чисел. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
374. Скрипченко А. В. Психологические особенности усвоения учащимися отрицательных чисел. Сб. «Наукові записки» Науково дослідний інститут психології, т. X. Киев, изд. «Радянська школа», 1959.
375. Скрипченко А. В. Формирование обобщенных способов решения арифметических задач у младших школьников. «Вопросы психологии», 1963, № 3.
376. Скрипченко А. В. Формирование у младших школьников умений решать арифметические задачи путем составления уравнений. «Известия АПН РСФСР», вып. 129, 1963.
377. Славина Л. С. О некоторых особенностях умственной работы неуспевающих школьников. «Доклады на совещании по вопросам психологии». «Советская педагогика», 1954, № 1.
378. Славина Л. С. Психологические условия повышения интеллектуальной активности учащихся в учебной работе. «Известия АПН РСФСР», вып. 73, 1955.
379. Славская К. А. К проблеме «переноса». «Доклады АПН РСФСР», 1957, № 2.
380. Славская К. А. О «переносе» принципа решения задачи. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 4.
381. Славская К. А. Процесс мышления и использование знаний. Сб. «Процесс мышления и закономерности анализа, синтеза и обобщения», ред. С. Л. Рубинштейн. М., Изд-во АН СССР, 1959.
382. Смирнов А. А. Психология запоминания. М.—Л., Изд-во АПН РСФСР, 1948.
383. Смирнов А. А. Работы Торндайка по психологии математики и педологические извращения в школе. «Математика и физика в школе», 1936, № 6.
384. Смирнов А. А. Развитие памяти. Сб. «Психологическая наука в СССР», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
385. Соболев С. Поэзия математики. «Литературная газета», 14/XII 1961.
386. «Современная психология в капиталистических странах». Ред. Е. В. Шорохова. М., Изд-во АН СССР, 1963.
387. Соколов А. Н. Графическое сопоставление логически предполагаемого и фактического хода решения задач. «Вопросы психологии», 1961, № 6.
388. Соколов А. Н. Процессы мышления при решении физических задач учащимися. «Известия АПН РСФСР», вып. 54, 1954.
389. Соловьев И. М. Мышление умственно отсталых школьников при решении арифметических задач. Сб. «Особенности познавательной деятельности учащихся вспомогательной школы». М., Изд-во АПН РСФСР, 1953.
390. Соловьев И. М. Мышление учащихся вспомогательной школы

при решении арифметических задач. Сб. «Учебно-воспитательная работа в специальных школах», под ред. Д. И. Азбукина, вып. 3—4. М., Учпедгиз, 1952.

391. Соловьев И. М. Познавательная деятельность при решении арифметических задач глухими и слышащими школьниками. Сб. «О психическом развитии глухих и нормально слышащих детей». М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.

392. Соловьев З. А. Развитие познавательной активности и самостоятельности учащихся на уроках математики. Сб. «За прочные знания по математике». Казань, Татиздат, 1965.

393. Степанов А. В. К вопросу о психологической природе математического развития школьника. Автореферат канд. дисс. М., 1952.

394. Степанов А. В. К вопросу о стимулах творческой инициативы и активности в связи с проблемой математического развития учащихся. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». Тезисы докладов. М., МГПИ им. Ленина, 1964.

395. Столяр А. А. Воспитание логического мышления учащихся на уроках геометрии. Автореферат канд. дисс. М., 1951.

396. Стрезикозин В. Нужна ли дифференциация? «Учительская газета», 15/I 1966.

397. Судakov Н. И. Психологическая характеристика настойчивости учащихся старших классов. Канд. дисс. М., 1950.

398. Сыркина В. Е. Развитие способностей и характер. «Советская педагогика», 1947, № 2.

399. Талызина Н. Ф. К вопросу об усвоении начальных геометрических понятий. «Материалы совещания по психологии». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.

400. Талызина Н. Ф. Опыт управляемого обучения начальной геометрии в школе на основе теории формирования умственных действий. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

401. Талызина Н. Ф. Особенности умозаключений при решении геометрических задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 80, М., 1957.

402. Талызина Н. Ф. и Буткин Г. А. К проблеме доказательства в начальном курсе геометрии. «Доклады АПН РСФСР», № 3, 1960.

403. Талызина Н. Ф. и Буткин Г. А. Опыт обучения геометрическому доказательству. «Известия АПН РСФСР», вып. 133. М., 1964.

404. Тендряков В. Ваш сын и наследство Коменского. «Москва», 1965, № 11.

405. Теплов Б. М. Исследование свойств нервной системы как путь к изучению индивидуально-психологических различий. Сб. «Психологическая наука в СССР», т. 2. М., Изд-во АПН РСФСР, 1960.

406. Теплов Б. М. Итоги и перспективы исследования типологических свойств нервной системы человека. В сб. «Проблемы индивидуальных различий». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.

407. Теплов Б. М. и Лейтес Н. С. К проблеме индивидуально-психологических различий. «Доклады на совещании по вопросам психологии личности». М., Изд-во АПН РСФСР, 1956.

408. Теплов Б. М. Проблемы индивидуальных различий. М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.

409. Теплов Б. М. Проблема одаренности. «Советская педагогика», 1940, № 4—5.

410. Теплов Б. М. Простейшие способы факторного анализа. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека», т. V. М., «Просвещение», 1965.

411. Теплов Б. М. Психология музыкальных способностей. В сб. «Проблемы индивидуальных различий». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.

412. Теплов Б. М. Способности и одаренность. «Ученые записки ГНИИП», т. 2. М., 1941.

413. Теплов Б. М. Способности и одаренность. Глава учебника «Психология» (под ред. Корнилова К. Н., Смирнова А. А. и Теплова Б. М.), изд. 3. М., Учпедгиз, 1948.

414. Теплов Б. М. Типологические свойства нервной системы и их значение для психологии. Сб. «Философские вопросы физиологии высшей нервной деятельности и психологии» (материалы Всесоюзного совещания). М., Изд-во АН СССР, 1963.

414-а. Теплов Б. М. и Небылицын В. Д. Изучение основных свойств нервной системы. «Вопросы психологии», 1963, № 5.

415. Терехова О. П. Об активизации учащихся в процессе их умственного воспитания. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся». Тезисы докладов. М., Изд-во МГПИИ им. Ленина, 1964.

416. Терехова О. П. О генерализации одной из форм анализа. «Вопросы психологии», 1960, № 4.

417. Терехова О. П. Психологический анализ одного из способов активизации умственной деятельности учащихся. Сб. «О психологических особенностях творческой активности учащихся». Тезисы докладов. М., Изд-во МГПИИ им. Ленина, 1962.

418. Токарева В. А. Опыт исследования взаимосвязи потребности в деятельности и способностей к ней. «Материалы III Узбекской республиканской научной конференции по вопросам психологии», вып. II. Ташкент, 1964.

419. «Труды первого Всероссийского съезда преподавателей математики», т. I. СПб., 1913.

420. Уманский Л. И. К проблеме способностей в связи с типами высшей нервной деятельности. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

421. Уметский В. А. О развитии математического мышления на уроках арифметики. «Математика в школе», 1954, № 5.

422. Успенский В. Лингвистика, математика и новая традиция. «Наука и жизнь», 1965, № 10.

423. Фетисов А. И. Внеклассные занятия по математике. «Известия АПН РСФСР», вып. 92, 1958.

424. Фетисов А. И. Формирование математических понятий (у учащихся). «Известия АПН РСФСР», вып. 92, 1958.

425. Фетисов А. И. Элементы логики в преподавании математики. «Известия АПН РСФСР», вып. 92, 1958.

426. Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики. «Математическое просвещение», вып. 6, 1961.

427. Хинчин А. Я. О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики. «Математическое просвещение», 1961, № 6.

428. Хинчин А. Я. О формализме в школьном преподавании математики. «Известия АПН РСФСР», вып. 4, 1946.

429. Хомушид М. С. Основные черты методики обучения алгебре в восьмилетней школе. Сб. «Вопросы перестройки обучения математике в школе». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.

430. Цесюлевич А. С. Наши пожелания. «Математика в школе», 1948, № 2.

431. Чернов А. П. Некоторые результаты исследования умственного экспериментирования учащихся средней школы. «Тезисы докладов на I съезде Общества психологов», вып. 3. М., 1959.

432. Четверухин Н. Ф. Опыт исследования пространственных представлений и пространственного воображения учащихся. «Известия АПН РСФСР», вып. 21, 1949.

433. Шапиро С. И. Исследование индивидуальных особенностей учащихся в процессе переработки математической информации. «Вопросы психологии», 1965, № 2.

434. Шапиро С. И. Обобщенное математическое мышление школьников и наглядные опоры. Доклады на «Педагогических чтениях». Институт психологии АПН РСФСР, рукопись. М., 1965.

435. Шапиро С. И. Психологический анализ структуры математических способностей в старшем школьном возрасте. Канд. дисс. Курск, 1966.

436. Шапиро С. И. и Уманский Л. И. О применении теории ин-

- формации к изучению способностей человека. «Вопросы психологии», 1963, № 2.
437. Шардаков М. Н. К вопросу о развитии причинного мышления у школьника. «Известия АПН РСФСР», вып. 17, 1948.
438. Шварцбурд С. И. Научно-практическая конференция по внеклассной работе с учащимися по математике (обзор). «Математика в школе», 1965, № 6.
439. Шварцбурд С. И. О развитии интересов, склонностей и способностей учащихся к математике. «Математика в школе», 1964, № 6.
440. Шеварев П. А. К вопросу об основных типах ассоциаций. «Тезисы докладов на II съезде Общества психологов», вып. 5. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
441. Шеварев П. А. К вопросу о природе алгебраических навыков. «Ученые записки Государственного института психологии», т. II. М., 1941.
442. Шеварев П. А. Некоторые замечания к проблеме ассоциаций. «Известия АПН РСФСР», вып. 80, 1957.
443. Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации. «Вопросы психологии», 1958, № 1.
444. Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьников. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
445. Шеварев П. А. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. «Известия АПН РСФСР», вып. 3, 1946.
446. Шеварев П. А. Процессы мышления в учебной работе школьника. «Советская педагогика», 1946, № 3.
447. Шевченко К. Вопросы элементарной математики, способствующие развитию математически-обобщающего мышления. «Математика в школе», 1937, № 1.
448. Шевчук В. Объяснение явлений и проблема инсайта. «Вопросы психологии», 1964, № 2.
449. Шемякин Ф. Н. Некоторые проблемы современной психологии мышления и речи. Сб. «Мышление и речь». М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
450. Шеншев Л. В. Общие моменты мышления в процессах усвоения математики и иностранного языка. «Вопросы психологии», 1960, № 4.
451. Шехтер М. С. Проблема симультанного узнавания. Автореферат канд. дисс. М., 1964.
452. Широков В. Ф. Сборник арифметических задач на соображение. М., Учпедгиз, 1949.
453. Шор Я. А. О некоторых способах борьбы с формализмом. «Математика в школе», 1948, № 1.
454. Шор Я. А. О решении арифметических задач. М., Изд-во АПН РСФСР, 1951.
455. Шор Я. А. Развитие функционального мышления на обобщении типовых задач. «Математика в школе», 1950, № 4.
456. Шохор-Троцкий С. И. Методика арифметики. Пособие для учителей начальной школы, 1916.
457. Шурко М. Так ли решается жгучая проблема? «Народное образование», 1963, № 2.
458. Щедровицкий Г. П. Исследование мышления детей на материале решений арифметических задач. Сб. «Развитие познавательных и волевых процессов у дошкольников». М., «Просвещение», 1965.
459. Щедровицкий Г. П. О необходимости типологических исследований в психологии и педагогике. «Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся» (Тезисы докладов). М., Изд-во МГПИ имени Ленина, 1964.
460. Эльконин Д. Б. Опыт психологического исследования в экспериментальном классе. «Вопросы психологии», 1960, № 5.
461. Эльконин Д. Б. и Давыдов В. В. Вопросы психологии учебной деятельности младших школьников. М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
462. Эрдниев П. М. К вопросу об активизации преподавания предметов физико-математического цикла. «Советская педагогика», 1957, № 8.

463. Эрдниев П. М. О роли прямых и обратных связей при обучении математике. «Вопросы психологии», 1962, № 6.
464. Эрдниев П. М. Развитие навыков самоконтроля при обучении математике. М., Учпедгиз, 1957.
465. Эрдниев П. М. Сравнение и обобщение при обучении математике. М., Учпедгиз, 1960.
466. Эрн Ф. А. Очерки по методике арифметики, Рига, 1915.
467. Эфроимсон В. Человек и генетика. «Литературная газета», 7 августа 1965, № 93.
468. Ягункова В. П. Индивидуально-психологические особенности школьников, способных к литературному творчеству. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., «Просвещение», 1964.
469. Якиманская И. С. Восприятие и понимание учащимися чертежа и условия задачи в процессе ее решения. Сб. «Применение знаний в учебной практике школьников». М., Изд-во АПН РСФСР, 1961.
470. Якиманская И. С. Индивидуальные различия учащихся, проявляющиеся при решении геометрических задач на доказательство. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 1.
471. Якиманская И. С. Уровни анализа, синтеза и абстракции при чтении чертежа у учащихся IV—VIII классов. «Вопросы психологии», 1959, № 1.
472. Якобсон П. М. Технические способности и их изучение у учащихся. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., «Просвещение», 1964.
473. Ярмоленко А. В. Об одной попытке построения теории способности. «Ученые записки ЛГУ», № 265, Л., Изд-во ЛГУ, 1959.
474. Ярмоленко А. В. Об ошибках в определении способностей. Сб. «Склонности и способности», отв. ред. Мясищев. Л., Изд-во ЛГУ, 1962.
475. Ярошук В. Л. Психологический анализ процессов решения типовых арифметических задач. «Известия АПН РСФСР», вып. 80, 1957.
476. Ярошук В. Л. Роль осознания типовых признаков при решении арифметических задач определенного типа. «Вопросы психологии», 1959, № 1

* * *

477. Адамар Ж. Элементарная геометрия (пер. с франц.). М., Учпедгиз, 1957.
478. Бетц В. Проблема корреляции в психологии. О соотношении психических способностей, гл. V. «Способность к математике» (пер. с нем.). М., изд. «Русская книжка», 1923.
479. Бинэ А. Современные идеи о детях (пер. с франц.). М., 1910.
480. Брунер Дж. Процесс обучения (пер. с англ.). М., Изд-во АПН РСФСР, 1962.
481. Бурбаки Н. Архитектура математики (пер. с франц.) «Математическое просвещение», 1960, № 5.
482. Винер Н. Я — математик (пер. с англ.). М., «Наука», 1964.
483. Вудвортс Р. Экспериментальная психология (пер. с англ.). М., Изд-во иностранной литературы, 1950.
484. Гаттеньо. Педагогика математики (пер. с франц.). Сб. «Преподавание математики». М., Учпедгиз, 1960.
485. Голас Э. Изучение условий обобщения (пер. с чешск.). «Вопросы психологии», 1962, № 3.
486. Декарт Р. Правила для руководства ума. М.—Л., Соцэкгиз, 1936.
487. Дункер К. Психология продуктивного (творческого) мышления. Глава о процессах решения математических задач (пер. с англ.). Сб. «Психология мышления», ред. А. М. Матюшкин. М., «Прогресс», 1965.
488. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления (пер. с англ.). М., «Мир», 1919.

489. Майер Н. Мышление человека (пер. с англ.). Сб. «Психология мышления», ред. А. М. Матюшкин. М., «Прогресс», 1965

490. «Математические тесты» (употребляемые в школах США). Из брошюры «A description of the College Board Achievement Tests», опублик. в США (пер. с англ.). «Математика в школе», 1961, № 3.

491. Меде В. и Пиорковский Г. Детская одаренность (пер. с нем.). М., «Работник просвещения», 1925.

492. Мейман Э. Лекции по экспериментальной педагогике, ч. II. Индивидуальные особенности детей (пер. с нем.). М., «Мир», 1914—1917.

493. Ньюэлл А., Шоу Дж. и Саймон Г. А. Процессы творческого мышления (пер. с англ.). Сб. «Психология мышления», ред. А. М. Матюшкин. М., «Прогресс», 1965.

493—а. Пиаже Ж. Речь и мышление ребенка (пер. с франц.). М.—Л., Учпедгиз, 1932.

494. Пиаже Ж. Структуры математические и оперативные структуры мышления. Сб. «Преподавание математики» (пер. с франц.). М., Учпедгиз, 1960.

495. Пойа Д. Как решать задачи (пер. с англ.), изд. 2. М., Учпедгиз, 1961.

496. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения (пер. с англ.). М., Изд-во иностранной литературы, 1957.

497. Пойа Д. Усвоение математики, ее преподавание и обучение педагогическому мастерству (пер. с англ.). «Математика в школе», 1964, № 6.

498. Пуанкаре А. Математическое творчество (пер. с франц.). Юрьев, 1909.

499. Саймон Б. Английская школа и интеллектуальные тесты (пер. с англ.). М., Изд-во АПН РСФСР, 1958.

500. Торндайк Э. Вопросы преподавания алгебры (пер. с англ.). М., Учпедгиз, 1934.

501. Торндайк Э. Новые методы преподавания арифметики (пер. с англ.). М.—Л., Учпедгиз, 1932.

502. Торндайк Э. Принципы обучения, основанные на психологии (пер. с англ.), изд. 2. М., «Работник просвещения», 1929.

503. Торндайк Э. Психология арифметики (пер. с англ.). М.—Л., Учпедгиз, 1932.

504. Уарте Х. Исследование способностей к наукам (пер. с испанск.). М., Изд-во АН СССР, 1960.

505. Хейссерман Э. Потенциальные возможности психического развития нормального и аномального ребенка (пер. с англ.). М., Изд-во «Просвещение», 1964.

506. Штерн В. Одаренность детей и подростков и методы ее исследования (пер. с нем.). Изд-во «Книгоспилка», 1926.

507. Штерн В. Психологические методы испытания умственной одаренности (пер. с нем.). Петроград, Изд-во «Земля», 1915.

508. Abraham W. A hundred gifted children. «Understanding the child», 1957, No. 26.

509. Adkins D. C., Lysterly S. B. Factor analysis of reasoning tests. The University of North Carolina Press, 1952.

510. Adler A. Was kann die Individualpsychologie zur mathematischen «Begabung» sagen? «Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie», XI, Leipzig, 1933.

511. Ahmavaara V. On the unified factor theory of mind. Helsinki, 1957.

512. Aiken L. R., Dreger R. M. The effect of attitudes on performance in mathematics. «Journal of educational psychology», vol. 52, 1961, No. 1.

513. Alexander W. P. Intelligence, concrete and abstract. «British journal of psychology», vol. 19, 1935, No. 6.

514. Anastasi A. Differential psychology. New York, 1958.

515. Anderson H. Creativity and its cultivation. New York, 1959.

516. Ayers G. H. Predicting success in algebra. «School and society», vol. 39, 1934, No. 993.
517. Baker H. T. Characteristics of superior learners and the relative merits of enrichment and acceleration for them. The University of Chicago Press, 1949.
518. Baldwin A. L. The role of an ability construct in a theory of behaviour. «Talent and society», Princeton, 1958.
519. Barakat M. K. A factorial study of mathematical abilities. «British journal of psychology», vol. 4, 1951, No. 137.
520. Barakat M. K. Factors underlying mathematical abilities. London, 1950.
521. Barbe W. B. Characteristics of gifted children. «Educational administration and supervision», vol. 41, 1955, No. 4.
522. Barbe W. B., Frierson E. C. Teaching the gifted — a new frame of reference. «Education», vol. 82, 1962, No. 8.
523. Bauer R. A. Some views on soviet psychology. Washington, 1962.
524. Baumgarten F. Die Begabung und ihre Probleme (The talented and their problem). Leipzig, 1963, suppl. No. 15.
525. Beke E. Über mathematische Begabung. «Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie», XI. Leipzig, 1933.
526. Bennet G. K., Seashore H. G., Wesman A. G. Differential aptitude tests. New York, 1957.
527. Bentley J. E. Superior children. New York, 1937.
528. Birch J. W., Reynolds M. C. The gifted. «Review of Educational research», 1963, 33 (1).
529. Blackwell A. M. A comprehensive investigation into the factors involved in mathematical ability in boys and girls. «British journal of psychology», 1940, No. 10.
530. Bloom S. W. The early identification of potential scientists. «School science and mathematics», vol. LV, 1955, No. 4.
531. Bray D. W. Issues in the study of talent. Oxford, 1954.
532. Bristow W. H. Identifying gifted children. «The gifted child». Ed. by P. Witty. Boston, 1951.
533. Brown W. An objective study of mathematical ability. «Biometrika», 1910, No. 7.
534. Brown W., Thomson G. H. The essentials of mental measurement. Cambridge, 1940.
535. Brown K. E., Johnson P. J. Education for the talented in mathematics and science. U. S. Department of health education and welfare office of education. Bulletin No. 15. Washington, 1952.
536. Bryan G. K. Education of the gifted. «School life», 1962, No. 6.
537. Buckingham B. R. Mathematical ability as related to general intelligence. «School science and mathematics», vol. 21, 1921, No. 3.
538. Burks B. S. The relative influence of nature and nurture upon mental development. National Society for the Study of Education «The twenty-seventh year-book», part I, 1928.
539. Burnett R. W. How good teachers teach science. «School science and mathematics», vol. LV, 1955, No. 4.
540. Burt C. General ability and special aptitudes. «Educational research», vol. 1, London, 1959, No. 2.
541. Burt C. The distribution and relations of educational abilities. London, 1917.
542. Burt C. The inheritance of mental ability. «The American psychologist», vol. 13, 1958, No. 1.
543. Buswell G. T., Lenore J. Diagnostic studies in arithmetic. Chicago, 1926.
544. Cairns G. C. An analytical study of mathematical abilities. Washington, 1931.
545. Cameron A. E. A comparative study of the mathematical ability

of boys and girls in secondary schools. «British journal of psychology», vol. 16, 1925—1926.

546. Canisia M. Mathematical ability as related to reasoning and use of symbols. «Educational and psychological measurement», 1962, No. 22 (I).

547. Carpenter R. Creativity: its nature and nurture. «Education», vol. 82, 1962, No. 7.

548. Carroll H. Genius in the making. New York, 1940.

548a. Carter H. Gifted children. «Encyclopedia of educational research», New York, 1960.

549. Cartwright L. The mathematical mind. London, 1955.

550. Coleman R. H. An analysis of certain components of mathematical ability and an attempt to predict mathematical achievement in a specific situation. The University of Indiana, 1956.

551. Collar D. J. A statistical survey of arithmetical ability. «British journal of psychology», vol. XI, part I, 1920.

552. Conant J. B. Education of the academically talented. «School and society», vol. 86, 1958, No. 10.

553. Courtis S. A. Measurement of growth and efficiency in arithmetic «Elementary school teacher», 1909, No. 10, 1911, No. 11.

554. Davies G. R. Elements of arithmetical ability. «The journal of educational psychology», vol. 5, 1914, No. 3.

555. Davis N. Creative activities for gifted pupils. «The school review», vol. LXIII, 1955, No. 2.

556. Deschamps C., Mihaud E. Figures géométriques vues par de jeunes techniciens. «Enfance», 1951, No. 4.

557. Dickter M. R. Predicting algebraic ability. «The School Review», vol. XLI, 1933, No. 8.

558. Dienes Z. P. The growth of mathematical concepts in children through experience. «Educational research», vol. 11, London, 1959, No. 1.

559. Dodd J. Our retarded children. Bureau of child research The University of Kansas. «Public information series», 1959, No. 2.

560. Duncan E. R. The identification and education of the gifted in mathematics. «The year-book of education», 1961.

561. Duncker K. A qualitative experimental and theoretical study of productive thinking. «Journal of genetic psychology», vol. 33, 1926, No. 4.

562. Ebel R. L. Must all tests be valid? «The American psychologist», vol. 16, 1961, No. 10.

563. Ebert R. S. Generalization abilities in mathematics. «Journal of educational research», vol. 39, 1946, No. 9.

563a. «Encyclopedia of psychology». New York, 1946.

564. Fehr H. F. Mathematics for the gifted. «Bulletin of the national association of secondary-school principals», vol. 38, 1954.

565. Flack W. S. Investigation of mathematical ability in the classroom. «Forum of education», vol. 4, 1926, No. 44.

566. Flescher I. Anxiety and achievement of intellectually gifted and creatively gifted children. «Journal of psychology», 1963, No. 56 (2).

567. Fliegler L. A., Bish Ch. E. The gifted and talented. «Review of educational research», vol. XXIX, 1959.

568. Fouché A. La pédagogie des mathématiques. Paris, 1952.

569. Fouracre L. Psychological tests of mathematical ability. «Forum of education», vol. 4, 1926, No. 201.

570. Freehill M. F. Gifted children; their psychology and education. New York, 1961.

571. Fruchter B. The nature of verbal fluency. «Educational and psychological measurement», 1948, No. 8.

572. Gagné R. M., Paradise N. E. Abilities and learning sets in knowledge acquisition. «Psychological monographs», vol. 75, 1961, No. 14 (518).

573. Gagné R. M., Mayor S. R., Garstens H. L., Paradise N. E.

Factors in acquiring knowledge of mathematical task. «Psychological monographs», vol. 76, 1962, No. 7 (526).

574. Gallagher G. Y. Analysis of research on the education of gifted children. Office of the superintendent of public instruction, Springfield, Illinois, 1960.

575. Garret E. Statistics in psychology and education. 5th ed. Washington, 1960.

576. Gattegno C. L'enseignement des mathématiques. Chap. VI «La pédagogie des mathématiques». Delachaux, 1955.

577. Getzels J. W., Jackson P. W. Creativity and intelligence. New York, 1962.

578. Getzels J. W., Jackson P. W. The highly intelligent and the highly creative adolescent. A summary of some research findings. Conference on creativity. The University of Utah, 1959.

579. Getzels G. W., Jackson P. W. The meaning of «giftedness». «Education», vol. 82, 1962, No. 8.

580. Godfrey M. Vitalizing problem solving. «Education», vol. 82, 1962, No. 7.

581. Goldberg M. L. Recent research on the talented. «Teachers college record», vol. LX, 1958.

582. Goldberg M. L., Passow A. H. The effects of ability grouping. «Education», vol. 82, 1962, No. 8.

583. Goodenough F. L. Mental testing. New York, 1949.

584. Goodhart B. F., Schmidt S. D. Educational characteristics of superior children. «Baltimore Bulletin of Education», vol. 18, 1940.

585. Goslin D. A. The search for ability standardized testing in social perspective. New York, 1963.

586. Gottschaldt K. Der Aufbau der Begabung. Bericht über den 17. und 18. Kongreß der deutschen Gesellschaft für Psychologie. Göttingen, 1948.

587. Graesser R. F. Note on teaching. «School science and mathematics», vol. LV, 1955, No. 4.

588. Green R. F., Guilford J. P., Christensen P. R., Comrey A. L. A factor-analytic study of reasoning abilities. «Psychometrika», 1953, No. 18.

589. Greenberg L. A critique of classic methods of identifying gifted children. «The school review», vol. LXIII, 1955.

590. Grotberg E. H. Adjustment problems of the gifted. «Education», vol. 82, 1962, No. 8.

591. Guiler W. S. Forecasting achievement in elementary algebra. «Journal of educational research», vol. 38, 1944, No. 1.

592. Guilford J. P. The structure of intellect. «Psychological bulletin», vol. 53, 1956, No. 4.

593. Guilford J. P. Three faces of intellect. «The American psychologist», vol. 14, 1959, No. 8.

594. Guilford J. P., Zimmerman W. S., Michael W. B. An investigation of two hypotheses regarding the nature of the spatial relations and visualization factors. «Educational and psychological measurement», 1950, No. 10.

595. Hadamard J. An essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press, 1945.

596. Haecker V., Ziehen Th. Beitrag zur Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung. «Zeitschrift für Pädagogik», 1931, No. 121.

597. Häussermann E. Developmental potential of preschool children. New York—London, 1958.

598. Halperin S. L. A clinico—genetical study of mental defect. «American journal of mental deficiency», 1945, No. 50.

599. Hamley H. R. Relational and functional thinking in mathematics.

National Council of teachers of mathematics. «The ninth year-book», Teachers' college, Columbia University, New York, 1934.

600. Hamley H. R. The testing of intelligence. London, 1935.

601. Hamza M. A study of certain aspects of retardation in mathematics amongst secondary grammar-school pupils by factorial and individual methods unpublished. Leeds University, 1951.

602. Hamza M. Retardation in mathematics amongst grammar-school pupils. «British journal of educational psychology», vol. XXII, part 3, 1952.

603. Harlow H., Miller J., Newcomb T. Identifying creative talent in psychology. «The American psychologist», vol. 17, 1962, No. 10.

604. Harman H. H. Modern factor analysis. Chicago, 1960.

605. Havighurst R. T. Community factors in the education of gifted children. «The school review». The University of Chicago Press, vol. LXIII, 1955, No. 6.

606. Hendrix G. Learning by discovery. «The mathematics teacher», vol. 54, 1961, No. 5.

607. Hildreth G. School-wide planning for the gifted. «Educational administration and supervision», vol. 41, 1955, No. 1.

608. Himpfel J. Zur Frage der mathematischen Sonderbegabung in der höheren Schule. Archiv für die gesamte Psychologie, 1937, Nr. 99.

609. Holland J. L. Creative and academic performance among talented adolescents. «Journal of educational psychology», vol. 52, 1961, No. 6.

610. Holland J. L., Astin A. W. The need for redefining «talent» and «talent» and «talent loss». «Journal of higher education», vol. 33, 1962, No. 2.

611. Hollingworth L. S. Children above stanford-binet. New York, 1942.

612. Hollingworth L. S. Gifted children: their nature and nurture. New York, 1926.

613. Holzinger K. J., Harman H. H. Comparison of two factorial analyses. «Psychometrika», 1938, No. 3.

614. Hotyat F. Les difficultés psychologiques des débutants dans le raisonnement mathématique. «Mathématiques et Pédagogie», 1955-1956, No. 9.

615. Humphreys L. G. The organization of human abilities. «The American psychologist», vol. 17, 1962, No. 7.

616. Hunt J. McV. Intelligence and experience. New York, 1961.

617. Jamuar K. K. (India). Achievement and some background factors. «Psychological abstracts», 38, 1964, No. 2.

618. Jamuar K. K. (India). Personality and achievement. «Psychological abstracts», vol. 38, 1964, No. 2.

619. Jenkins J. W. An analysis of factors entering into the results of tests based on the logical principles of mathematics. London, 1939.

620. Johannot L. Le raisonnement mathématique de l'adolescent. Paris, 1947.

621. Karnes M. B., McCoy J. and others. Gifted students. The efficacy of two organizational plans for underachieving intellectually gifted children. «Except children», 1963, No. 29 (9).

622. Kelley T. L. Crossroads in the mind of man. Stanford, California, 1928.

623. Kennedy W. A., Willcutt H., Smith A. Wechsler profiles of mathematically gifted adolescents. «Psychological review», 1963, No. 12 (1).

624. Keppers G. L. Is algebra a «tool subject»? «School science and mathematics», vol. LV, 1955, No. 4.

625. Klausmeier H. J., Loughlin L. J. Behaviours during problem solving among children of low, average and high intelligence. «Journal of educational psychology», 1961, No. 52 (3).

626. Klausmeier H. J., Feldhusen J. F. Retention in arithmetic among children of low, average, and high intelligence at 117 months of age. «Journal of educational psychology», vol. 50, 1959, No. 2.

627. Kolstoe O. P. A comparison of mental abilities of bright and dull

children of comparable mental ages. «Journal of educational psychology», 1954, No. 45.

628. Kommerell V. Über mathematische «Begabung». «Zeitschrift für pädagogische Psychologie», XXIX, 1928.

629. Kough J. Practical programs for the gifted. Chicago, 1960.

630. Kundu R., Chakraborty (India). A study of relationship between speed and score in mental work. «Psychological abstracts», vol. 38, 1964, No. 2.

631. Kupisiewicz C. O efektywnoci nauczania problemowego. Warszawa, 1962.

632. Langer S. K. Algebra and the development of reason. «The mathematics teacher», vol. 24, 1931.

633. Leahy A. M. Nature—nurture and intelligence. «Genetic psychology monographs», 1935, No. 4.

634. Lee D. M. A study of specific ability and attainment in mathematics. «British journal of educational psychology», vol. XXV, part 3, 1955.

635. Lee S. M., Hughes W. H. Predicting success in algebra and geometry. «The school review», vol. XLII, 1934, No. 3.

636. Lehman H. C. Age and achievement. Princeton, 1953.

637. Leny J. F. Tests ou indicateurs psychologiques? «La Raison», 1957, N 19.

638. Lietzmann W. Mathematik in Erziehung und Unterricht. Leipzig, 1941.

639. Lobdell L. O., Vanness W. J. Grouping and enrichment. «Education», vol. 82, 1962, No. 7.

640. Locke E. A. Some correlates of classroom and out-of-class achievement in gifted science students. «Journal of educational psychology», 1963, No. 54 (5).

641. Luchins A. S. Mechanization in problem solving. «Psychological monographs», vol. 54, 1942, No. 248.

642. Mackinnon D. W. The nature and nurture of creative talent. «The American psychologist», vol. 17, 1962, No. 7.

643. Maier N. R. F. An aspect of human reasoning. «British journal of psychology», vol. 24, 1933.

644. Maier N. R. F. The behaviour mechanisms concerned with problem solving. «Psychological review», vol. 47, 1940, No. 1.

645. Mann M. What does ability grouping do to the self-concept? «Childhood education», vol. XXXVI, 1960.

646. Marshall M. S. In reply to Dr. Wilson. «Educational administration and supervision», vol. 41, 1955, No. 2.

647. Marshall M. S. The case of the gifted child. «Educational administration and supervision», vol. 40, 1954, No. 3.

648. Martens E. H. Gifted children: what do we know about them? What shall we do about them? «The nation's schools», 1951, No. 6.

649. Martinson R. A. Guidance of the gifted. «Education», vol. 82, 1962, No. 6.

650. Martinson W. D., Stamatakis L. C. An attempt to motivate potentially superior students. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.

651. McAllister B. Arithmetical concepts and the ability to do arithmetic. «British journal of educational psychology», vol. 21, part 2, 1951.

652. McClelland and others. Talent and society. Princeton—New York, 1958.

653. McCuen T. L. Predicting success in algebra. «Journal of educational research», vol. XXI, 1930, No. 1.

654. Mehl J., Mroczkowski M. Ein Fall mathematischer Frühbegabung. «Zeitschrift für Psychologie». Band 169, Heft 3—4. Leipzig, 1964.

655. Mensenkamp L. E. Tests of mathematical ability and their prognostic values. «School science and mathematics», vol. 21, 1921, No. 2.

656. Merrifield P. R., Guilford J. P., Christensen P. R.,

Frick S. W. The role of intellectual factors in problem solving. «Psychological monographs», vol. 76, 1962, No. 10.

657. Michaud E. L'enfant et les figures géométriques. «Le journal de psychologie normal et pathologique», 1947, N 2.

658. Mitchell F. W. The nature of mathematical thinking. Melbourne University Press, 1938.

659. Murray J. An analysis of geometrical ability. «Journal of educational psychology», vol. 30, 1949, No. 2.

660. Neel J. V., Schull W. J. Human heredity. The University of Chicago Press, 1954.

661. Newland T. E. A critique of research on the gifted. «Exceptional children», vol. 29, 1963, No. 8.

662. Ohles J. G. Differential learning. «Education», vol. 82, 1962, No. 7.

663. Oldham H. W. A psychological study of mathematical ability with special reference to school mathematics. «British journal psychology», vol. VII, part III, 1937.

664. Oldham H. W. A psychological study of mathematical ability. «British journal of educational psychology», vol. VIII, part I, 1938.

665. Olson W. C., Hughes B. W. Growth patterns of exceptional children. National Society for the study of education, «The forty-ninth year-book», part II.

666. Parnes S. J. Can creativity be increased? «Personnel administration», 1962, No. 25 (6).

667. Passow A. H. and others. Planning for talented youth. New York, 1955.

668. Penrose L. S. A clinical and genetic study of 1280 cases of mental defect. London, 1938.

669. Plumlee L. B. The verbal component in mathematics items. «Educational and psychological measurement», 1949, No. 9.

670. Poincaré H. L'invention mathématique. «Revue de mois», vol. 6, 1908.

671. Possecker R. Schülerübungen — ein Mittel zur Steigerung der Lernintensität im Mathematikunterricht. «Pädagogik», 1960, Nr. 1.

672. Pressey S. L. Concerning the nature and nurture of genius. «Scientific monograph», 1955, No. 81.

673. Pritchard M. C. The contributions of L. S. Hollingworth to the study of the gifted. «The gifted child», Boston, 1951.

674. «Proceedings of the XVII international congress of psychology (Washington, 1963)». Amsterdam, 1964.

675. Reese H. W. Manifest anxiety and achievement test performance. «Journal of educational psychology», 1961, No. 52 (3).

676. Révész G. Talent und Genie. Bern, 1952.

677. Révész G. The indivisibility of mathematical talent. Acta Psychologica. «Journal of psychology», vol. V, Amsterdam, 1940, No. 2—3.

678. Rimoldi H. J. A study of some factors related to intelligence. «Psychometrika», 1948, No. 13.

679. Rimoldi H. J. The central intellectual factor. «Psychometrika», 1951, No. 16.

680. Rogers A. L. Experimental tests of mathematical ability and their prognostic value. Teacher's college, Columbia University, «Contributions to education», New York, 1918, No. 89.

681. Rose G. Die Bedeutung des Gedächtnisses für den Mathematik- und Rechenunterricht. Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik, 1922, Nr. 23.

682. Rosenfeld G. Zu einigen Grundfragen der Begabungstheorie. «Pädagogik», 1960, Nr. 1.

683. Ruthe P. Über mathematische Begabung, ihre Analyse und ihre Prüfung bei 13jährigen begabten Volksschülern. «Praktische Psychologie», I, 1913, Nr. 1.

684. Sargent F. P. The gifted: educational resources. Boston, 1961.
685. Schiefelbusch R. L. Our gifted children. Bureau of child research, The University of Kansas. «Public information series», 1958, No. 1.
686. Schiller B. Verbal, numerical and spatial abilities of young children. «American psychologist», 1934, No. 161.
687. Schneek M. M. R. The measurement of verbal and numerical abilities. «American psychologist», 1929, No. 107.
688. «Science aptitude test». Section mathematics. Science talent search examination. National Council of educational research and training. India, Delhi, 1965.
689. Shertzer B., editor. Working with superior students: theories and practices. Chicago, 1960.
690. Spearman C. General intelligence, objectively determined and measured. «American journal of psychology», 1904, No. 15.
691. Spearman C. The abilities of man. London, 1927.
692. Spearman C. The nature of «intelligence» and the principles of cognition. London, 1923.
693. Spearman C., Wynn J. L. Human ability. London, 1950.
694. Stalnaker J. M. Recognizing and encouraging talent. «The American psychologist», vol. 16, 1961, No. 8.
695. Stanley J. C. Enriching high-school subjects for intellectually gifted students. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.
696. Stanley J. C. Test biases of prospective teachers identifying gifted children. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.
697. Stern W. Die Intellegenz der Kinder und Jugendlichen und die Methoden ihrer Untersuchung. Leipzig, 1928.
698. Стевановић Б. П. Тестови. Центар за професионалину оријентацију. Београд, 1964.
699. Stolurow L. M. Implication of current research and future trends. «Journal of educational research», vol. 55, 1962, No. 9.
700. Stone C. W. Arithmetical abilities and some factors determining them. New York, 1910.
701. Strang R. Mental hygiene of gifted children. «The gifted child», Boston, 1951.
702. Strunz K. Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens. Heidelberg, 1962.
703. Sutherland J. An investigation into some aspects of problem solving in arithmetic. «British journal of educational psychology», vol. XI, 1941—1942.
704. Symonds P. M. Special disability in algebra. New York, 1923.
705. Székely L. Knowledge and thinking. «Acta psychologica», vol. VII, 1950, No. 1.
706. Székely L. Productive processes in learning and thinking. «Acta psychologica», vol. VII, 1950, No. 2—4.
707. Taylor C., Barron F. (eds). Scientific creativity: its recognition and development. New York, 1963.
708. Terman L. A new approach to the study of genius. «Psychological review», vol. 29, 1922, No. 4.
709. Terman L. M. (ed) and others. «Genetic studies of genius», vol. I, II, III, IV, V, Stanford University Press, 1925—1947, 1958.
710. Terman L. M., Oden M. H. The gifted child grows up. «Genetic studies of genius», vol. 4, Stanford University Press, 1947.
711. Thomas H. Die mathematische Begabung und ihre Prüfung. Ind. Ps., 1929, Nr. 6.
712. Thomson G. The factorial analysis of human ability. Boston, 1950.
713. Thorndike E. L. On the organization of intellect. «Psychological review», 1921, No. 28.
714. Thorndike E. L. The abilities involved in algebraic computation and in problem solving. «School and society», vol. 15, 1922, No. 373.

715. Thorndike E. L. The psychology of algebra. New York, 1928.
716. Thurstone L. L., Thurstone T. G. Factorial studies of intelligence. «Psychometric monographs», 1941, No. 2.
717. Thurstone L. L. Multiple factor analysis. Chicago, 1947.
718. Thurstone L. L. The factors of mind. Chicago, 1947.
719. Thurstone L. L. The primary mental abilities. «Psychometric monographs», 1938, No. 1.
720. Thurstone Th., Byrne K. Mental abilities of children. 1951.
721. Torrance E. P. Changing reactions of preadolescent girls to tasks requiring creative scientific thinking. «Journal of general psychology», 1963, No. 102 (2).
722. Tyerman M. England's special schools for the gifted. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.
723. Vernon Ph. E. The structure of human abilities. London, 1961.
724. Vogt W. Zur Frage der mathematischen Begabung. «Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie». Leipzig, XI, 1933.
725. Wadia K. A. Identification of the gifted. «Guide to psychological literature». 1963, No. 1.
726. Wenzl A. Theorie der Begabung. Leipzig, 1934.
727. Werdelin I. The mathematical ability experimental and factorial studies. Copenhagen, 1958.
728. Wilson R. C., Guilford J. P. and others. A factor-analytical study of creative-thinking abilities. «Psychometrika», 1954, No. 19.
729. Wilson F. T. Comment on the case of the «gifted child», «Educational administration and supervision», v. 41, 1955, No. 2.
730. Wilson F. T. Salvaging gifted students in regular classrooms. «Educational administration and supervision», vol. 41, 1955, No. 8.
731. Wilson J. H. Group-factors among abilities involved in a school certificate examination. «British journal of educational psychology», 1933, No. 3.
732. Winch W. H. Accuracy in school children. Does improvement in numerical accuracy «transfer»? «Journal of educational psychology», 1910, No. 1.
733. Witty P. A study of one hundred gifted children. The University of Kansas. «Bulletin of education», vol. 11 (2), 1930, No. 7.
734. Witty P. Contributions to the «ig» controversy from the study of superior deviates. «School and society», vol. LI, 1940.
735. Witty P. Educational programs for the gifted. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.
736. Witty P. Educational provision for gifted children. «School and society», 1952, No. 76, (1953, 78).
737. Witty P. Some considerations in the education of gifted children «Educational administration and supervision», vol. XXVI, 1940.
738. Witty P. A. The gifted child-facts and fallacies. «National parent-teacher», vol. 42, 1948.
739. Witty P., editor. The gifted child. Boston, 1951.
740. Witty P. The gifted and the creative pupil «Education», vol. 82, 1962, No. 8.
741. Witty P., Lehman H. C. Ability versus effective ability. «Psychological review», vol. XXXV, 1928.
742. Witty P., Lehman H. C. Drive — a neglected trait in the study of the gifted. «Psychological review», vol. XXXIV, 1927.
743. Wollfe D. Diversity of talent. «The American psychologist», vol. 15, 1960, No. 8.
744. Woodring P. Ability grouping, segregation and the intellectual elite. «School and society», vol. 87, 1959, No. 2151.
745. Woodrow H. The ability to learn. «Psychol. rev.», 1946, No. 53.
746. Worcester D. A. The education of children of aboveaverage mentality. The University of Nebraska Press, Lincoln. 1955.
747. Wrigley J. The factorial nature of ability in elementary mathematics. «British journal of educational psychology», vol. 28, part I, 1958.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
РАЗДЕЛ I. Состояние проблемы и задачи исследования	5
Глава I. Теоретическое и практическое значение проблемы математических способностей на современном этапе развития советской науки и школы	5
Глава II. Проблема математических способностей в зарубежной психологии	10
§ 1. Развитие исследований по психологии способностей за рубежом	10
§ 2. Исследование математических способностей в зарубежной психологии	25
Глава III. Проблема математических способностей в русской до-революционной и советской психологической литературе	57
Глава IV. Постановка проблемы и задачи исследования	72
§ 1. Некоторые вопросы общей теории способностей	72
§ 2. Основные понятия	82
§ 3. Проблема и задачи исследования	94
РАЗДЕЛ II. Методика исследования и его организация	96
Глава I. Общая методика и организация исследования	96
Глава II. Гипотеза компонентов математических способностей как основа экспериментального исследования	99
Глава III. Методика экспериментального исследования	104
Глава IV. Система экспериментальных задач по исследованию математических способностей школьников	115
Глава V. Организация экспериментального исследования	195
РАЗДЕЛ III. Анализ структуры математических способностей школьников	201
Глава I. Анализ неэкспериментальных материалов о компонентах структуры математических способностей школьников	203
Глава II. Анализ индивидуальных случаев математической одаренности детей	211

Глава III. Особенности получения информации о задаче (первичной ориентировки в ней) способными к математике школьниками	246
Глава IV. Особенности переработки полученной информации в процессе решения задач способными к математике школьниками	260
§ 1. Способность к обобщению математических объектов, отношений и действий	260
§ 2. Способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий	291
§ 3. Гибкость мыслительных процессов	304
§ 4. Стремление к ясности, простоте и экономности («изяществу») решения	313
§ 5. Обратимость мыслительного процесса в математическом рассуждении (способность к быстрому и свободному переключению с прямого на обратный ход мысли)	316
§ 6. Гипотеза об акценторе математического действия	321
Глава V. Особенности хранения математической информации (математического материала) способными к математике школьниками	325
Глава VI. Некоторые специальные вопросы структуры математических способностей школьников	332
§ 1. Математическая направленность ума	332
§ 2. Проблема внезапного решения («озарения», инсайта) в свете анализа компонентов математических способностей	335
§ 3. Малая утомляемость способных школьников в процессе длительной и напряженной математической деятельности	341
Глава VII. Типовые, возрастные и половые различия в характеристиках компонентов математических способностей	343
§ 1. Типы структур (математических складов ума)	343
§ 2. Возрастная динамика развития структуры математических способностей	362
§ 3. О половых различиях в характеристике математических способностей	375
Глава VIII. Математические способности и личность	378
Глава IX. Общие вопросы структуры математических способностей	385
§ 1. Общая схема структуры. Взаимоотношение компонентов	385
§ 2. Специфичность математических способностей	388
§ 3. Некоторые соображения о природе математических способностей	398
Литература	401

Вадим Андреевич Крутецкий

**ПСИХОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ**

Редактор И. П. Румянцева

Художник А. Д. Калничев

Художественный редактор В. С. Эрдечко

Технический редактор Л. Я. Медведев

Корректор М. В. Голубева

Сдано в набор 13/VII 1967 г. Подписано к печати
29/XII 1967 г. 60×90¹/₁₆. Типографская № 2.
Печ. л. 27,0. Уч.-изд. л. 27,79. Тираж 25 тыс. экз.
(Тем. пл. 1967 г. № 97). А-14550.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати
при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд
Марьиной рощи, 41.

Типография № 1 Управления по печати Исполкома
Моссовета. Москва, ул. Макаренко, 5/16. Заказ 639.

Цена без переплета 1 руб. 11 коп., переплет 18 коп.

по к печати
ская № 2.
25 т.с. экз.

по печати
3-й проезд

Исполкома
Заказ 639
плет 18 коп.





ПИСИХОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИЛОСОВЫХ И КОЛЛЕКТИВНЫХ











**ВСЕГДА
не верьте
тому что
кажется,
верьте
ТОЛЬКО
доказательствам.**



PIC•COLLAGE

Чарльз Диккенс. «Большие надежды» 1861 г.